This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

FROM THE LIBRARY OF

Professor Karl Heinrich Rau

OF THE UNIVERSITY OF HEIDELBERG

PRESENTED TO THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
BY

Mr. Philo Parsons

OF DETROIT

1871

3.M. 36 Ac.
12 —
Bf. 48 —

QA
35
.K11a
V.117

NON
CIRCULATING

Anfangsgründe der Analy des Unendlichen.

PARSONS LIBRARY University of MICHIGAN

Von
Abraham Gotthelf Kästner.

Der mathem. Anfangsgr. IIIter Theil; zweyte Abtheil.

Dritte, stark vermehrte Auflage. Fünf Kupfertafeln.

Göttingen,
im Verlag bey Vandenhoek und Ruprecht
1799.

E. D. H. Rau.
1810.

Vorrede.

Geheimnisse müssen doch was sehr Reizendes für den menschlichen Verstand seyn, weil man selbst in derjenigen Wissenschaft dergleichen zu haben gesucht hat, die seit tausenden von Jahren, ihrer Deutlichkeit und augenscheinlichen Ueberzeugung wegen berühmt gewesen ist. Man sieht ohne mein Erinnern, daß ich die Lehre vom Unendlichen in der Mathematik meyne, wie sie von vielen Schriftstellern, selbst solchen die das Reich der Wissenschaften dadurch erweitert haben, vorgetragen wird. Grössen die unterschieden sind und doch als gleich angesehen werden; Unendlich grosse Dinge die in Vergleichung mit andern Nichts, und unendlich kleine die in Vergleichung mit andern unendlich groß sind; krumme Linien, die aus geraden Theilchen bestehen, welche gerade Theilchen man nach Gefallen wieder krümmt wie man will, und unzählich andere solche Sätze die wieder die ersten Gründe aller menschlichen Erkänntniß anzustossen scheinen, sollen von den Schülern der Mathematik als die erhabensten Lehren ehrfurchtsvoll angenom-

men werden. Könnte der Aberglauben was mehr von seinen Anbetern fordern, wenn er nach Hallers Ausdrucke: mit Rauch die schimmernden Gewölber füllt?

Die Alten haben den Nahmen des Unendlichen, und alles was damit einige Verwandschaft haben könnte, zu vermeiden, eine Sorgfalt angewandt, die unsere Geduld überschreitet, und Carteſius hat noch dafür mit Zittern das Wort unbegränzt, indefinitum, gebraucht. Auf ein Wort kömmt es nicht an, wenn man nur die Bedeutung desſelben gehörig beſtimmt. So wie ich ſie im Anfange gegenwärtigen Werkes beſtimmt habe, ſcheint mir alles deutlich zu ſeyn, und die Geheimniſſe des Unendlichen, die manchem Schriftſteller unbegreiflich geſchienen haben, weil unſer endliche Geiſt das Unendliche nicht faſſen könne, verwandeln ſich theils in ſehr offenbahre Sätze, theils in Wortſpiele.

Da ſind es keine Wortſpiele, wenn man ſie als Redensarten anſieht, die etwas kurz und nachdrücklich ſagen, das man ſonſt viel weitläuftiger geſagt hat. Wie ſich der kühne Ausdruck eines Dichters, von dem vielleicht logiſch richtigern, aber trockenen Vortrage des Philoſophen unterſcheidet, ſo iſt ohngefähr die Rechnung des Unendlichen von den Beweiſen der Alten unterſchieden: Auch hat das feſte Land ſie zuerſt von einem Geiſte gelernt, bey dem

dem sich der Witz des Dichters, die Einsicht des Philosophen, die Gründlichkeit des Geometers und die Belesenheit des Polyhistors vereinigten. In der ersten Probe die er von seinen Entdeckungen durch die Rechnung des Unendlichen gegeben hat, in seiner Quadratur des Kreises *) hat er schon angezeigt wie wir das Unendliche, von unsern eingeschränkten Kräften ungehindert, fassen. Wir stellen uns nähmlich nicht alle seine Theile vor, aber wir kennen das Gesetz, das alle diese Theile gemeinschaftlich beobachten. Von der Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots$. kennen wir nie alle Glieder, aber daß jedes Paar nächste Glieder $+\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3}$ heissen muß, begreifen wir vollkommen.

Vermittelst des newtonischen Parallelogramms finden wir aus einer gegebenen Gleichung, die ersten Glieder einer unendlichen Reihe, und das Gesetz ihres Fortganges, dadurch sind die übrigen Glieder alle bestimmt; es steht nicht bey uns wie sie beschaffen seyn sollen, wenn wir die ersten festgesetzt haben; Für die ersten könnten wir andere und andere annehmen, und dadurch andere und andere Reihen erhalten: Ist es so was Ungereimtes, als der Freygeist, und der zu weichherzige Fromme

*) Act. Er. Lipf. Febr. 1682.

me uns bereden wollen: daß unſer Schickſaal für eine Ewigkeit, durch das gegenwärtige Leben beſtimmt wird? können unſere jetzigen Jahre nicht die erſten Glieder in den Theilen einer Gleichungsreihe ſeyn, *) dadurch alle die folgenden ohne Ende beſtimmt werden?

Paucula iam ſeries monſtrat primordia naſcens
Lege ſua partes haec ſine fine regunt:
Qualiter a vita quam bis ſex luſtra coercent
Aeua tenent formam non numeranda ſuam.

Sobald wir ſtatt des Geſetzes des Fortganges unendlicher Theile, alle Theile ſelbſt zu faſſen glauben, ſobald wir uns das Unendliche als etwas wirkliches und ſchon vorhandenes vorſtellen, ſobald wiederſprechen wir der Erklärung eines wirklichen Dinges. Beſtimmt ſeyn gehört zu des wirklichen Weſen, aber beſtimmt ſeyn heiſſt, ſich angeben laſſen, und alſo endlich ſeyn. Dieſe Erinnerung hat Barrow **) gemacht, aus deſſen geometriſchen Lectionen Newton gewiß, und vielleicht auch Leibniz die erſten Begriffe der Rechnung des Unendlichen geſchöpft hat. Gegentheils ſind die unendlich kleinen oder groſſen Gröſſen, ihrer Natur nach, nicht zu beſtimmen wie ſich Hauſen

*) Alg. 649.

**) Deſultoriam et indeterminatam quantitatem habere, eſt habere nullam; eſt enim aliquid determinate, quicquid eſt, quod vbique eſt, nuſquam eſt. BARROW lect. Mathem. anni 1666. quinta p. 262. ed. Londn. 1684.

sen ausdrückt, *) der nie vergaß seine Zuhörer zu erinnern, daß im Unendlichen geschehen, niemals geschehn heißt, und der Ort wo eine Parallele mit der andern, die Hyperbel mit der Asymptote, zusammenfällt, nirgends ist.

In den Gesprächen in denen Galiläus die Gesetze des Falles zuerst gelehret, und die Festigkeit der Körper zu untersuchen angewiesen hat, **) finden sich viel seltsam klingende Sätze vom Unendlichen***) und er läßt seine Leser in aller

*) Natura sua indeterminabilis. HAVSEN El. Ar. Schol. Prop. 20.

**) Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuoue scienze &c. (ed. Elsev. 1638; 4to) dialogo I.

***) Ich will einen davon beybringen, den Stedler (Fränkische Acta Erud. & Curiosa X. Samml. VII. Art.) vorgetragen hat, doch ohne einmahl das Buch des Galiläus anzuzeigen, darinnen er sich findet. „Jedes Kreises Umfang soll „seinem Mittelpuncte gleich seyn.„ Ich will bey meinem Vortrage zum voraus setzen, daß man den 66. Satz meiner Geometrie, und die dazu gehörige 127 Fig. vor Augen habe. Ein Kreis der QH zum Halbmesser hat, ist so groß als der Ring zwischen den beyden Kreisen die QE und QL zu Halbmessern haben. Aber wenn QL in KG fällt, se verwandelt sich der Kreis in den Mittelpunct K, weil QH = 0; und der Ring in den Umfang eines Kreises mit KG; weil QE = QL also ist der Mittelpunct dem Umfange gleich. So schliesst Salviati beym

aller der Verwirrung, in welche sie durch seine Spitzfündigkeiten können seyn gebracht worden; wie

Galiläus (a. a. O. 28. S.) Aber aus $QH^2 = QL^2 - QE^2$ oder $QH^2 . \pi = (QL^2 - QE^2) . \pi$ folgt für $QE = QL$ nichts als $QH = o$ und $o = o$, ob sich also wohl die Gleichheit des Kreises und des Ringes bis auf den Augenblick da beyde verschwinden erhält, so ist es doch nicht erlaubt den Mittelpunct K als den letzten unter den immer abnehmenden Halbmessern QH; und den Umfang eines mit KG beschriebenen Kreises als den letzten unter den immer abnehmenden Ringen zu betrachten. Wenn sich eine Gröſſe durch beständige Abnahme in eine andere verwandelt, so muß ohne Zweifel der Unterschied zwischen beyden immer kleiner und kleiner werden. Aber man kann sich keinen Unterschied und folglich auch keinen immer abnehmenden Unterschied zwischen K und QH; oder zwischen dem Umfange und dem Ringe vorstellen.

Wenn es erlaubt ist, von der beständigen Verhältniß zwoer veränderlichen Gröſſen, auf die Verhältniß deſſen zu schlieſſen, das noch bleibt, wenn die Gröſſen nicht mehr sind, so will ich mit leichter Mühe noch gröſſere Ungeheuer, z. E. einen Punct der sich selbst nicht gleich ist, zum Vorscheine bringen. In der ersten der zu gegenwärtigem Werke gehörigen Figuren, sey TM eine gerade Linie die mit TP einen Winkel von 30 Gr. macht: So ist allemahl $MP = \frac{1}{2} TM$ wo auch M genommen wird; Man lasse also MP immer näher an T rücken, bis sie endlich in T fällt, so verwandelt sich MP sowohl als TM in T; und es ist also

wie ich glaube aus einem philosophischen Muthwillen. Denn sonst würde er ohne Zweifel diese

also der Punct T als die letzte MP betrachtet, halb so groß als vollkommen eben derselbe Punct T, als die letzte TM betrachtet.

Ich wollte daß ich hiebey nicht erinnern müsste, daß man aus der Gleichung 2. o = 1. o nicht etwa schliessen soll: ein Nichts könne halb so groß als ein anderes Nichts, oder o: o = 1: 2 seyn. Die Gleichung sagt soviel ich einsehe nur soviel: daß Nichts und Nichts dazu auch noch Nichts ist. Aus 2. y = 1. x folgt y: x = 1: 2; wenn man aber hier o statt y und x setzt, so bedeutet 2. o. nicht so etwas wie 2y bedeutet. Dieses heisst ein Ding zweymahl nehmen, und jenes, Nichts zweymahl nehmen. Wollte man sich verstatten ein Nichts hier statt Nichts zu setzen, und das Nichts wie ein Ding zu betrachten das man zweymahl nähme, so würde man sich den Erinnerungen aussetzen die Herr Premontval in den Mem. de l'Ac. R. de Prusse 1754; 421. und 433 S. wieder den Wolfischen Beweis vom Satze des zureichenden Grundes gemacht hat. Oder, um die Sache weniger metaphysisch vorzutragen: Man würde den Grund der erhabensten Rechnung, mit dem Witze eines alten deutschen Formenschneiders Johann Daniel Müllers legen, der nach der Mitte des vorigen Jahrhunderts gelebt hat. Ich besitze von ihm den Niemand nach dem Leben abgebildet, und in schönen deutschen Versen alles zu seinem Lobe und Tadel gesagt, was Niemand thut, oder gethan haben will. Bey diesem Niemande, und bey den zwey Nichtsen deren

dieſe Knoten eben ſo leicht aufgelöſet haben, als er ſie geknüpft hat: dieſes erhellt aus der richtigen Erinnerung auf der 36 S. ſeines Werkes, daß die Frage, ob eine Linie nur eine endliche Menge Theile oder unendlich viel enthalte ſich ſo beantworten läſſt: Sie enthalte jede gegebene Zahl von Theilen.

Der ältere Sturm hat die unbegreiflichen Lehren der Mathematik in einer eigenen Abhandlung geſammlet. *) Sie beruhen alle auf dem Unendlichen, und werden nur durch den Vortrag unbegreiflich. Die Gleichheit der Parallelogrammen auf einer Grundlinie zwiſchen einerley Parallelen kömmt hier auch vor. Die hätte ich nun würklich hier nicht geſucht: Weil ich ſie aber doch hier fand, ſo ſuchte ich da noch eine andere eben ſo groſſe Unbegreiflichkeit, und die fand ich nicht: Es war die Ochſenhaut der Dido, die in Riemen zerſchnitten, einen Umfang gab, in dem Carthago ſtehen konnte.

Der

eines noch einmahl ſo groß als das andere iſt, fällt mir ein lateiniſches Heldengedicht ein, damit ich dieſe lange Anmerkung ſchlieſſen will

Nullus et Nemo
Mordebant ſe in ſaeco:
Nullus clamabat
Nemo audiebat.

*) De Matheſeos incomprehenſibilibus. v. Io. Chriſtoph. Sturmii praelect. Acad. ed. a Dan. Algoewero 1722.

Der P. Boscowich hat eine neue Sammlung von den Geheimnissen, und selbst Ungereimtheiten des Unendlichen gemacht.*) Sie finden aber nur alsdenn statt, wenn man eine unendliche Grösse als etwas wirklich vorhandenes ansieht, und wie sich der P. Boscowich ausdruckt ein indefinitum absolutum annimmt. Nimmt man nur Grössen die unendlich wachsen oder abnehmen können, unbestimmt an, so lässt sich wie er ebenfalls erinnert, alles ohne Schwierigkeit erklären. Daß der Gebrauch des Unendlichen so vielen Einwendungen ist ausgesetzt gewesen, rührt nach Fontenellens Gedanken **) daher; weil die Geometrie von der Seite wo das Unendliche in ihr vorkömmt, mit der Naturlehre, mit dem innern Wesen der Körper zusammenhängt, das uns so unbekannt ist. Dieser Einfall, hat wie viel andere dieses Schriftstellers in diesem Buche, mehr Witz als Gründlichkeit, wenn anders wahrer Witz ohne Gründlichkeit seyn kann. Ich müsste mich sehr irren, wenn ihm nicht ein Einfall eines Deutschen an Scharfsinnigkeit und Wahrheit weit vorzuziehen wäre. Fontenelle

*) De transformatione locorum geometricorum; §. 880. sequ. am Ende seiner Anfangsgründe der Kegelschnitte die den dritten Theil seiner Elementorum Matheseos (Rom 1754) ausmachen.

**) Elemens de la géometrie de l'infini; préf.

tenelle nimmt Gröſſen an, die zwiſchen die endlichen und unendlichen fallen; Es ſind die, die wir durch $\infty^{\frac{1}{1}}$ u. d g. ausdrucken; durch dieſe meynt er, geſchehe der Uebergang aus dem Endlichen ins Unendliche. Bey dieſen Brücken aber die aus dem Endlichen ins Unendliche führen, hat er, wie Hauſen ſcherzte, nicht bedacht, daß auf ſie aus dem Endlichen zu kommen, wieder andere Brücken nöthig ſind.

Daß die Geometrie das Unendliche aus der Naturlehre haben ſollte, iſt ſo unrichtig, daß man vielmehr das Unendliche aus der Geometrie in die Naturlehre durch Schlüſſe hat bringen wollen, von denen ich ſchon anderswo meine Gedanken eröffnet habe. *) Mit dieſen Schlüſſen haben ſich ſchon die ältern Philoſophen ſo verwirrt, daß Fromond ein Buch in dem er viel dergleichen geſammlet hat, mit dem Nahmen eines Labyrinths beleget. **) Blancan hat bey Gelegenheit der Schrift des Ariſtoteles von untheilbaren Linien, erinnert, ***) daß die Unterſuchung ob untheilbare Weſen, und wie ſie in der Natur vorhanden ſind, aus andern Gründen als aus geometriſchen geführt wer-

*) Anfangsgr. der Geom. 3. Erkl. Anm.

**) *Liberti Fromondi* Labyrinthus, ſ. de compoſitione *continui liber vnus*, philoſophis, *mathematicis*, *theologis vtilis et iucundus*. Antu. *1631*.

***) *Blancani loca* Ariſtotelis mathematica p. 209.

werden muß: Eine Erinnerung die manche Bestreiter der Monaden wohl hätten lesen mögen, ehe sie falsche Schlüsse für geometrische Beweise hätten drucken lassen.

Maclaurin hat in seinem Treatise of Fluxions alle Nebel der eingebildeten Geheimnisse des Unendlichen zerstreut. Man könnte auf sein Buch den Titel einer sehr berüchtigten Schrift parodiren, und es Infinity not mysterious nennen. Nur bringt die synthetische Methode, die er nach Art der Engländer durchgängig braucht, zweyerley Unbequemlichkeiten hervor. Die erste, die grosse Weitläuftigkeit, entschuldiget er selbst damit, daß man bey Kunstgriffen die uns die wichtigsten Untersuchungen so nützlich verkürzen, nicht zu weitläuftig im Vortrage ihrer Gründe seyn könne. Viele seiner Beweise, die z. E. verschiedene Fälle eines einzigen Satzes darthun, sind auch einander so ähnlich, daß man nur einen lesen darf, um sie alle zu übersehen. Aber bey einem Buche das uns den vortrefflichsten Theil der mathematischen Erfindungskunst lehret, wäre wohl dienlich gewesen, selbst den Vortrag der Gründe so einzurichten daß man sähe wie sie erfunden worden sind.

Ich habe in gegenwärtigem Werke mich meistens der Methode der ersten oder letzten Verhältnisse bedient, die Newton in seinen principiis gebraucht hat. Ohngeachtet ich gewiesen

wiesen habe, wie sich die gewöhnlichen Redensarten der Rechnung des Unendlichen rechtfertigen lassen, so habe ich doch sie selbst wo es ohne allzugrosse Weitläuftigkeit hat geschehen können zu vermeiden gesucht, oder doch allemahl so gebraucht, daß man sieht wie sie nur Abkürzungen des Vortrages sind. Ein Frauenzimmer das die Natur vollkommen wohl gebildet hatte, giebt sich zuweilen durch eine Kleidung nach der Mode ein ungestaltes Ansehen: und die Rechnung des Unendlichen, scheint in der Hülle solcher Redensarten Fehler an sich zu haben, die dadurch nicht bedeckt werden, daß sie dem Mathematikverständigen unerschöpfliche Sätze von Erfindungen darbietet; Denn für die Augen eines Geistes dem nur Wahrheit schön ist, würde sie doch allemahl eine häßliche Reiche seyn. Zum Glücke sind es nur Fehler ihrer Kleidung; zuweilen hat sie sich ungeschickter Schneider bedient, zuweilen hat sie mit Willen in der Eil eine Salope um sich geworfen; und der Geometer kann so entzückt als Ovid sagen:

Vt stetit ante oculos posito velamine nostros
In toto nusquam corpore menda fuit.

Göttingen;
im März 1761.

Erin-

Erinnerung
bey der zweyten Ausgabe.

Bey dem Gebrauche den ich von diesem Buche zum Unterrichte machte, gab sich unter andern sogleich Gelegenheit die vielen Druckfehler zu bemerken die in die erste Ausgabe eingeschlichen sind. Den grössten Theil der Anzeige derselben bin ich meinen Zuhörern schuldig. Ich erwähne diesen Umstand deßwegen, weil man die Druckfehler die in mathematischen Büchern häufiger vorkommen als in andern, auch da für viel gefährlicher zu halten pflegt.

In trigonometrischen, astronomischen, oder andern Tafeln, die man nicht nachrechnen mag, ist das letzte freylich wahr, und doch kann man auch bey solchen Tafeln, aus der Ordnung in der die Zahlen fortgehen müssen u. d. gl. ex ingenio Verbesserungen machen, die sicherer sind als Bentleys Verbesserungen des Horaz.

In einem Lehrbuche, pflegt allerdings der Schüler anzustossen, wenn seine Rechnung ihm was anders giebt als er gedruckt findet. In dem Falle, rechne er nur aus dem was er herausgebracht hat weiter fort. Stimmt das, was ihm seine fernere Rechnung giebt, mit den fernern Lehren des Buches überein, so

hatte

hatte er recht gerechnet, und der Zwist zwischen ihm und dem Buche rührte von einem Druckfehler her, wie man das Ding nennt, dafür doch der Drucker gar nichts kann, sondern der Setzer, und oft auch der nicht, sondern der Autor der zu gelehrt schreibt.

Indem ich aber dieses Buch erklärte mussten mir nothwendig auch Stellen in die Augen fallen, wo durch Aenderungen im Ausdrucke und Vorträge die Sache konnte erleichtert werden, wo sich die Untersuchungen ohne Schaden der Gründlichkeit und Vollständigkeit abkürzen liessen.

Endlich konnten einige neuere Schriften besonders Hr. Eulers Institutiones Calculi Integralis*) mir Materie zu Vermehrungen darbieten.

Bey den Veränderungen die sich solchergestalt machen liessen, konnte ich gleichwohl, weder der Ordnung des Vortrages, noch Zahlen der Absätze, beträchtlich ändern, wenn ich nicht ein neu Buch machen wollte, und dazu hatte ich keine Lust, weil ich noch nicht sehe daß ich das neue sehr viel besser machen könnte. Auch konnte ich freylich nicht alles in dieses Buch bringen, was von der Rechnung des Unendlichen geschrieben ist. Hr. Euler hat in fünf starken

*) Zu St. Petersburg gr. 4. Vol. I. 1768. 542. S. Vol. II. 1769. 526. S.

ſtarken Quartbänden *) nur einen Anfang gemacht ſie vorzutragen, und ich muſſte nach meinen Abſichten, denen die ſich meines Buches bedienen wollen, von viel mehrerley Dingen, als in dieſen Bänden vorkommen, wenigſtens Begriffe geben.

Ich habe alſo die Vermehrungen die mir nöthig ſchienen, wo es ſich am bequemſten thun lieſſe eingeſchoben. Hievon und von andern Verbeſſerungen, will ich das wichtigſte anzeigen, häufige Kleinigkeiten übergehe ich.

Beym 9. Abſ. iſt der Beweis erleichtert.

Im 144 u. f. iſt die Uebereinſtimmung zwiſchen den Coefficienten des binomiſchen Satzes und der höhern Differentiale gewieſen, und daraus der Ausdruck einer Gröſſe durch höhere Differentiale, hergeleitet worden Ich habe dadurch vermieden was ich in der vorigen Ausgabe nöthig hatte, den unbeſtimmten Binomialcoefficienten für einen unendlichen Exponenten anzugeben. Die Lehre von den Logarithmen 213 u. f. §. habe ich hier meiner Einſicht nach viel beſſer abgehandelt.

Die

*) Introductio in Analyſin infiniti Lauſ. 1748. 2 Theile 718 S. Inſtitutiones calculi differentialis Petrop. 1755. 880 S. und die angef. Inſt. calc. Int. Und noch: Inſt. calc. int. Vol. III. 1770. 639 S.

Die wichtige Integration 248 ist ordentlicher und ausführlicher vorgetragen.

Daß jede Zahl unzählige Logarithmen habe, ist 332 §. aus der Vergleichung der Kreisbogen mit Logarithmen hergeleitet worden. Dieser Beweiß wird leichter und kürzer als der den Hr. Euler gegeben hat.

Die Integrirung irrationaler zweytheilichten Differentiale habe ich 399 §. nach Hr. Eulern vorgetragen, statt eines Verfahrens in der vorigen Ausgabe das ich 404 §. anzeige.

Bey den 494 u. f. Abs. ist vieles erläutert worden.

Die beyden Anhänge von der keplerischen Aufgabe und vom Schwerpuncte, haben auch Verbesserungen erhalten.

Weil einiges nicht genug Brauchbare weggeblieben, anderes kürzer gefasst ist, und diese Ausgabe etwas kleinere Schrift hat als die vorige, so beträgt sie der angezeigten Vermehrungen ohngeachtet 11 Octavseiten weniger.

Göttingen;
im September 1770.

A. G. Käſtner.

Erinnerung

wegen der dritten Ausgabe.

Die wichtigsten Vermehrungen sind im Verzeichnisse des Innhalts * mit angedeutet. Eine sehr beträchtliche ist Variationsrechnung mit derselben Anwendung auf Grösste und Kleinste, dazu auch eine neue Kupfertafel.

Die keplerische Aufgabe, welche sich am Ende beyder vorigen Auflagen befand, ist weggeblieben.

Ich rechtfertige mich deßwegen 344 §. gegenwärtiger Ausgabe, dagegen habe ich in den folgenden Absätzen beygebracht wie der elliptische Ausschnitt aus dem Brennpuncte durch Sinus der Vielfache des Winkels am Brennpuncte ausgedruckt wird.

Den Schwerpunct durch Integriren zu finden, habe ich beybehalten und da noch Unterschiednes zugesetzt.

Göttingen
im October 1798.

A. G. Käſtner.

Innhalt.

Innhalt.

Gründe der Lehre vom Unendlichen	§	Seite
Eine Gröſſe wächſt unendlich	1	1
nähert ſich einer Gränze unendlich	7	3
Ordnungen der unendlich groſſen und unendlich kleinen	11	6
Gründe der Differentialrechnung.		
Verhältniß der Differentiale	13	10
* Differentialgleichung zwiſchen einer Gröſſe und der durch deren Potenzen ſie gegeben iſt	20	16
Grundlehren vom Differentiiren	21	20
Von der Fluxionenrechnung	31	29
* Zur Geſchichte des Streites über die Erfindung	44	41
* Differentiale, erſte und letzte Verhältniſſe, toleranter vera	45	51
Bewegung gehört in die Geometrie	X	56
Binomiſcher Lehrſatz auch für gebrochne und verneinte Exponenten	46	60
Potenz einer unendlichen Reihe	56	70
Tangenten	63	79
* Bey gleichartigen Gleichungen	91	91
Normallinien	92	92
* Gleichlaufende krumme Linien	95	93

	§	Seite
Winkel der Elemente eines Kreises mit einander	96	98
Tangente der Muschellinie	97	99
* Winkel der Linien aus einer Ellipse Brennpuncten mit der Tangente	98	101
* Krumme Linien die einen Strahl nach zwo Reflexionen zurückbringen	99	105
* Ellipsen die Scheitel und Brennpunct gemein haben	101	107
Tangente der Cykloide	102	108
Tangenten an Linien deren Ordinaten aus einem Puncte gehn	104	110
Paraboliſche Spirale	107	112
Aſymptoten	108	113
Höhere Differentiale	120	120
Differentiallinien	127	124
Unbeſtimmtes Glied einer Reihe durch höhere Differentiale	144	131
Gröſſte und Kleinſte	152	135
Parallelepiped, von gegebnem Innhalt, gegebner Seite, und kleinſter Fläche	157	143
Kürzeſte gerade Linie an eine algebraiſche krumme	158	144
Gröſſte oder Kleinſte ohne Rechnung des Unendlichen	159	146
Gröſſte und Kleinſte aus der Lage der Tangente wo dy:dx unendlich wird	IX	148
* Cylinder von gegebenem Innhalte wo krumme Fläche und ein Boden ein Kleinſtes ſind	161	148
Wo kr. Fläche und beyde Boden ein kleinſtes ſind	162	153
Paraboliſche Linien welche die		

Lehre

	§	Seite
Lehre der Gleichungen erläutern	163	156
Beugungspunct, Schlangenpunct	111	157
Dieſer Linien Differentiallinien und gröſſte oder kleinſte Ordinaten	164	158
Zahl der bejahten und der verneinten Wurzeln	169	163
Von gleichen Wurzeln	172	164
Von unmöglichen. Sie ſind allemahl paarweiſe da.	174	167
Wieviel ihrer ſind	175	168
Anwendung auf die kubiſchen Gleichungen	185	178
Zahl der bejahten und der verneinten Wurzeln aus Abwechslungen und Folgen	186	180
Gränzen der Wurzeln	194	187

Integralrechnung.

Integral oder Summe	201	194
Quadratur krummer Linien	205	195
Quadratur der Parabel	208	198
Einer paraboliſchen krummen Linie	210	201
Einer höhern Hyperbel	211	202
Pluſquam infinita	XIII	206

Rechnung des Unendlichen auf Logarithmen angewandt.

Logarithmiſche Linie	213	207
*Mit verneinten Ordinaten giebt keine Logarithmen verneinter Gröſſen	XIX	213
Unterſchiedne logarithmiſche Syſteme	214	215
Subtangente einer logarithmiſchen Linie unveränderlich	215	216

	§	Seite
Differential eines Logarithmen	217	219
Logarithme einer Zahl zwischen 1 und 2	220	221
Diese Zahl aus ihrem Logarithmen	221	
Ordinate der Subtangente gleich	222	224
Zahl e		225
Reihe für Logarithmen die sich schneller nähert	223	225
Für jede ganze Zahl Logarithmen zu finden	224	227
Logarithmen der ersten 10 Zahlen	226	229
Logarithmen in zwey Systemen verhalten sich wie der Systeme Subtangenten	227	231
Natürliche in briggische zu verwandeln	231	232
Zahl als eine Potenz von e	232	233
*Logarithmicae obliquangulae, eurua Beaunianæ		234
Logarithmische Linie aus der Hyperbel	233	234
*Tafeln hyperbolischer Logarithmen	XI	239
*Wie neperische Logarithmen mit den natürlichen zusammenhängen	235	240
*Logarithmen nach Nepers Art	IX	245
Exponentialrechnung	236	251
Logarithme einer unendlichen Zahl ist unendlich klein von einer niedrigern Ordnung	244	260
Allgemeine Formeln zusammengesetzte Differentiale zu integriren	245	260
Umstände unter denen sich ein gewisses irrationales Differential durch eine unendliche Reihe integriren läßt	248	262

Ver-

	§	Seite
Verwandlungen	257	268
Irrationale Differentiale	259	269
Gebrochne Functionen	260	270
Verkehrte Methode der Tangenten	262	
Rectification	266	272
Rectification der neilischen Parabel	268	273
*Ihr Zusammenhang mit Quadratur der apollonischen	271	275
*Unbestimmte algebraische Rectification	274	277

Quadraturen und Rectificationen zum Kreise.

Fläche für Abscisse aus dem Mittelpuncte	273	278
Für Abscisse vom Scheitel an	275	281
Bogen aus Sinus	281	285
Sinus aus Bogen	285	290
Bogen aus Quersinus	287	295
Quersinus aus Bogen	293	300
Bogen aus Cosinus	296	303
Bogen aus Tangente	299	305
*Reihen die sich nicht nähern, obgleich ihre Glieder immer kleiner werden	300	307
Tangente aus Bogen	301	312
Cotangente aus Bogen	302	314
Secante aus Bogen	303	315
Cosecante aus Bogen	304	316
Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise	306	317
*Machins Reihe	308; V	324
Sinus aus Bogen	310	326
Berechnung der trigonometrischen Linien	311	327
Sinus und Cosinus aus Bogen	314	330

	§	Seite
Ausschnitte der Hyperbel	317	334
Vergleichung mit Ausschnitten des Kreises	322	342
Vervielfältigung der Winkel vermittelst der Tangenten	331	348
Jeder Zahl gehören unzählich viel Logarithmen	332	356
Allgemeiner Ausdruck der Seiten ordentlicher Vielecke.		
Umfang des Kreises durch Logarithmen	333	361
Tangente von $\frac{\pi}{n}$ des halben Umfangs	334	362
Gleichung zwischen Sinus und Cosinus des einfachen und vielfachen Winkels	335	363
Reihe die den Sinus durch den Bogen giebt, in Factoren zerfällt	336	364
Reihe für den Cosinus zerfällt	338	369
Potenzen von e mit unmöglichen Exponenten	339	373
Hyperbolischer Logarithme des halben Umfangs	340	374
Logarithme eines Sinus oder Cosinus	341	375
*Potenzen eines Cosinus, durch Cosinus des vielfachen Bogens	342	377
*Fläche der Ellipse für Abscisse aus dem Mittelpuncte	343	378
*Ausschnitt aus dem Brennpuncte	344	380
*Von Keplers Aufgabe		381
*Aussch. a. d. Brennp. durch Winkel am Brennpuncte	345	383
*Ueber Rectification der Ellipse	346	389

Der

	§	Seite
Der Hyperbel	VI	392
*Rectification der Parabel	347	393
*Summe von Tangente und Secante	XVI	397
*Differential des paraboliſchen Bogens rational zu machen	XXXII	401
*Rectification durch Reihen	348	402
*Rectif. der Parabel auf Quadratur der Hyperbel	VII	404
Zerlegung gebrochner Functionen in einfache	349	405
Gerade oder ungerade Functionen	350	406
Wenn der Nenner zweene Factoren hat, die keinen gemeinſchaftlichen haben, Zerlegung in zween Brüche	358	411
Zerlegung aus einem gegebenen einfachen Factor des Nenners	361	414
Zerlegung wenn der Nenner eine Potenz iſt	365	417
Wenn er ein Product aus einer Potenz in einen andern Factor iſt	368	422
Werthe von Functionen die unter gewiſſen Umſtänden unbeſtimmt ſcheinen	372	428
Integrirung der rationalen Differentiale	385	437
Erfindung der dreytheilichen Factore	389	445
Anwendung auf Integrationen	397	454
Algebraiſche und tranſcendentiſche Integrale	398	463
	VI.	
Integrirung der Differentiale die eine zweytheilige Irrationalgröſſe enthalten	399	464
Ein Integral auf ein andres zu bringen	400	467

	§	Seite
Integrirung der Differentialgleichungen wo die veränderlichen Grössen vermengt sind		479
Separare indeterminatas	405	
Wenn die Integralgleichung algebraisch oder transcendentisch wird?	407	480
Die veränderlichen Grössen von einander zu sondern, wenn nicht y selbst vorkömmt, nur erste Differentiale	411	481
Differentialgleichung durch Quadratur construiren	V	484
Eine allgemeine Differentialgleichung in welcher die veränderlichen Grössen von einander gesondert werden	412	484
	IX	488
Integration gleichartiger Gleichungen	413	488
Umstände unter denen sich eine Gleichung in eine gleichartige verwandeln läßt	417	494
Integrirung vermittelst des newtonischen Parallelogramms	419	496
Nicolaus Bernoullis Methode	465	549
Differentiale für gewisse Werthe der veränderlichen Grösse	471	548
Ueber Differentiale der Functionen die zwo veränderliche Grössen enthalten	477	551
Merkmahl ob eine Differentialgrösse aus Differentiation einer endlichen entstanden seyn kann	486	557
Von Differentialen der Functionen die drey veränderliche Grössen enthalten	487	558

Anwen-

	§	Seite
Anwendung auf Differentialgleichungen	494	563
Die Integralgleichung zu finden	498	568
Veränderlicher Factor	509	570
*Differentielles partielles	503	573
*Integrale particulare	504	575
*Constans infinita	IV	576
Fernere Anwendung der Rechn. d. Un. auf krumme Linien.		
Quadraturen und Rectificationen wenn die Ordinaten aus einem Puncte gehn	505	579
Fläche der archimedischen und a. Spiralen	506	584
Differential des Bogens	509	586
Logarithmische Spirale	510	587
*Construction derselben	VI	589
Krümmungswinkel	511	595
Spitze, Rückkehrpunct zwo Arten	516	596
Krümmungswinkel zu finden	518	597
Rückkehrpunct zu finden	520	603
Ob die krumme Linie hohl oder erhaben ist	521	605
Unendlich grosser Krümmungswinkel	528	612
Krümmung bey Ordinaten aus einem Puncte	530	613
Wendungspunct	532	615
Für parallele Ordinaten	533	616
Spitze von der zweyten Art	VIIII	619
Für Ord. a. einem P.	536	
Wenn bey parallelen Ordinaten für $dy = o$ ein Wendungspunct ist?	537	621
Krümmungskreis	538	622
Halbmesser der Krümmung	543	623
Fragen die mit dem Krümmungskreise zusammenhängen	552	636

	§	Seite
Krümmungshalbmesser bey Ordinaten aus einem Puncte	555	638
Für die Radlinie	557	639
Rectification, Gleichungen und Quadratur der Radlinie	559	642
Algebraische Räume, wo die Quadratur allgemein transcendentisch ist. Monden	VIIII X	645
Wie Aenderung der Krümmung gemessen wird	560	645
Evolution	563	647
Jeder algebraischen Linie Evolute ist algebraisch	570	651
Wenn sich die Evolute algebraisch rectificiren läßt	571	652
Linien zu finden die aus Abwickelung entstehn	575	653
Quadraturen und Rectificationen lassen sich durch Abwickelung finden	577	656
Krumme Linien zu finden die ihren Evoluten ähnlich sind	578	658
Ordentlich	589	663
Logarithmische Spirale	VII	666
Verkehrt	590	668
Verkehrt ähnlich und gleich, Cycloide	VIIII	671
Verkehrt ähnlich und nicht gleich	XIII	674
Geschichte dieser Entdeckungen	592	676
Gleichung zwischen Ordinaten aus einem Puncte und Perpendikel auf die Tangente	593	677
Halbmesser der Krümmung durch Ordinate u. Perpendikel	596	679
Für Kreis und Punct	597	681

Aus

	§	Seite
Aus der Gleichung zwiſchen Ordinate und Perpendikel eine zwiſchen Ordinate und Winkel	598	680
Hyperboliſche Spirale	599	681
Aus der Gleichung zwiſchen Ordinate und Winkel eine zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten	601	687
Differential der Fläche eines runden Körpers	606	691
Für runde Körper die von Kegelſchnitten beſchrieben werden	607	692
*Dieſe Differentiale zur Integration bequemer ausgedruckt und integrirt	608	693
*Eine Parabel dreht ſich um ihre Axe	I. Satz	695
*Sie dreht ſich um Tangente am Scheitel	II. S.	696
*Eine Ellipſe dreht ſich um ihre groſſe Axe	III.	698
*Um ihre kleine Axe	IV.	701
*Fläche der Erde als eines eingedruckten Sphäroids in Quadratmeilen	V.	706
*Eine Hyperbel dreht ſich um ihre groſſe Axe	VI.	711
*Um ihre kleine Axe	VII.	714
*Geſchichte der Unterſuchungen	VIII.	716
Innhalt eines runden Körpers	609	718
Von Kegelſchnitten	610	719
Verhältniß von elliptiſchen Sphäroid, Kugel und umſchriebenen Cylinder	V	720
Konoiden unendlicher Parabeln	611	721
Runder Körper von der Kiſſoide	612	722
Unendlich lange Körper, endlich oder unendlich	614	723

Hyper-

	§	Seite
Hyperbel dreht sich um die Asymptote	615	724
Hufförmige Abschnitte cylindrischer Körper	617	727
Körperlicher Innhalt	618	
Fläche	621	731

Abschnitte runder Körper.

Gestalt des Schnittes	626	733
Der beschreibenden Linie ähnlich	627	734
Innhalt eines solchen Abschnittes zwischen parallelen Ebenen	629	735
Von der Fläche des ungleichseitigen Kegels	630	738

Schwerpunct durch Integralrechnung zu finden.

Bey einer gegebenen ebenen Figur	1	740
Halbe Parabel	2	741
Dreyeck	3	742
Ganze Parabel	4	743
Kreisabschnitt	5	743
Kreisausschnitt	7	744
Schwere Kreisscheibe, mittlerer Halbmesser wenn sie sich dreht	9	745
Bogen einer krummen Linie	11	747
Runder Körper	14	748
Pyramide, kegelartiger Körper	17	749
*Fläche oder Körper, ein Product aus dem Wege des Schwerpuncts in die beschreibende Gröſſe	21	751
*Pappus, Guldin, Wolf	22	752
Schriftsteller vom Schwerpuncte	24	753

*Alles folgende ist bey der dritten Ausgabe hinzugekommen.

Variationsrechnung mit ihrer Anwendung.	§	Seite
Variirte krumme Linie	3	760
Variationen und Differenzen. Die erſten, unendlich klein	4	760
Die Linie welche variirt iſt ganz unbeſtimmt	5	
Unterſchied der Variationen ſo groß als Variation des Unterſchiedes	7	762
Variation vom Differentiale ſo groß als Differential der Variation	12	763
Variation eines Products	18	764
Eines Quotienten	19	765
Der Quotienten der Differentiale von Ordinate und Abſciſſe	21	
Die Abſciſſe ſoll nicht variiren	25	767
Variation einer Function von x, y, und derſelben Differentialen	29	768
Variationen von Integralen	31	770
Einfaches und verwickeltes Integral	32	773
	33	
Summe von Variationen	34	
Variation des Integrals ſo groß als Integral der Variation	35	
Variation eines einfachen Integrals	38	775
So dargeſtellt daß keine Differentiale der Variationen der Coordinaten nach einem Summationszeichen ſtehn	39	778

	§	Seite
Was folgt wenn die Variationen sich wie die Differentiale verhalten	X	780
Durch drey Coordinaten ist eine krumme Fläche gegeben, auch eine Linie auf ihr, Unterschied dieser beyden Vorstellungen.		
Doppelte Relation	45	784
Variationen als Differentiale betrachtet	47	789
Erweiterung der Untersuchungen über Gröſſte und Kleinste	I	788
Euler Meth. inu. lin. curu.	3	789
Fragen von Gröſſten und Kleinsten.		
Erste Gattung, $N = o$;	I	791
Ein Integral das keinen gröſſten oder kleinsten Werth hat	I. Ex.	792
Integral das, ein Gröſſtes oder Kleinstes gesetzt, eine Parabel giebt	II. Ex.	792
Ob es Gröſſtes oder Kleinstes ist, aus einer einzigen Probe entschieden	8	794
Wenn Variationsr. nöthig ist, muß das Integral weder algebraisch noch transcendentisch seyn, sondern eine functio indeterminata	9	794
Zweyte Gattung $N = \frac{dP}{dx}$	I	795
In welchem Falle sich eine algebraische Gleichung findet	5	796
$M = o$	8	796
$N = o$	11	797

M =

	§	Seite
M = N	13	797
Wenn jede Linie der Frage genug thut?	17	798
Raum durch kürzeste krumme Linie einzuschliessen.		
I. Aufgabe	I	799
Die Fläche läßt sich nicht nach Gefallen annehmen	15	803
Umfang eines Kreises die kürzeste Linie welche eine Fläche von gegebner Grösse einschliesst	20	804
II Aufgabe	I	805
Die Brachystochrone	I	811
Geschichte	40	825
Runder Körper welcher den kleinsten Wiederstand leidet	I	829
Geschichte	7	831
Kürzeste Linie auf einer gegebenen krummen Fläche	I	834
Geschichte	42	842
Gröfstes Vieleck in gegebener Menge gegebener geraden Linien	I	843
Was die Analysis eigentlich hie lehrt	42	854
Zur Geschichte der Variationsrechnung.		
Hugens Lichtwellen	I	857
Krumme Linie die eine Reihe Cykloiden senkrecht durchschneidet	2	858
Trajectorien	4	860
Variirende logarithmische Linien	5	860
Differentiatio de curua in curuam	II	863

	§	Seite
Zwist zwischen Jac. und Joh. Bernoulli	12	864
Jac. Bern. solutio probl. isoperimetrici	14	865
Joh. Bern. Methode	17	867
Fontaine brauchte zuerst Variationsrechnung	19	869
Le Grange	20	870
Leonh. Euler	21	871
Frisius	22	873
Ferronius	23	874
Analytische Rechnungen sollten durch geometrische Betrachtung der Figuren erläutert werden.	25	875

Gründe

Gründe der Lehre vom Unendlichen.

1. Erkl. Eine Gröſſe wächſt unendlich (crescit in infinitum) wenn ſie gröſſer werden kann, als jede endliche Gröſſe, die ſich angeben, oder mit beſtimmten und gegebenen Gröſſen von ihrer Art vergleichen läſſt, (quantitas in infinitum crescens, dabili aut adsignabili quauis fieri potest maior.

Dergleichen iſt m Alg. (348).

2. Anm. Eine Gröſſe kann ohne Ende, (sine fine) wachſen, ohne unendlich zu werden, wie die Summe der Glieder der Reihen Alg. (108). Sie kann nähmlich immer weniger und weniger wachſen, oder immer geringere und geringere Vermehrungen bekommen, die ohne Ende hinzugeſetzt doch eine gewiſſe beſtimmte Gränze nie erreichen oder überſteigen.

3. Zus. Bekömmt eine Grösse, ohne Aufhören immer gleiche, oder immer grössere Vermehrungen, so wächst sie unendlich.

4. Zus. Eigentlich kann man nicht sagen: eine Grösse ist unendlich groß. Jede Grösse, die ist, lässt sich angeben. Wenn man aber diesen Ausdruck braucht, so stellt man sich gleichsam eine Gränze vor, der sich die Grösse durch die beständige Vermehrung (1) immer nähert, und nimmt diese Gränze statt der Grösse in einem Zustande, den man für ihren letzten ansieht, ob es gleich wiederum keinen solchen letzten giebt.

So wird die Summe Alg. 108. genommen.

5. Erkl. Kann eine Grösse kleiner werden, als jede die sich angeben lässt, so nimmt sie unendlich ab oder verschwindet (euanescit) und da sagt man: sie werde unendlich klein.

Gränze des Abnehmens lässt sich hie keine andre denken als: Nichts. Eine Grösse die unendlich klein wird kann also der o so nahe kommen als man will.

Wie eines Bogens der von Nichts bis an den Quadranten wächst Cosinus (trigon. 3. Erkl. 3. Zus.).

Auch so das eingebildete letzte Glied Alg. 107.

Man betrachtet hie das Abnehmen nur bis *auf Nichts, bis die* Grösse nicht mehr vorhanden

den ist, nicht über Nichts hinaus daß sie verneint würde (Arithm. I. C. 90.) denn da hätte man wiederum Grösse, nur der vorigen entgegengesetzt, und diese Grösse wüchse immer.

Der hiesigen Soc. d. W. habe ich 1759. einen Aufsatz de vera infiniti notione vorgelegt. Er findet sich in Dissertationes math. et phys. quas S. R. Sc. Gott. annis 1756. 1766. exhibuit Abrah. Gotth. Kaestner. Altenb. 1771. p. 35. Die Abhandlung de lege continui in natura, das p. 142. enthält auch unterschiednes die Lehre vom Unendlichen betreffend.

6. Zus. Wenn $u = \frac{1}{x}$ oder $x = \frac{1}{u}$ und u unendlich wächst, so nimmt x unendlich ab.

7. Erkl. Eine Grösse nähert sich einem Werthe unendlich, wenn ihr Unterschied von diesem Werthe kleiner als jede Grösse werden kann, die sich angeben lässt. Der Werth heißt alsdenn ihre Gränze (4). So heisst auch eine Verhältniß, der sich eine andere unendlich nähert, die Gränze dieser andern.

8. Zus. Wenn $y = e + z$ sich dem Werthe e unendlich nähert, so kann für y jeder Werth gesetzt werden, der zwischen e und $e + z$ fällt. Man darf also z unendlich abnehmen lassen, und die Gränze die man statt y brauchen kann, ist e.

9. Aufg. Wenn u; eine Grösse, die unendlich wächst, bedeutet und $au + b = z$,

die Gränze, der sich z unendlich nähert, zu finden.

Aufl. $\frac{au+b}{au} = 1 + \frac{b}{au}$; Wenn nun u unendlich wächst, so nimmt $\frac{b}{au}$ unendlich ab, und $1 + \frac{b}{au}$ nähert sich unendlich dem Werthe 1; Aber $\frac{au+b}{au} = \frac{z}{au}$. Wenn also u unendlich wächst so nähert sich $\frac{z}{au}$ unendlich dem Werthe 1; das ist z nähert sich unendlich dem Werthe au.

Behauptete jemand $\frac{z}{au}$ müsste von 1 allemahl wenigstens um e eine Grösse die sich angeben liesse, unterschieden seyn; so daß nie $\frac{z}{au} < 1 + e$ würde, so könnte $1 + \frac{b}{au}$ nie kleiner als $1 + e$ werden; das ist $\frac{b}{au}$ nie kleiner als e; Wider die Voraussetzung daß u so groß als man will, werden kann, wodurch gewiß $\frac{b}{au}$ kleiner als *jede Grösse die sich* angeben lässt wird.

Also

Alſo iſt 1 hier eine ſolche Gränze, der ſich $\frac{z}{au}$ unendlich nähert, und die man wie in (4) für erreicht anſieht, wenn man u unendlich nennt.

Dieſes pflegt man ſo auszudrücken:

Wenn u unendlich wird, ſo verſchwindet in Vergleichung mit dem Theile, der u als einen Factor enthält, alles andere, worinnen u nicht als ein Factor befindlich iſt, alſo iſt für $u = \infty$ (das Zeichen des unendlichen) $z = a. \infty$.

10. Zuſ. Wenn n eine kleinere bejahte Gröſſe als m iſt, und $z = au^m + bu^{m-n}$, ſo iſt $\frac{z}{au^m} = 1 + \frac{b}{au^n}$ welches ſo nahe an 1 kommen kann als man will; wenn man u ſo groß nehmen darf als man will; wenn alſo u unendlich wächſt, ſo nähert ſich wiederum $\frac{z}{au^m}$ unendlich der Gränze 1, oder z dem Werthe au^m; oder wenn eine Gröſſe aus verſchiedenen Theilen beſteht, deren jeder eine andere Potenz von u als einen Factor enthält, ſo verſchwinden für $u = \infty$ alle Theile, die niedrigere Potenzen enthalten, in Vergleichung mit den höchſten.

Man trägt den Beweiß dieſes Satzes gewöhnlich ſo vor: $au^m : bu^{m-n} = au^n : b$ wo u ſo groß iſt, daß das zweyte Glied in Vergleichung des erſten für nichts zu achten iſt.

11. Zuſ. $y = au^m$ und $t = bu^{m-n}$ können beyde alle Gränzen überſteigen, d. i. unendlich werden, und doch wird y in Vergleichung mit t unendlich. Es giebt alſo unendlich groſſe Gröſſen von verſchiedenen Ordnungen; da man y von einer höhern Ordnung heiſſt, in Vergleichung mit welcher, die andere t verſchwindet. Ueberhaupt heiſſt hier y ein Unendlich groſſes von der Ordnung m, es mag nun m ein bejahter Bruch oder eine ganze bejahte Zahl ſeyn.

Wenn c der Parameter einer Parabel und (Alg. 349.) $y = c^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}$ iſt, ſo wird y, die Ordinate der Parabel ein unendlich Groſſes von der Ordnung $\frac{1}{2}$ wenn die Abſciſſe u ein unendlich Groſſes von der Ordnung 1 wird. Die Abſciſſe wird alſo unendlich mahl gröſſer als ihre Ordinate, denn es iſt $y : u = \sqrt{cu} : u = \sqrt{c} : \sqrt{u}$ wie was Endliches zu der Quadratwurzel von was Unendlichem, welche ohne Zweifel auch unendlich iſt. Die Ordinate iſt nähmlich die mittlere Proportionallinie zwiſchen dem Parameter und der Abſciſſe; alſo allemahl kleiner als die Abſciſſe, wenn die Abſciſſe gröſſer als der Parameter iſt, und folglich ſehr vielmahl kleiner als die Abſciſſe, wenn die Abſciſſe ſehr vielmahl gröſſer als der Parameter iſt.

Auch

Auch ist $\frac{k}{u^m} : \frac{l}{u^{m+n}} = k.u^n : l$ oder der letzte dieser beyden Quotienten verschwindet in Vergleichung mit dem ersten, wenn u unendlich wird. Er nimmt nähmlich schneller ab als der erste, weil die Grösse, die unendlich wächst, in seinem Divisor auf eine höhere Potenz erhoben ist. Die beyden Quotienten lassen sich auch (nach 5) so ausdrücken, $k.x^m$ und $l.x^{m+n}$ deren Verhältniß $= k : l.x^n$ ist, wo das letzte Glied verschwindet, wenn x unendlich abnimmt, und also eben den vorigen Schluß giebt. Also hat man Unendlich kleine von verschiedenen Ordnungen, da die höhere in Vergleichung mit der niedrigen verschwindet, wie hier der letzte Quotient in Vergleichung mit dem ersten.

Wenn in der Parabel $yy = cx$ die Ordinate y unendlich klein von der ersten Ordnung wird, so wird $x = \frac{yy}{c}$ unendlich klein von der zweyten. Weil sich nähmlich die Abscisse wie das Quadrat der Ordinate verhält, so nimmt die Abscisse viel schneller ab als die Ordinate, wenn die Ordinate klein ist, weil das Quadrat eines eigentlichen Bruches kleiner als der Bruch selbst ist. Gegentheils wenn x unendlich klein von der Ordnung 1 ist, so ist y unendlich klein von der Ordnung $\frac{1}{2}$ oder $= \infty^{\frac{1}{2}}$.

Wenn die Abſciſſe eines Kreiſes, deſſen Durchmeſſer $= 2r$ iſt, x, die Ordinate y heiſſt, ſo iſt die Ordinate $y = \sqrt{(2rx - xx)}$ (Alg. 324.) welche ſich dem Werthe $\sqrt{2rx}$ unendlich nähert, wenn x unendlich abnimmt, weil $2rx - xx = (2r - x).x$ welches Product ſich unter dieſen Umſtänden dem Werthe $2rx$ unendlich nähert. Wird alſo x ein unendlich kleines der erſten Ordnung, ſo wird $y = \sqrt{2rx}$ ein unendlich kleines der Ordnung $\frac{1}{2}$ und bleibt alſo unendlich gröſſer als x weil $\sqrt{2rx} : x = \sqrt{2r} : \sqrt{x}$ wo das letzte Glied in Vergleichung mit dem erſten verſchwindet. Die Abſciſſe nimmt hier aus eben der vorigen Urſache ſchneller ab als die Ordinate.

12. Zuſ. t; y, ſind ein Paar Coordinaten einer krummen Linie zwiſchen denen die Gleichung $t^m = \frac{a^{m+n}}{y^n}$; wo m, n, ganze bejahte Zahlen bedeuten.

Alſo $t = \frac{a^{1+n:m}}{y^{n:m}}$. Da nimmt t immer ab, wenn y wächſt, und wenn y unendlich groß wird, ſo wird t unendlich klein.

Nun $t.y = a^{1+n:m}.y^{1-n:m}$ Wenn $n = m$, ſo iſt $t.y = a^2$ eine endliche unveränderliche Gröſſe. Die Gleichung gilt nähmlich für die koniſche Hyperbel, (Anal. endl. Gr. 412).

Wenn

Wenn n kleiner ist als m; so wächst der beyden Coordinaten Product immer wenn y wächst, und wird unendlich wenn y unendlich wird.

Ist aber n grösser als m, so lässt sich dieses Product so ausdrucken: $\frac{a^{1+n:m}}{y^{n:m-1}}$ da wächst der Divisor wenn y wächst, das Product nimmt also ab, und wird unendlich klein wenn y unendlich wird.

Es sey $t^3 = \frac{a^4}{y}$ also $m = 3; n = 1; t.y = a4:3.$ $y^{2:3}$ wird unendlich groß, von der Ordnung $\frac{2}{3}$.

Es sey $t^2 = \frac{a^5}{y^3}$; $m = 2; n = 3$ t. $y = \frac{a5:2}{y^{1:2}}$ wird unendlich klein von der Ordnung $\frac{1}{2}$.

Wenn in einem Producte ein Factor immer wächst, der andre immer abnimmt, so muß man auf angezeigte Art untersuchen, was das Product wird, wenn der eine unendlich wird. Manchmahl geht es auch an, dieses Product durch ein anderes auszudrucken das ihm immer gleich ist und der eine Factor nicht verschwindet wenn der andre unendlich wird. So ist (Trig. 4. Erkl. 3. Zus) cos λ. tang λ = 1. sin λ. Wenn in dem Producte linker Hand, die Tangente unendlich wird, verschwindet der Cosinus,

das Product aber wird das Quadrat des Sinustotus.

Das heißt (7) wenn ein Winkel von 0 bis 90 Gr. wächst, so nähert sich das Product aus seiner Tangente in den Cosinus, beständig dem Quadrate des Sinustotus, und kömmt solchem so nah als man will, wenn der Winkel so nah man will an den rechten kömmt.

In Anal. endl. Gr. 422. X. suchte ich aus eben dem Grunde einen andern Ausdruck für das Product g. sin γ.

Gründe der Differentialrechnung.

13. Erkl. Z sey durch z und beständige Grössen gegeben, also eine Function von z, Z + E sey eben die Function von z + e, oder Z + E komme heraus, wenn man z + e statt z in die Gleichung zwischen Z und z setzt. Wenn man nun e unendlich vermindert (5) so heisst man die Gränze der sich die Verhältniß E : e unendlich nähert, die Verhältniß der Differentiale von Z und z; auch die unendlich kleinen e; E; die Differentiale von z; Z.

Z; Z + E; sind zwey nach einander folgende Glieder einer Hauptreihe, und E ist ihr Unterschied (Alg. 724.) dieser kann unendlich abnehmen, wenn e unendlich abnimmt, und *läßt sich also selbst, für diese unendliche Abnahme des e nicht bestimmen.* Wenn aber seine

Ver-

Verhältniß E: e bey einer unendlichen Abnahme des e noch endlich bleibt, so läßt sich diese noch angeben.

14. Zus. Es sey Z = PM 1 Fig.; z = AP; Z + E = QN; z + e = AQ und MS mit AP parallel, so ist die Verhältniß E: e = NS: SM und man kann sich also vorstellen, die Ordinate QN nähere sich der PM ohne Ende, da denn die Verhältniß NS: PQ sich der Verhältniß der Differentialien der Abscisse und der Ordinate ohne Ende nähert. Wenn man also setzt mR: Pp sey die Verhältniß, der sich die NS: PQ ohne Ende nähert, oder wenn man Pp und mR unendlich klein annimmt, so sind solches die Differentialien der Abscisse und Ordinate.

Exempel. CMN sey eine Parabel, der Anfang ihrer Abscissen C, falle in A daß die Abscisse CP oder AP = z; die Ordinate PM = Z; der Parameter = b; also $Z^2 = b.z$; und $(Z + E)^2 = b.(z + e)$ folglich $(Z + E)^2 - Z^2 = b.z + b.e - b.z$ oder $2.E.Z + E^2 = b.e$, wenn die Ordinate PM = Z bleibt, und PQ = e immer abnimmt, so nimmt auch NS = E immer ab. Nun ist $\frac{E}{e} = \frac{b}{2.Z + E}$

In dem Ausdrucke des Quotientens rechter Hand, ist der Dividend unveränderlich, der Divisor übertrifft 2. Z immer um was geringeres, je mehr E abnimmt, der wirklichen Unterschiede

E, e,

E, e, Quotient ist allemahl kleiner als $\frac{b}{2Z}$, kömmt aber diesem Werthe so nah als man will, wenn E bis auf Nichts abnehmen kann. Kann man nun QN so nah als man will an PM rücken lassen, so kömmt der Quotient $\frac{E}{e}$ dem Werthe $\frac{b}{2Z}$ so nah als man will, und diese Gränze welche durch die endlichen Grössen b, 2. Z angegeben ist, heisst der Quotient der Differentiale.

15 Aufg. **Wenn $a^{n-1}. Z = z^n$ die Verhältniß der Differentialien zu finden.**

Aufl. Hier ist $a^{n-1}(Z + E) = (z + e)^n$; also (Alg. 141.).

$$a^{n-1}. \frac{E}{e} = n. z^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2} e. z^{n-2} + \frac{n.(n-1).}{1.} \frac{n-2}{2.} \frac{}{3} e^2 z^{n-3} \ldots + e^{n-1}.$$

Wenn nun in der Reihe rechter Hand z einen gewissen Werth behält, so kann sich doch e ohne Ende vermindern, und bis auf nichts abnehmen; dadurch nähert sich der Werth dieser Reihe ohne Ende der Gränze $n z^{n-1}$ und folglich ist die Verhältniß der Differentialien $\frac{E}{e} = \frac{n z^{n-1}}{a^{n-1}}$; oder wenn $a = 1$; und e das Differential von z heisst, das als unendlich klein angesehen wird, so

so ist das zugehörige Differential von Z; oder $E = n.e.z^{n-1}$.

16. Zus. Diese Rechnung setzt zum voraus, daß z eine gewisse Grösse hat, e anfangs endlich ist, und bis auf Nichts vermindert wird. Wäre aber $z = 0$, so wäre offenbahr $E = e^n$ was auch e für einen Werth hätte. Diese Erinnerung ist bey einigen, obwohl seltener vorkommenden Fällen nöthig, denn ordentlich ist nicht $z = 0$. S. Jac. Bernoulli Op. n. 103. art. 22. Eul. Inst. Calc. diff. P. II. c. 14.

Es sey $a.Z = z^2$; Ein Quadrat dessen veränderliche Seite $= z$, immer so groß als ein Rechteck dessen unveränderliche Höhe $= a$; veränderliche Grundlinie $= Z$; so kömmt der Quotient der Aenderungen bey der veränderlichen Linie $\frac{E}{e} = \frac{2.z}{a} + \frac{e}{a}$. Hat die Seite des Quadrats irgend eine endliche Grösse, also auch die Grundlinie des Rechtecks, so kann man e allemahl so klein nehmen als man will und da kömmt $\frac{E}{e}$ dem Werthe $\frac{2.z}{a}$ so nah als man will, weil gegen diesen Werth, $\frac{e}{a}$ so klein werden kann als man will.

Wäre aber $z = 0$; folglich auch Z, so verwandelte sich $a.E = 2.e.z + e^2$ in $a.E = e^2$,

das gäbe $\frac{E}{e} = \frac{e}{a}$. Nähmlich wenn ein Quadrat entstehen soll, da zuvor keins gewesen ist, so sind die nach einander folgenden Seiten des Quadrats nicht z; z + e; sondern o; o + e; und die nach einander folgenden Grundlinien o; E; da werden mit einander nicht Aenderungen der beyden Linien verglichen, sondern E entstehende Grundlinie, mit e entstehender Seite.

17. Anm. Wenn in der Reihe

$$E = nez^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}e^2z^{n-2} + \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}e^3Z^{n-3}\ldots$$

e eine unendlich kleine Grösse bedeutet, so verschwindet jedes folgendes Glied in Vergleichung mit dem nächstvorhergehenden. Denn das erste verhält sich zum zweyten wie $z : \frac{(n-1).}{1.2}e$ das zweyte zum dritten wie $z : \frac{n-2}{3}e$ u. s. w. wo jeder Verhältniß letztes Glied, weil es e als einen Factor enthält, in Vergleichung mit dem endlichen z; für nichts zu achten ist. Also wird $E = nez^{n-1}$. So trägt man diesen Beweis insgemein vor. Man mag nun die unendlich kleinen Grössen als was wirkliches, als eine Erdichtung, oder mit Herrn Eulern Inst. Calc. diff. Cap. III. als o ansehen, so wird doch die Auflösung (15) ihre Richtigkeit behalten. Eigentlich sucht man bloß die Gränze der Verhältniß E : e in endlichen Grössen $nz^{n-1} : 1$ ausgedruckt; Nimmt man nun an, e bedeute was Unendlich kleines, so wird E eben dergleichen bedeuten, und man kann sich also ein paar unendlich kleine Grössen vorstellen, welche diese Verhält-

hältniß hätten, folglich vermittelst der Gleichung $E = nez^{n-s}$ eine durch die andere ausdrucken. Diese Gleichung ist in der völligen Schärfe wahr, weil es in völliger Schärfe wahr ist, daß $nz^{n-s} : 1$ die Gränze der Verhältniß $E : e$ ist. Aber der Beweis im Anfange dieser Anmerkung könnte den Verdacht erregen, als wäre diese Gleichung nur beynahe wahr, weil man sagt, die folgenden Glieder der Reihe würden als unendlich klein in Vergleichung mit den vorhergehenden weggelassen. Wenn man den Begriff vom unendlich kleinen, den ich (5) gegeben habe, annimmt, wird dieser Verdacht verschwinden. Man kann die Verhältniß $E : e$ der $nz^{n-1} : 1$ so sehr nähern als man will, so daß sich kein Unterschied zwischen beyden angeben lässt. Grössen, zwischen denen sich kein Unterschied angeben lässt, sind ohne Zweifel gleich; und wenn es also in völliger Schärfe wahr ist, daß $E : e = nz^{n-1} : 1$ so ist in eben der Schärfe $E = nez^{n-1}$. Es verhält sich hier eben so wie bey der Summe Alg. 108.

18. Willk. Satz. Das Differential einer Grösse bezeichne man durch den Buchstaben d vor sie gesetzt. So ist $E = dZ$; $e = dz$; und in (15) $dZ = nz^{n-1}dz$. Man muß bemerken, daß d hier nicht etwa einen Factor bedeutet, sondern mit der Grösse, die nach ihm folgt, zusammen ein einziges Zeichen ausmacht. Auch schreibt man, Verwirrung zu vermeiden, in jedem Producte das Differential gern zuletzt; z. E. a. dx statt dx. a.

19. Erkl. Wenn eine Grösse Z eine Function von z ist, so heisst die Verhältniß der Differentiale (13) finden; Z differentiiren. Und aus der Gleichung zwischen den endlichen Grössen Z und z eine zwischen ihren Differentialen

len finden, heißt die Differentialgleichung zwiſchen Z und z finden.

20. Aufg. Eine Gleichung enthält auf einer Seite die erſte Potenz von Z allein auf der andern dieſer Gröſſe Werth in Potenzen von z mit Coefficienten angegeben. Der Potenzen-Exponenten ſind ganze bejahte Zahlen. Man ſucht die Differentialgleichung.

Aufl. I. Ein Exempel ſey

$$Z = A + B.z + C.z^2 + D.z^3$$

So iſt

$$Z + E = A + B.(z+e) + C.(z+e)^2 + D.(z+e)^3$$

alſo

$$E = \left.\begin{matrix} B. \\ +2.C.z \\ +3.D.z^2 \end{matrix}\right\} e + \left.\begin{matrix} C \\ +3.D.z \end{matrix}\right\} e^2 + D.e^3$$

II. Folglich

$$E = \left(\left.\begin{matrix} B \\ +2.C.z \\ +3.D.z^2 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} C \\ +3.D.z \end{matrix}\right\} e + D.e^2\right).e.$$

III) Hie iſt in e ein Factor multiplicirt der unveränderliche Gröſſen, z, und e enthält. Man nenne ihn = S.

IV) So iſt $\frac{E}{e} = S$.

V) Im Factor S, ſetze man e = o, ſo verwandelt er ſich in $P = B + 2.C.z + 3.D.z^2$.

VI)

VI) Nun schreibe man linker Hand in (IV), dZ statt E; dz statt e; So ist $\frac{dZ}{dz} = P$, oder $dZ = P.\,dz$ die Differentialgleichung.

VII) Dieses Exempel zeigt das allgemeine Verfahren. Die Reihe für Z in (I) kann mehr Glieder haben, und dann bekömmt auch die Reihe für E mehr Glieder, in denen die Potenzen von e, nach den Exponenten 1, 2, 3, 4... steigen; Wenn man also den gemeinschaftlichen Factor e absondert und damit auf beyden Seiten dividirt so ist wie in (IV) S allemahl eine Reihe deren erstes Glied kein e enthält, jedes der folgenden eine Potenz von e, die Potenzen steigen immer; Setzt man nun $e = o$, so bleibt von S blos das erste Glied welches nur Potenzen von z und unveränderliche Grössen enthält, und das ist P wie in (V) So ist $\frac{dZ}{dz}$ durch dieses P gegeben.

VIII) Befindet sich in der Reihe für Z, ein Glied $= N.\,z^n$ so gibt dieses in der Reihe für E ein Glied $= n.\,N.\,z^{n-1}.e$, und das kömmt in das erste Glied der Reihe für E. Dieses erste Glied enthält also soviel Theile, soviel Glieder die Reihe für Z hat, folglich enthält P auch soviel Theile.

IX) Wäre die Reihe für Z unendlich, so müsste, wenn sie zur Rechnung dienen sollte, z ein ei-

gentlicher Bruch seyn, dessen höhere Potenzen man wegliesse und doch den Werth von Z der Wahrheit nahe fände. Eben so liesse man in P die höheren Potenzen von z weg, den Werth $\frac{dZ}{dz}$ der Wahrheit nahe zu haben.

X) Nähme man in (II) ein z, für das $B + 2.C.z + 3.D.z^2 = 0$; so wäre $\frac{E}{e} = C + 3.D.z + D.e$ wenn also da e und E zusammen verschwinden, so wäre $\frac{dZ}{dz} = C + 3.Dz$ für diesen besondern Werth von z. Das ist hie so was wie die Erinnerung in (16).

XI) Man kann ein ähnliches Verfahren brauchen, wenn auch höhere Potenzen von Z vorhanden sind. Ist in einem Kreise der Halbmesser = 1 und die Abscisse vom Mittelpuncte gerechnet = z so ist der Ordinate Quadrat $Z^2 = 1 - z^2$; Also auch $(Z+E)^2 = 1 - (z+e)^2$ giebt $(2.Z+E).E = -(2.z+e).e$, also $\frac{E}{e} = -\frac{2.(z+e)}{2Z+E}$; Lässt man rechter Hand, e, E; bis auf nichts abnehmen, so kömmt $\frac{dZ}{dz} = -\frac{z}{Z}$.

Das setzt zum Voraus, Abscisse und zugehörige Ordinate sind beyde von endlicher Grösse, daß

daß jede Aenderung in Vergleichung mit ihr verschwinden kann. Wäre aber die Abscisse $= o$ also die Ordinate $= 1$; so könnte diese Abscisse sich nicht so ändern daß ihre Aenderung gegen sie verschwinden könnte, sondern sie selbst wäre nichts gegen jede ihrer Aenderungen; Da käme $\frac{E}{e} = \frac{-e}{2+E}$ oder $E^2 + 2.E = -e^2$ daraus $E = -1 \pm \sqrt{(1-e^2)}$; Nähmlich E wäre der Unterschied zwischen den beyden Ordinaten, deren eine $= 1$ der Abscisse $= o$ gehört, die andre $= \sqrt{(1-e^2)}$ der Abscisse $= e$. Der Unterschied ist doppelt, weil zu jeder Abscisse ein Paar entgegengesetzte sonst gleiche Ordinaten gehören.

XII) So erläutern diese Rechnungen sowohl wie Verhältnisse zwischen verschwindenden Aenderungen angegeben werden, als auch, was statt findet, wenn die Aenderungen nicht in Vergleichung dessen wovon sie Aenderungen sind, verschwinden können.

21. Zus. Wenn eine veränderliche Grösse die Summe oder Differenz einiger Veränderlichen ist, so ist jener ihr Differential die Summe oder Differenz von dieser Differentialen.

Es sey $Z = u + x - y$ also

$$\begin{array}{r} Z + dZ = u + du + x + dx - y - dy \\ \hline dZ = du + dx - dy. \end{array}$$

Ich brauche hie der nächsten Anwendung gemäß, Nahmen und Bezeichnung von Differentialen; es ist aber klar daß der Satz überhaupt gilt: Ist $Z = u + x - y$; und bleibt dieses wahr wie sich auch diese Grössen ändern, so ist die Aenderung von Z allemahl = Aenderung von u + Aenderung von x — Aenderung von y, so groß auch diese Aenderungen seyn mögen.

Eben so ist auch von endlichen Aenderungen wahr was in 22; 23; von Differentialen gesagt wird.

22. Zus. Eine veränderliche Grösse, und die Summe oder der Unterschied dieser veränderlichen Grösse und einer beständigen, haben einerley Differential.

$$\begin{array}{r} Z = u + a \\ Z + dZ = u + du + a \\ \hline dZ = du \end{array}$$

In diesem Verstande sagt man, es sey $da = o$ wenn man nähmlich mit a hätte wie mit x oder y in 21 verfahren wollen.

23. Zus. Wenn die Gleichung zwischen zwo veränderlichen Grössen so beschaffen ist, daß eine abnimmt, indem die andere wächst, so bekommen ihre Differentiale entgegengesetzte Zeichen.

x +

$$x + y = a$$
$$x + dx + y + dy = a$$
$$dx + dy = 0 \text{ oder } dx = -dy$$

Ein verneintes Differential einer bejahten Gröſſe zeigt alſo ein Abnehmen an, oder es zeigt an, daß dieſe bejahte Gröſſe abnimmt, indem eine andere bejahte zunimmt. Aber eine verneinte Gröſſe nimmt ab, oder wird eine kleinere verneinte, wenn ihr Differential bejaht iſt, ſo wie ſie zunimmt, wenn es verneint iſt. Die gewöhnlichen Regeln der Subtraction zeigen dieſes deutlich.

24. Aufg. Das Differential eines Productes $xy = Z$ zu finden, oder ein Gleichung zwiſchen dZ und $x; y; dx; dy;$ zu finden.

Aufl. $4Z = (x+y)^2 - (x-y)^2$; alſo iſt $4\,dZ =$ dem Differentiale von $(x+y)^2$ weniger dem Differentiale von $(x-y)^2$ gleich (21).

Es ſey $x + y = u$; ſo iſt $dx + dy = du$ (21) und $(x+y)^2 = u^2$; und das Differential des Quadrates von $x+y$ ſo groß als $2\,udu$ (aus 18; wenn dorten 2; u; ſtatt n; z; geſetzt wird).

Aber $2\,udu = 2.(x+y).(dx+dy)$.

Es ſey $x - y = v$ ſo iſt $dx - dy = dv$ (21) und $(x-y)^2 = v^2$ und das Differential des Quadrates von $x - y$ ſo groß als $2\,vdv$ (18)

$= 2.(x+y).(dx-dy)$ also $4\,dZ = 2.(x+y).(dx+dy) - 2.(x-y).(dx-dy)$

$$2\,dZ = xdx + ydx + xdy + ydy - xdx + ydx + xdy - ydy$$

$$dZ \text{ oder } d(xy) = ydx + xdy$$

25. I) Ein Beweis nach Art deſſen in (15). Wenn $x.y = Z$; $(x+e).(y+f) = Z+E$ ſo iſt $y.e + x.f + e.f = E$; und

$$1 + \frac{e.f}{y.e + x.f} = \frac{E}{y.e + x.f}$$

In dieſer Rechnung ſind x; y; endliche Gröſſen e, f, ihre Aenderungen, $\frac{e}{x}$; $\frac{f}{y}$ endliche Quotienten, deren jeder aber ſo klein als man will werden kann, wenn e, f, abnimmt, x, y, ungeändert bleibt.

II) Ich ſage: bey dieſem Abnehmen von e, f, läſſt ſich der letzten Gleichung in (I) zweyter Theil linker Hand, ſo klein machen als man will, dadurch kömmt das Ganze was linker Hand ſteht ſo nah als man will an 1; und dieſe 1 iſt die Gränze welcher das was rechter Hand ſteht ſo nahe kommen kann als man will, daß alſo das was rechter Hand ſteht = 1 geſetzt werden kann wenn e, f, alſo auch E bis auf Nichts abnehmen können (4).

III)

III) Man setze $y.e + x.f = w.e$, so ist $y + \frac{x.f}{e} = w$ eine endliche Grösse, durch die endlichen Grössen die linker Hand stehn gegeben.

IV) Die letzte Gleichung in (I) wird also $1 + \frac{f}{w} = \frac{E}{y.e + x.f}$

V) Wenn f, e, beyde abnehmen, ändert sich w, bleibt aber immer eine endliche Grösse weil sie durch x; y; und den Quotienten der beyden Aenderungen gegeben ist.

VI) Läßt man also in (IV) linker Hand f unendlich abnehmen, so wird $\frac{f}{w}$ so klein als man will, und was linker Hand steht, kömmt so nah als man will an 1, folglich auch der Werth dessen was rechter Hand steht (II) der sich auch so hätte ausdrucken lassen $\frac{E}{w.e}$, wo der Dividend die Aenderung von Z ist, der Divisor das Product aus einer endlichen Grösse in die Aenderung von x; und jede der beyden Aenderungen bis auf nichts abnehmen kann.

VII) Setzte man $y.e + x.f = w^*.f$; So käme $1 + \frac{e}{w^*} = \frac{E}{w^*.f}$ der zweyte Theil linker Hand hat zum Divisor die Grösse w^*

welche endlich bleibt wenn auch e bis auf nichts abnimmt. Der Quotient rechter Hand, wenn sein Divisor und sein Dividend bis auf nichts abnehmen, kömmt also so nah man will an 1.

VIII) So verwandelt sich nach (18) die letzte Gleichung (I) in $1 = \frac{dZ}{y.\,dx + x.\,dy}$, eben wie in (25).

IX) Das Product x. y ändert sich um x. dy + y. dx + dx. dy, da ist der dritte Theil unendlich klein gegen jeden der beyden ersten, wird also weggelassen, und die beyden ersten geben das Differential des Products. So steht der Beweis in l' Hospital, Analyse des infiniment petits §. 5. Wolf, El. Analys. P. II. §. 12; und andern Lehrbüchern. Die Absicht meines bisherigen Vortrags war das Weglassen zu rechtfertigen.

X) Nimmt von den beyden veränderlichen Grössen eine ab z. E. y; so ist ihre Aenderung f, verneint. Selbst kann von ihnen beyden eine verneint seyn z. E. x; so ist Z verneint, wären beyde verneint so ist Z bejaht. Das macht nun keine Schwierigkeit wenn man mit entgegengesetzten Grössen zu rechnen weiß.

XI) Unter solchen Umständen aber könnte y. e + x. f = o seyn. Da wäre e. f = E und

1 =

$1 = \frac{E}{e.f}$. Nähme man an dieses fände statt indem die Aenderungen bis auf nichts abnehmen, so hiesse es: $dx.dy = dZ$.

Das ist so was wie bey (16) ist bemerkt worden, und findet nur für einzeln zusammengehörige Werthe von x; y; statt, wird also in der allgemeinen Vorschrift nicht in Betrachtung gezogen.

XII) Aenderungen die gegen die Grössen welche sich ändern verschwinden, nennt man Differentiale; So kann man Aenderungen welche gegen die Grössen die sich ändern sehr klein sind, beynahe als Differentiale ansehn, und eine Differentialformel brauchen, zwischen kleinen Aenderungen, eine Gleichung anzugeben die beynah wahr ist.

XIII) Das läßt sich anwenden zu berechnen wie viel Fehler oder Ungewißheit bey Rechtecken betragen, wenn man bey der Grösse ihrer Seiten gefehlt hat oder ungewiß ist.

Man habe bey einem Rechtecke gefunden: Grundlinie $x = 80$; Höhe $y = 90$, so berechnet man das Rechteck $7200 = Z$; Gesetzt aber die eigentliche Grundlinie wäre $80 + 0{,}04$, die Höhe $90 - 0{,}02$ so wäre $e = +0{,}04$; $f = -0{,}02$ und der Unterschied zwischen dem eigentlichen Rechtecke, und dem gefundnen; $E = y.e + x.f + e.f = 90.0{,}04 -$

80. 0, 02 — 0, 04. 0, 02 = + 3, 6 — 1, 6 — 0, 0008; läßt man den dritten Theil als dx. dy weg, so kömmt E = + 2, und das eigentliche Rechteck sehr beynahe = 7202, in völliger Schärfe = 7201, 9992.

26. Aufg. Die Differentialgleichung für $\frac{x}{y} = v$ oder das Differential eines Quotientens zu finden.

Aufl. I) $x = vy$; also $dx = vdy + ydv$ (24) und dv oder $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{dx - vdy}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$

II) Es sey $\frac{x}{y} = Z$ und $\frac{x+e}{y+f} = Z + E$, daher

$$E = \frac{x+e}{y+f} - \frac{x}{y} = \frac{x.y + y.e - x.y - x.f}{(y+f).y}$$

oder

$$E = \frac{y.e - x.f}{y^2 + y.f} \text{ und } \frac{E}{y.e - x.f} = \frac{1}{y^2 - y.f}.$$

Kann nun f gegen y davon es die Aenderung ist, so klein werden als man will, so kann auch was rechter Hand steht so nah an $\frac{1}{y^2}$ kommen als man will;

Nähm-

Nähmlich, was rechter Hand steht ist

$$= \frac{\frac{1}{y^2}}{1 - \frac{f}{y}}$$ wo $1 - \frac{f}{y}$ so nah an 1 kommen kann als man will.

Folglich kann nun $\frac{E}{y.e - x.f}$ so nah an $\frac{1}{y^2}$ kommen als man will.

Das heisst man kann $\frac{dZ}{y.dx - x.dy} = \frac{1}{y^2}$ setzen oder $dZ = \frac{y.dx - x.dy}{y^2}$.

III) Wenn in einem Bruche Zähler und Nenner sich ändern, giebt E die Aenderung genau, und dZ beynah, wenn man kleine Aenderungen des Zählers und des Nenners statt dx, dy, schreibt.

27. Aufg. Die Differentialgleichung für $\sqrt[n]{u^m} = w$ oder das Differential einer Wurzelgrösse zu finden, wo m; n; ganze bejahte Zahlen sind.

Aufl. $u^m = w^n$ also $mu^{m-1}du = n.w^{n-1}dw$

$(18) = n.u^{\frac{m}{n}(n-1)}dw$ (Arithm. II. 9; 8;)

$= nu$

$= n u^{m-\frac{m}{n}} . dw$; alſo $\frac{m}{n} u^{\frac{m}{n}-1} . du = dw$

$= d\left(u^{\frac{m}{n}}\right)$.

28. Aufg. Die Differentialgleichung für $\frac{1}{v^r} = y$ oder das Differential von $y = v^{-r}$ (Ar. II. 12.) zu finden.

Aufl. $1 = y . v^r$ folglich $0 = y . r v^{r-1} dv + v^r dy$ (23; 24; 18) alſo dy oder $d(v^{-r}) = -ry v^{-1} . dv = -r . v^{-r-1} dv$.

29. Zuſ. Hier kann r einen bejahten Bruch bedeuten (27).

30. Zuſ. Wenn $x^e = t$ ſo iſt $e x^{e-1} dx = dt$; Es mag e eine ganze bejahte Zahl (18) oder ein bejahter Bruch (27) oder eine ganze verneinte Zahl (28) oder ein verneinter Bruch (29) ſeyn. Eine Irrationalzahl läſſt ſich allemahl als ein Bruch betrachten, (Ar. IIII. 49.). Daher gilt dieſes, was auch e für eine Zahl iſt. Es kann ſelbſt eine unmögliche Gröſſe ſeyn, weil man von der Rechnung mit unmöglichen Gröſſen keine andern Regeln hier zu beobachten hat, als von der Rechnung mit möglichen. Das Differential einer Potenz, wird nähmlich durch das zweyte Glied der Potenz $(x + dx)^e$ beſtimmt (15), ohne daß die folgenden dabey in Betrachtung

tung kommen; und dieses zweyte Glied hat für alle die genannten unterschiedenen Werthe von e einerley Ausdruck; (Alg. 627.)

Begriffe von der Fluxionenrechnung.

31. Erkl. Wenn ein Punct p. 2 Fig. die Linie AG beschreibt, (Geom. 5. Erkl.) und man den Anfang seiner Bewegung von einem willkührlichen Orte A an rechnet, so heisst die Geschwindigkeit die er an jeder Stelle, z. E. C hat, die Fluxion von AC, und AC die derselben zugehörige fliessende Gröſse (fluens).

32. Zus. Wenn sich das Rechteck, dessen beyde Seiten a; b; sind in eines verwandelt, dessen Seiten a + e; b + f; sind, so ist die Verhältniß dieser beyden Rechtecke = ab: (a + e). (b + f). Sollen sich nun ein paar Linien g; h; eben so verhalten; so ist

$$h = \frac{(a+e).(b+f)}{a.b}.\ g$$ wo sich h durch Findung vierter Proportionallinien giebt; denn es sey a: a + e = b + f: c so ist b: c = g: h (Alg. 501.). Also kann man zwey Stücken AC: AG = g: h nehmen, die sich wie die beyden Rechtecke verhalten, oder überhaupt wenn sich die Gröſse eines Rechteckes durch Veränderung seiner Seiten verändert, so kann man allezeit Linien AC; AG; nehmen, die sich in der Ver-

Verhältniß verändern, in der sich das Rechteck verändert, d. i. man kann die Grösse des Rechtecks in jedem Zustande durch ein Stück der Linie AG vorstellen. Wenn also der Punct p, beständig Stücken AC; AG, u. s. w. beschreibt, die sich wie die veränderlichen Grössen des Rechtecks verhalten, so wird die Geschwindigkeit des Punctes an jeder Stelle, der Geschwindigkeit gleich seyn, mit der sich die Grösse des Rechtecks verändert, oder die Fluxion des Rechtecks seyn.

33. Zus. Dieses gilt überhaupt von jeder Fläche, weil jede sich auf ein Rechteck bringen läßt (G. 14. S. 7. Z.). Auf eine ähnliche Art erhellt, daß sich die Veränderungen eines Körpers durch gerade Linien vorstellen lassen, und überhaupt daß dieses für jede veränderliche Grösse statt findet. Man wird also verstehen, was die Geschwindigkeit, mit der sich eine Grösse verändert, oder ihre Fluxion, ist; nehmlich die Geschwindigkeit eines Puncts, welcher gerade Linien beschreibt, die sich allemahl wie diese veränderliche Grösse verhalten.

34. Zus. Wenn des Punctes Bewegung nicht gleichförmig ist, so verhalten sich seine Geschwindigkeiten in C und G, wie die Räume, welche mit jeder dieser Geschwindigkeiten gleichförmig in gleichen Zeiten könnten beschrieben werden, welche Verhältniß der Räume also mit

der

der Verhältniß der Fluxionen von AC und AG einerley ist.

35. Grundsatz. Wird die Bewegung beschleunigt, so ist CG grösser als der Raum, der mit der Geschwindigkeit, die der Punct in C hat, gleichförmig in derjenigen Zeit beschrieben würde, in welcher CG mit der wirklichen Bewegung beschrieben wird, und kleiner als der Raum, der in eben der Zeit, mit der Geschwindigkeit, welche der Punct in G hat, gleichförmig beschrieben würde.

Die Zeit mag T heissen, die Geschwindigkeiten in C und G, will ich durch vC; vG; anzeigen, (velocitas in C; G;) und sTvC mag den Raum bedeuten, der in der Zeit T mit der Geschwindigkeit in C gleichförmig beschrieben wird (Spacium tempore T velocitate in C descriptum). So wird sich dieser Satz so ausdrucken lassen: CG $\succ$ sTvC und $\prec$ sTvG.

36. Grundsatz. Wird aber die Bewegung vermindert, (motus retardatus) so ist CG $\prec$ sTvC und $\succ$ sTvG.

37. Zus. Wenn die Veränderung der Bewegung stetig ist, so lässt sich eine Stelle D, so nahe bey C annehmen, daß die Geschwindigkeiten in beyden Stellen so wenig als man will, oder weniger als um jede gegebene Grösse von einander unterschieden sind, oder der Unterschied

unter

unter sTvC und sTvD weniger als jede gegebene Grösse beträgt. Da nun CD zwischen diese beyden Räume fällt, (33; 34;) so kann man jeden von ihnen für CD annehmen, oder man kann sich vorstellen CD werde mit einer gleichförmigen Bewegung beschrieben.

38. Anm. I. Darauf gründet sich in der höhern Mechanik die Zerfällung der Bewegungen in gleichförmige. Wenn man sich den Raum CG in viel kleine Theile getheilet vorstellt, so kommen die Geschwindigkeiten am Anfange und am Ende eines jeden solchen Theiles einander desto näher, je kleiner diese Theile werden, und je grösser ihre Menge wird. Weil sich also der Unterscheid der Geschwindigkeiten nach Gefallen vermindern läßt, so stellt man sich vor, jeder Theil werde mit der Geschwindigkeit beschrieben, die der bewegte Körper am Anfange dieses Theiles hat, und sieht also die Bewegung durch diesen Theil als gleichförmig an, so daß sich die Geschwindigkeit nur am Anfange jedes Theiles verändert, und also der folgende Theil mit einer neuen Geschwindigkeit beschrieben wird. Dieses kömmt der Wahrheit desto näher, je kleiner die Theile werden, und man kann sich der Wahrheit ohne Ende nähern. Daher zertheilt man den Raum in unendlich kleine Theile, die jeder mit einer gleichförmigen Bewegung beschrieben werden.

II. Man setze der Weg AG 2 Fig., werde mit immer wachsender Geschwindigkeit innerhalb 10 Secunden durchlaufen, in jeder Secunde ein gewisser Theil dieses Raumes. Die Geschwindigkeit ändere sich so, daß der bewegte Punct in einer Secunde mit der Geschwindigkeit die er am Anfange der ersten Secunde hat, 3 Fuß zurücklegen könnte, mit der die

er

er am Anfange der zweyten hat, 5 Fuß, und so immer zween Fuß mehr, mit der welche er am Anfange der folgenden Secunde hat. Der wirklich zurückgelegte Weg ist allemahl gröſſer als der Weg welcher mit der Geschwindigkeit im Anfange jeder Secunde zurückgelegt werden könnte. Also sind die in den zehn Secunden zurückgelegten Wege zusammen gröſſer als $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 = 120$.

Aber der Weg in jeder Secunde ist auch kleiner als der in eben der Secunde mit der Geschwindigkeit beschrieben würde die an ihrem Ende, das ist: am Anfange der nächsten statt findet. Die Summe der zehn Wege, beträgt also weniger als $5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 = 140$. Das schränkt den wirklichen Weg zwischen 120 und 140 ein. Theilte man die Zeit in kleinere gleiche Theile, da an jedes Anfange die Geschwindigkeit um was geringres von der am Anfange des folgenden unterschieden wäre, so bekäme man mehr einzelne Wege, jeden gröſſer als mit der Geschwindigkeit im Anfange beschrieben, und kleiner als mit der am Ende; ihre Summen würden näher beysammen seyn als die vorigen beyden, und so die Gränzen zwischen welche der wirkliche Weg fällt enger zusammen gerückt. Diese Gränzen werden immer enger, je mehr man Zeittheile macht, also, sie so enge als man will zusammen zu bringen, daß man jede für den wirklichen Weg nehmen kann, erfodert nur fernere Rechnung, vielleicht eigne Kunstgriffe wenn man die Rechnung sehr weit fortsetzen soll. Ein solcher Kunstgriff nun ist hie: gleichförmige Bewegung in unendlich kleinen Zeittheilen durch unendlich kleine Räume.

39. Aufg. Der Punct m 2 Fig. beschreibe ES dergestalt, daß er sich in K; L; S; befin-

der, wenn p in C; D; G; ist, und also KL; LS; in denjenigen Zeiten beschreibt, in denen CD; DG; von p beschrieben werden. Es verhalte sich aber beständig EK: EL = AC^n: AD^n und EL: ES = AD^n: AG^n; oder der Weg des Punctes m von E an gerechnet, verhalte sich allemahl wie die Potenz n des zugehörigen Weges des Punctes p von A an gerechnet. Man sucht die Verhältniß der Geschwindigkeiten beyder Puncte in jedem Paare zusammengehöriger Stellen, oder die Verhältniß der Fluxionen, der Potenz und der Wurzel.

Aufl. 1) Man nenne AD = x; EL = y. Eine willkührliche unveränderliche Linie sey = a; und $a : y = a^n : x^n$ also $y = \frac{x^n}{a^{n-1}}$; so ist y eine Linie deren Verhältniß zu a; n mahl so groß ist als die Verhältniß x: a, und weil x, y, Wege bedeuten, welche p von A, m von E an, in gleichen Zeiten zurücklegen, so verhält sich der zweyte dieser Wege allemahl wie eine Potenz des Grades n vom ersten.

In zwo gleichen, nach einander folgenden Zeiten, jede = T, beschreibe der Punct P, die Wege CD = e; DG = f. Also, m, die Wege KL, LS; So ist

$x^n : (x-e)^n = y : EK$

$x^n : (x+f)^n = y : ES.$

Man

Man nenne die Binomialcoefficienten

$\frac{n.(n-1)}{1.2} = B$; $\frac{B.(n-2)}{3} = C$; u. ſ. w.

ſo iſt

$$EK = y.\left(1 - \frac{n.e}{x} + B.\left(\frac{e}{x}\right)^2 - C.\left(\frac{e}{x}\right)^3 \ldots\right)$$

$$ES = y.\left(1 + \frac{n.f}{x} + B.\left(\frac{f}{x}\right)^2 + C.\left(\frac{f}{x}\right)^3 \ldots\right)$$

$$KL = y.\left(+\frac{n.e}{x} - B.\left(\frac{e}{x}\right)^2 + C.\left(\frac{e}{x}\right)^3 \ldots\right)$$

$$LS = y.\left(+\frac{n.f}{x} + B.\left(\frac{f}{x}\right)^2 + C.\left(\frac{f}{x}\right)^3 \ldots\right)$$

$$LS - KL =$$

$$y.\left(\frac{n.(f-e)}{x} + \frac{B.(f^2+e^2)}{x^2} + \frac{C.(f^3-e^3)}{x^3} \ldots\right)$$

II) Für LS — KL, wird in jeden Binomialcoefficienten, ein Quotient multiplicirt, deſſen Dividend Potenzen von f, e, enthält die gleiche Exponenten haben, der Diviſor eine Potenz von x, die eben den Exponenten hat; Iſt der Exponent ungerade, ſo iſt der Dividend beyder Potenzen Unterſchied; aber ihre Summe wenn der Exponent gerad iſt.

der, wenn p in C; D; G; ist, und also KL; LS; in denjenigen Zeiten beschreibt, in denen CD; DG; von p beschrieben werden. Es verhalte sich aber beständig EK: EL = AC^n: AD^n und EL: ES = AD^n: AG^n; oder der Weg des Punctes m von E an gerechnet, verhalte sich allemahl wie die Potenz n des zugehörigen Weges des Punctes p von A an gerechnet. Man sucht die Verhältniß der Geschwindigkeiten beyder Puncte in jedem Paare zusammengehöriger Stellen, oder die Verhältniß der Fluxionen, der Potenz und der Wurzel.

Aufl. 1) Man nenne AD = x; EL = y. Eine willkührliche unveränderliche Linie sey = a; und a: y = a^n: x^n also $y = \frac{x^n}{a^{n-1}}$; so ist y eine Linie deren Verhältniß zu a; n mahl so groß ist als die Verhältniß x: a, und weil x, y, Wege bedeuten, welche p von A, m von E an, in gleichen Zeiten zurücklegen, so verhält sich der zweyte dieser Wege allemahl wie eine Potenz des Grades n vom ersten.

In zwo gleichen, nach einander folgenden Zeiten, jede = T, beschreibe der Punct P, die Wege CD = e; DG = f. Also, m, die Wege KL, LS; So ist

x^n: $(x-e)^n$ = y: EK
x^n: $(x+f)^n$ = y: ES.

Man

Man nenne die Binomialcoefficienten

$\frac{n.(n-1)}{1.2} = B$; $\frac{B.(n-2)}{3} = C$; u. ſ. w.

ſo iſt

$$EK = y.\left(1 - \frac{n.e}{x} + B.\left(\frac{e}{x}\right)^2 - C.\left(\frac{e}{x}\right)^3 \ldots\right)$$

$$ES = y.\left(1 + \frac{n.f}{x} + B.\left(\frac{f}{x}\right)^2 + C.\left(\frac{f}{x}\right)^3 \ldots\right)$$

$$KL = y.\left(+ \frac{n.e}{x} - B.\left(\frac{e}{x}\right)^2 + C.\left(\frac{e}{x}\right)^3 \ldots\right)$$

$$LS = y.\left(+ \frac{n.f}{x} + B.\left(\frac{f}{x}\right)^2 + C.\left(\frac{f}{x}\right)^3 \ldots\right)$$

$$LS - KL =$$

$$y.\left(\frac{n.(f-e)}{x} + \frac{B.(f^2+e^2)}{x^2} + \frac{C.(f^3-e^3)}{x^3} \ldots.\right)$$

II) Für LS — KL, wird in jeden Binomialcoefficienten, ein Quotient multiplicirt, deſſen Dividend Potenzen von f, e, enthält die gleiche Exponenten haben, der Diviſor eine Potenz von x, die eben den Exponenten hat; Iſt der Exponent ungerade, ſo iſt der Dividend beyder Potenzen Unterſchied; aber ihre Summe wenn der Exponent gerad iſt.

Ist also e nicht grösser als f, so ist LS — KL bejaht, oder LS grösser als KL.

III) Wenn des Punctes p Bewegung gleichförmig ist, so ist e = f; aber kleiner als f, wenn die genannte Bewegung beständig beschleunigt ist. In diesen beyden Fällen ist LS grösser als KL, der Weg den m im zweyten Zeittheile zurücklegt, grösser als der, den dieser Punct im ersten Zeittheile zurücklegt.

Ist des Punctes p Bewegung zwischen C und G, immer gleichförmig, oder immer beschleunigt, so ist immer f = e oder f grösser als e, so klein man auch den Zeittheil T nimmt.

Alsdann auch immer LS grösser als KL so klein auch der Zeittheil ist, folglich des Punctes m Bewegung immer beschleunigt.

IV) Man nehme also an, des Puncts m Bewegung werde nicht langsamer, bleibe immer gleich geschwinde oder werde schneller; in beyden Fällen, wird des Punctes m Bewegung immer schneller, also ist der Weg welcher in der Zeit T zurückgelegt wird, mit vK kleiner als KL, mit vD nicht kleiner als CD folglich $\frac{vK}{vD} < \frac{KL}{CD}$ auch der Weg mit vS grösser als LS, mit vD nicht grösser als DG, folglich $\frac{vS}{vD} > \frac{LS}{DG}$.

Daher

Daher aus (I)

$$\frac{vK}{vD} \lesseqgtr y.\left(\frac{n}{x} - \frac{B.e}{x^2} + \frac{C.e^2}{x^3} \ldots.\right)$$

$$\frac{vS}{vD} > y.\left(\frac{n}{x} + \frac{B.f}{x^2} + \frac{C.f^2}{x^3} \ldots.\right)$$

Können nun e, f, jedes gegen x so klein werden als man will, die Stellen C, G, der D, so nahe kommen als man will, so kömmt jeder Quotient der Geschwindigkeiten, so nah als man will an $\frac{n.y}{x}$.

Zwischen diese beyden Quotienten, fällt $\frac{vL}{vD}$ weil vL gröſſer ist als vK und kleiner als vS. Da nun die Gränzen zwischen welche nur genannter dritter Quotient fällt, so nah als man will an $\frac{n.y}{x}$ kommen, so kömmt er selbst so nah als man will an diesen Werth.

Sagte jemand $\frac{vL}{vD}$ sey $= \frac{n.y}{x} + k$ wo k eine Gröſse ist die sich angeben läſst, so nehme man f so klein daß $\frac{vS}{vD}$ kleiner ist als $\frac{n.y}{x} + k$; Dieses läſst sich thun, weil f bis auf nichts abneh-

nehmen kann. Da nun $\frac{vL}{vD}$ kleiner ist als $\frac{vS}{vD}$, so ist es auch kleiner als $\frac{n.y}{x} + k$.

Man kann e so klein nehmen daß $\frac{vK}{vD}$ gröſſer wird als $\frac{n.y}{x} - k$; und da $\frac{vL}{vD}$ gröſſer ist als $\frac{vK}{vD}$, so läſſt sich nicht sagen es werde nicht gröſſer als $\frac{n.y}{x} - k$.

V) Also ist aus (I) $\frac{vL}{vD} = \frac{n.x^{n-1}}{a^{n-1}}$. Unter der Voraussetzung daß des Punctes p Geschwindigkeit nicht abnimmt (III).

VI) Wenn die Geschwindigkeit von p vermindert wird, so muß man drey Gattungen dieses Falles betrachten.

Erste Gattung. Die Bewegung von m wird beschleunigt. So ist sTvL gröſſer als KL; und sTvD kleiner als CD also $\frac{vL}{vD}$ gröſſer als $\frac{KL.}{CD}$ Auch sTvL kleiner als LS; sTvD gröſſer als DG; und $\frac{vL}{vD}$ kleiner als $\frac{LS}{DG}$; Also fällt $\frac{vL}{vD}$ zwischen zwo Gränzen, die man durch die Verminderung

derung von e; f; dem Werthe $\frac{n.y}{x}$ so nah als man will, bringen kann.

Zweyte Gattung. m bewege sich gleichförmig, also sTvL = KL; sTvD kleiner als DC; und $\frac{vL}{vD}$ gröſſer als $\frac{KL}{e}$; Auch sTvL = LS; sTvD gröſſer als DG; und $\frac{vL}{vD}$ kleiner als $\frac{LS}{f}$; wo wiederum die vorigen Gränzen vorkommen.

VII) Dritte Gattung. Die Bewegung von m wird vermindert. So ist sTvK gröſſer als KL; sTvD ≪ CD also $\frac{vK}{vD}$ gröſſer als $\frac{KL}{e}$; sTvS kleiner als LS; sTvD gröſſer als DG; $\frac{vS}{vD}$ kleiner als $\frac{LS}{f}$; also fällt der Quotient $\frac{vL}{vD}$ wiederum zwischen die vorigen Gränzen; weil hier vL gröſſer als vS und kleiner als vK ist.

VIII) Ist also $y = \frac{x^n}{a^{n-1}}$; und bedeutet vy: vx die Verhältniß der zusammengehörigen Geschwindigkeiten, so ist überhaupt

$vy = \frac{n.x^{n-1}}{a^{n-1}}.vx.$

40. Zus. Bey den Potenzen ist die Verhältniß der Fluxionen und die Verhältniß der Differentialen einerley (39; 18). Und da die übrigen Regeln des Differentiirens aus den Potenzen sind hergeleitet worden, (24; 26;) so wird man sich leicht vorstellen, daß es einerley ist, Fluxionen oder Differentiale zu finden.

41. Zus. Wenn sich nähmlich z (13) mit ungleicher Geschwindigkeit verändert, d. i in gleichen Zeiten bald viel, bald wenig ab- oder zunimmt, so ist e eine solche Veränderung von z, die mit veränderlicher Geschwindigkeit ist erzeugt worden; und eben so E. Es werden aber E; e; in einer Zeit erzeugt. Wenn nun diese Zeit immer kleiner und kleiner wird, so kömmt die Geschwindigkeit, mit der sich jede der beyden Grösen z; Z; am Ende dieser Zeit verändert, der Geschwindigkeit, mit der sie sich im Anfange veränderte, immer näher und näher, und diese Näherung läßt sich so weit treiben als man will. Also nähert sich die Verhältniß E; e unendlich der Verhältniß solcher Veränderungen, die mit den Geschwindigkeiten entstanden wären, mit denen sich Z, z; am Anfange der Zeit verändern, das ist, der Verhältniß dieser Geschwindigkeiten selbst. So wird durch die unendliche Verminderung der Zeit aus E: e die Verhältniß dZ; dz = vZ: vz.

42. Zus. Die Differentiale dZ; dz; sind nähmlich nicht Grössen, um welche Z; z; wirklich wachsen, oder abnehmen, sondern um welche sie in einer Zeit wachsen oder abnehmen würden, wenn jedes sich mit der Geschwindigkeit zu verändern fortführe, die es am Anfange dieser Zeit hat. Die Zeit kann alsdenn endlich seyn, und so groß als man will, da würden dann dZ; dz; endliche Grössen seyn, die sich so wie die Geschwindigkeiten verhielten. Denn daß man dZ; dz; unendlich klein annimmt, gründet sich blos darauf, weil die Verhältniß dieser beyden Grössen, mit der Verhältniß der Geschwindigkeiten einerley seyn soll, und man daher die Zeit so vermindert, daß durch ihre ganze Dauer jede Geschwindigkeit als unverändert kann angesehen werden, (38) da dann die Veränderungen selbst auch immer mit vermindert werden müssen.

43. Anm. Die Engländer bedienen sich nach Newton der Fluxionenrechnung. Sie bezeichnen die Fluxion einer Grösse mit einem Punete über ihr: So sieht die Gleichung am Ende von 39 folgendergestalt aus:

$$\dot{y} = \frac{n \dot{x} x^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

44. I) Leibniz hat seine Regeln des Differentiirens in den Actis Eruditorum Lipsi. 1684 zuerst bekannt gemacht Noua methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus. a. a. O. 467 S. Die Brüder Jacob und Johann Ber-

noulli erläuterten diese Rechnung und zeigten ihren ungemein grossen und weitläuftigen Nutzen.

II) Newton hat von seiner Rechnung zuerst etwas öffentlich gesagt in Principiis philosophiae naturalis mathematicis. Lond 1687. Libr. II. Sect. 2. Lemma II. momentum oder mutationis velocitas sind ihm gleichgültig; heissen a, b, die Momente oder Geschwindigkeiten mit denen sich A, B, ändern so ist A. b + B. a das Moment des Rechtecks A B.

III) Newtons Beweis ist: $(A - \frac{1}{2}a).(B - \frac{1}{2}b) = A.B - \frac{1}{2}a.B - \frac{1}{2}b.A + \frac{1}{4}.a.b$ und $(A + \frac{1}{2}a).(B + \frac{1}{2}b) = A.B + \frac{1}{2}a.B + \frac{1}{2}.b.A + \frac{1}{4}.a.b$; Da nun $(A + \frac{1}{2}.a).(B + \frac{1}{2}b) - (A - \frac{1}{2}a)(B - \frac{1}{2}b) = A.b + B.a$ so schliesst N. laterum incrementis totis a et b, generatur incrementum a. B + b. A.

IV) Newton sagt in dem Satze: caue intellexeris particulas finitas, particulae finitae non sunt momenta, sed principia iamiam nascentia finitarum magnitudinum, neque enim spectatur in hoc lemmate magnitudo momentorum, sed prima nascentium proportio. Nähmlich völlig was (42) von Differentialen gesagt ist. Aber Newtons Rechnung (III) bleibt richtig a mag gegen A und b gegen B so groß seyn als man will. Prima nascentium proportio kömmt da gar nicht in Betrachtung. Es ist daher auch dieser Beweis als falsc reasoning getadelt worden.

Eine

Eine Rechtfertigung die aber nicht befriedigt findet ſich in: Geometry, no friend to infidelity... by Philalethes Cantabrigienſis. Lond. 1734; p. 33 u. f.

V) Bey Optice, Authore Is. Newton.. latine reddidit Samuel Clarke Lond. 1706. befindet ſich Enumeratio linear. tertii ordinis, und tractatus de quadratura curuarum. Des letztern erſter Satz iſt: data aequatione quotcunque fluentes quantitates inuoluente inuenire fluxiones. Der Beweis iſt folgendergeſtalt beſchaffen: Ein Theil der Gleichung ſey x^3; Nun ſey o eine ſehr geringe Gröſſe und ox das Moment, oder incrementum momentaneum von x; Setzt man $x + \dot{o}x$ ſtatt x in die Gleichung, und zieht die erſte Gleichung von der zweyten ab, ſo bleibt $3.x^2.\dot{o}x + 3.x.\ddot{o}\dot{x}\dot{x} + \dot{o}\dot{o}\dot{x}^3$, dividirt man alles mit o ſo kömmt $3.x.x^2 + 3.\dot{x}\dot{x}\dot{o}x + \dot{x}^3.\dot{o}.\dot{o}$, minuatur quantitas o in infinitum, et neglectis terminis euaneſcentibus reſtabit $3.x\,x^2$.

VI) Beyde erwähnte Abhandlungen erſchienen zuerſt zu London 1704; Iſaaci Newtoni tractatus duo de ſpeciebus et magnitudine figurar. curuilinear. Dieß ward in Act. Er. Lipſ. 1705. p. 30. recenſirt, und da p. 35. geſagt: pro differentiis Leibnitianis D. Newtonus adhibet fluxiones.. iisque tum in ſuis principiis naturae mathe-

ma-

maticis, tum in aliis postea editis, eleganter est vsus, quemadmodum et Honoratus Fabrius in sua synopsi geometrica motuum progressus Cavallerianae methodo substituit. Der Verfasser der Recension wird Godofredus Guilielmus Leibnitius genannt in dem Exemplare der Actor. Erud. auf der göttingischen Universitäts-Bibliothek, wo Nahmen der Recensenten beygeschrieben sind.

VII) Man nahm beygebrachten Ausdruck in England so an: Newton sollte seine Methode nach Leibnizen gebildet haben, wie Fabri die seinige nach dem Cavallerius. Leibniz erklärte sich: Er finde das in dem Ausdrucke nicht, auch sey in den Act. Er mehrmahl gesagt: Man halte Newton für den Erfinder seiner Methode... Ich schreibe diese Erklärung dem Dr. de Neufville nach, der 1734 die Theodicee zu Amsterdam herausgegeben, und ihr Leibnizens Leben vorgesetzt hat. Das Leben befindet sich auch, aus dem Französischen lateinisch, mit einigen Zusätzen, vor: G. G. Leibnitii tentamina Theodicaeae. versio noua Frf. u. Leipz. 1739; Der Uebersetzer ist Joh. Ulr. Steinhofer. Da steht erwähnte Erklärung §. 246. des Lebens, und in den folgenden §. wird die Geschichte des Streites erzählt den ein freylich nicht recht überlegter Ausdruck veranlasst hat.

VIII) Anstatt sich mit der Erklärung zu befriedigen: Newton sey Erfinder seiner Methode, suchte

ſuchte man nun zu behaupten: Leibniz ſey nicht Erfinder der ſeinigen, ſondern habe ſie vom Newton.

Von Joh. Keill erſchien in den Philoſophical Tranſactions 1708 eine Abhandlung de legibus virium centripetarum. Da ſagt er: Haec omnia ſequuntur ex celebratiſſima nunc fluxionum arithmetica quam ſine omni dubio primus inuenit dominus Newtonus vt cuilibet, eius epiſtolas a Walliſio editas legenti facile conſtabit, eadem tamen Arithmetica poſtea, mutatis nomine et notationis modo a domino Leibnitio in Actis Eruditorum edita eſt.

Keills Abhandlung ſteht auch bey Iohannis Keill M. D. Introductiones ad veram phyſicam et veram aſtronomiam Lugd Bat 1725; 4. wo man dieſe Stelle p. 594 leſen kann.

Nun noch Einiges zur Geſchichte dieſes Streites

IX) Wallis in der Vorrede zum erſten Theile ſeiner Werke (Io. Wallis Opera mathematica tribus voluminibus contenta Oxon. 1699 fol.) meldet, Newton habe ſeine Methode in zween Briefen 1676. an Oldenburgen beſchrieben, welche Leibnizen hätten ſollen mitgetheilt werden.

X) Newton fügt dem (II) erwähnten Lemma, nachſtehendes Scholium bey:

In literis quae mihi cum peritiſſimo geometra G. G. Leibnitio annis abhinc decem intercedebant, cum

eum significarem me compotem esse methodi determinandi maximas et minimas, ducendi tangentes, et similia peragendi quae in terminis surdis aeque ac in rationalibus procederet, et literis transpositis hanc sententiam inuoluentibus (Data aequatione quotcunque fluentes quantitates inuoluente fluxiones inuenire et vice versa) eamdem celarem; rescripsit vir clarissimus, se quoque in eiusmodi methodum incidisse, et methodum suam communicauit a mea vix abludentem praeterquam in verborum et notarum formulis. Vtriusque fundamentum continetur in hoc lemmate.

XI) Newtons Anagramm muß nach der Menge der Buchstaben die es enthält, weitläuftig gewesen seyn, und wer Newtons Wörter herausgebracht hätte, wäre nun auf ein Räthsel gekommen; was fluxiones und fluentes bedeuten? Leibniz eröffnete seine Methode treuherzig.

XII) Zwischen beyder Verfahren entstand nachdem noch ein andrer Unterschied. Angeführtes scholium findet sich auch in der zweyten Ausgabe der principiorum von 1713; da steht nach formulis noch: et idea generationis quantitatum. Die dritte Ausgabe erschien 1726; In ihr ist dieses scholium weggelassen, und an dessen Stelle eines hingesetzt da N. erzählt: in einem Briefe an J. Collin 1672. habe er gemeldet, er besitze eine allgemeine Methode Tangenten zu ziehen,

ziehen, Gröſſte und Kleinſte zu finden u. d. g. Worinn ſie beſtehe erläutert er da nicht, nennt weder Fluxionen noch Leibnizen.

In Philoſoph. nat. pr. m. auct. Il. N. perpetuis commentariis illuſtrata communi ſtudio.. le Seur et Jacquier Genf 1739; im II. B. 60. 61 S. findet ſich im Texte das ſcholium der 3. Ausg. und in der Note das der beyden erſten.

XIII) Newtons beyde Briefe die Wallis (IX) erwähnt, ſtehen in Wallis Op. Math. Volumen 3. Oxon. 1699. p. 622. 639, zwiſchen ihnen ein Brief Leibnizens p. 629; Sie betreffen Reihen für Irrationalgröſſen, vermittelſt des binomiſchen Lehrſatzes den Newton auf gebrochne und verneinte Exponenten erſtreckt, daraus hergeleitete Quadraturen, wie ſchon für die Hyperbel Mercator gegeben hatte, da noch nicht von Fluxionenrechnung und Differentialrechnung geredet ward. Solche Reihen werden in Newtons und Leibnizens Rechnungen gebraucht. Dieſe Rechnungen beruhen ſelbſt auf der Binomialformel (15; 39). Doch kann man eigentlich nicht ſagen daß die Briefe eigentlich erwähnte Rechnungen betreffen.

XIV) Commercium epiſtolicum D. Iohannis Collins et aliorum, de analyſi promota, iuſſu Societatis Regiae in lucem editum Lond. 1712; 4° eine ſehr ſelten gewordne Sammlung, enthält auch nichts als Kunſtgriffe Reihen zu finden, und

ſolche

solche zu brauchen. Die Societät endigt sie mit dem Urtheile: Newton sey der erste Erfinder der Methode über deren Erfindung gestritten ward, und Keill der dieses behauptete, habe Leibnizen nicht unrecht gethan.

Keill hatte aber noch etwas mehr Leibnizen nachtheiliches gesagt. (VIII) Dafür ist nicht der geringste Grund in den von Wallis und der Societät bekannt gemachten Briefen. In denselben ist nichts von dem Anagramm das Newtons von ihm zurückgenommenes Scholium (X) erwähnt, die Nahmen fluentes und fluxiones kommen nur als Erläuterungen in Anmerkungen vor, und Leibnizens Briefen werden immer Anmerkungen beygefügt, die darauf leiten sollen L. habe seine Methode nicht eher gehabt bis er Newtons Methode gekannt, aber das nicht darthun, Leibnizens Brief den Newton als Antwort auf den seinigen erwähnt erscheint gar nicht.

XVI) Newton selbst sagt (X) Leibniz sey von ihm in der Vorstellung unterschieden, wie die Gröſſen erzeugt worden, nähmlich: Geschwindigkeiten und Differenzen. Die letzte Vorstellung, Leibnizens seine, ist leicht zu fassen; Man versteht wie sich x. y ändert, wenn sich die beyden Factoren in $x + e$; $y + f$; verwandeln, und was diese Aenderung wird wenn e gegen x; f gegen y bis auf nichts abnimmt, (25; IX) aber was die Geschwindigkeit mit welcher das Product

duct sich ändert zu den Geschwindigkeiten mit denen jeder Factor sich ändert für eine Verhältniß hat, das ist nicht so leicht anzugeben. Ich kenne vom Newton selbst nur zweyerley Verfahren dieses zu leisten, das eine (III) beweist gar nicht was es beweisen soll (IV) und das andere (V) auf diesen Fall angewandt, setzt zum voraus e. f verschwinde gegen y. f + x. e völlig wie in (25; IX). Newton selbst beweist also seine Regel nicht anders als daß er statt der Geschwindigkeiten, unendlich kleine Aenderungen setzt (IV). Wenn man also chicaniren wollte.. was man thun könnte, nicht was man thun soll... so liesse sich sagen: Newton habe von Leibnizen die Differentiale abgesehen, und solche in den Ausdruck: Geschwindigkeiten, übersetzt, den zu verstehen mehr Nachdenken gehört.

XVII) Das billige Urtheil ist! Jeder sey auf seine Methode für sich gekommen, zulänglich war hiebey Nachdenken über das Verfahren vorhergehender Mathematiker. So urtheilt auch Eduard Waring Meditationes analyticae Cambridge 1785; man s. meine Recension Gött. gel. Anz. 1786; 700 S. Selbst kann man zugeben, Newton der sich mit höherer Mathematik früher beschäfftiget hat als Leibniz, sey auch auf seine Methode früher gekommen. Aber der Wissenschaft hat frühere Bekanntmachung und Verbreitung von Leibnizens Methode mehr genutzt.

XVIII) Die Königinn Anna ſtarb d. 1. Aug. 1714. Einige Jahr vor ihrem Tode waren in England Viele dem Prätendenten günſtig, der Nachfolge des Hauſes Hannover zuwider. In dieſe Zeit fällt das Urtheil der Societät (XIV). Ich habe irgendwo geleſen, das möchte wohl Einfluß in das Urtheil der Societät gehabt haben, da Leibniz in hannöveriſchen Dienſten war. Daß ein ſolcher Argwohn doch nicht ganz ungereimt iſt zeigt eine Stelle aus Swifts Briefe an Hunter. Lond. 12. Jan. 1708—9: in Miſcellanies by Dr. Swift and Others, Lond. 1746; 8. Vol. 13; Letters to and from Swift p. 124. You know I believe that poor Dr. Gregory is dead, and Keil ſolicits to be his ſucceſſor; but Party reaches even to ſines and circles, and he will hardly carry it, being reputed a Tory, which he yet utterly denies. Die Torys waren wieder die hannöveriſche Nachfolge.

Keill ward doch Profeſſor Aſtronomiae Savilianus zu Oxford, welches Gregorius geweſen war. Er hat ſich alſo gegen den Vorwurf gerechtfertigt, oder der Vorwurf hat ihm nicht geſchadet.

XIX) Mirifici Canonis Logarithmorum deſcriptio auth. Ioh. Nepero, Bar. Merchiſtonii, Scoto, Edinb. 1614. ſagt bey Erläuterung der erſten Definition: Sit punctus A, a quo ducenda ſit linea fluxu alterius puncti, qui ſit B; fluat

ergo

ergo primo momento B ab A in C.... Das Wort fluere finde ich da nicht weiter, aber in der Folge nimmt N. als Postulat an: Cum quolibet motu et tardior et velocior dari possit sequetur necessario cuique motui aequiuelocem dari posse. Logarithmus sinus ist ihm: numerus quam proxime definiens lineam quae aequaliter creuit interea dum sinus totius linea proportionaliter in sinum illum decreuit, existente vtroque motu synchrono, atque initio aequiueloce. Man sieht leicht, wie hie schon Begriffe von Fluxionen als Geschwindigkeiten betrachtet liegen.

45. I) In Europa sind auser Britannien fast durchgängig die Leibnizischen Benennungen und Bezeichnungen eingeführt. Man fand bequemer vor eine veränderliche Grösse d zu schreiben als über sie ein Tüpfelchen zu setzen. Die Bedenklichkeit lässt sich machen daß man d als Factor ansehen könne, deßwegen schlug Euler vor, nachdem er den Buchstaben viel Jahre lang gebraucht hatte denselben etwas anders zu bilden, wie ohne Zweifel aus Verziehung des Buchstabens r, das Wurzelzeichen √ geworden ist. Die Mißdeutung für einen Factor lässt sich leicht verhüten, wenn man nur annimmt als Factor werde er nie vor einen andern Buchstaben gesetzt als mit dem Multiplicationszeichen; Da kann das Product d. x nicht mit dem Differentiale verwechselt werden.

II) Wie man die Regeln des Differentiirens bewiesen hat ist eine Probe (25; IX) der ähnliche man in dort angeführten und andern Lehrbüchern sehen kann. Wolf a. a. O. §. 5. erläutert den Begriff des Unendlichkleinen mit einem Sandkörnchen, das vom Gipfel eines Berges weggeweht wird, indem man des Berges Höhe misst. Man thäte indessen Wolfen unrecht wenn man glaubte er setze im Ernste Sandkörnchen: Berg = Unendlichklein: Endlich. Seine Meynung ist: Das Sandkörnchen verschwinde in Vergleichung mit dem Berge für unsre Empfindung, daß man so Verschwinden für den Verstand annehme und Grössen bey deren Unterschiede das statt findet, gleich setze, beruft er sich auf Euklid X. B. 1. Satz, Archimed in der Vorrede zur Quadratur der Parabel, und allen seinen Schriften. Wolfs Sandkörnchen ist also sinnliches Bild des Begriffs vom Unendlichkleinen, wie ein Zug mit Kreide sinnliches Bild einer Linie ist. Auch erinnert er, Leibniz selbst habe gewarnt das Unendlichkleine für was wirkliches anzunehmen. Act. Er. 1712; p. 167. wo Leibniz es für eine Redensart erkennt die gehörig verstanden, als tolerantur vera in der Rechnung diene.

III) Da lässt sich doch noch fragen, was die gehörige Bedeutung dieser Redensart ist? Und das führt auf die Verhältniß von Aenderungen, deren

deren jede in Vergleichung mit der Gröſſe welcher ſie gehört, verſchwindet.

IV) Auch zwiſchen endlichen veränderlichen Gröſſen, giebt es oft eine Gränze der ihr Verhältniß ſo nah kömmt als man will. So iſt (An. endl. Gr. 109.) für $(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\ldots)$: $(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\ldots)$ die Gränze $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=1,5:1$.

V) Weil $\sin\varphi:\sin\frac{1}{2}\varphi=2.\cos\frac{1}{2}\varphi:1$ ſo ändert ſich die Verhältniß der beyden Sinuſſe von 2:1 bis $\sqrt{2}:1$ indem ſich der ganze Winkel von 0 bis 90 Gr. ändert. Betrachtet man alſo nur dieſe Reihe von Aenderungen des ganzen Winkels, ſo kann man ſagen: Der Sinuſſe erſte Verhältniß ſey 2:1, letzte $\sqrt{2}:1$; In der That iſt was man ſo erſte Verhältniß nennt, nur eine Gränze der die Verhältniß der Sinuſſe ſo nah kommen kann als man will, wenn der ganze Winkel ſo klein kann genommen werden als man will; denn $\sin 0=0$ heiſſt doch gewiß: kein Winkel hat keinen Sinus; und die Hälfte keines Winkels hat auch keinen Sinus, und was dächte man da bey dem Ausdrucke: Der erſte Keinſinus iſt noch einmahl ſo groß als der andre Keinſinus? Aber, wenn die wirklichen Winkel immer abnehmend, in der Verhältniß 2:1 bleiben, ſo kömmt ihrer Sinuſſe Verhältniß dieſer Verhältniß 2:1 ſo nah als man will. Wenn die Winkel aufhören zu ſeyn, ſo hören auch die Sinus auf zu ſeyn, und beyde Verhältniſſe hören

auf zu seyn. Man kann also auch die Verhältniß der Sinusse 2 : 1 die letzte nennen, wenn man auf sie durch Abnehmen der Winkel kömmt, eben wie sie die erste heissen kann, wenn sie beym Entstehen der Winkel vorkömmt.

VI) Auch so, ist dx : dy, die letzte, oder die erste Verhältniß von e : f nachdem man von x + e, y + f auf x, y geht, oder von x, y, auf x + e, y + f.

VII) So ist: erste oder letzte Verhältniß, eine Redensart, deren eigentliche Bedeutung sich ganz bestimmt angeben lässt, die man also als erträglich wahr brauchen darf, auch so: Verhältniß zwischen unendlich kleinen Grössen; die sich durch endliche Grössen angeben lässt. Aus dergleichen Verhältnissen habe ich die Regeln des Differentiirens hergeleitet.

VIII) Erste oder letzte Verhältnisse braucht Newton häufig Princ. L. I. Sect. I, giebt aber keine Rechnungsart für sie.

IX) A Treatise of Fluxions in two books, by Collin Mac Laurin A. M. Prof. of Mathematics in the University of Edinburgh; ... Edinburgh 1742; 2 Quartbände; beweist die Fluxionenrechnung mit grösster Schärfe und sehr umständlich nach Art der Alten. Diesen zur Nachahmung, werden in den Grundlehren dieser Rechnung, Sätze und Beweise alle mit Worten ausgedruckt, ohne Gebrauch arithmetischer

Zei-

Zeichen, noch viel weniger der Rechnung mit bejahten und verneinten Grössen. Die Vermeidung des letztern, nöthigt eine Menge von Fällen jeden einzeln zu untersuchen, die sich durch + in — verwandelt, in weniger zusammenziehen liessen. Daraus entsteht eine grosse Weitläuftigkeit, indessen braucht man oft nur den Beweis eines Falles durchzugehn so übersieht man leicht die andern.

Diese Weitläuftigkeit ist also in meinen Augen eine geringere Unbequemlichkeit als die ganz synthetische Lehrart, in den Beweisen der ersten Hauptsätze. Ich habe für meinen eignen Unterricht, aufgesucht wie die meisten gefunden werden, der Raum gestattet nur (39) mitzutheilen, man wird daraus schn auf was für Weitläuftigkeit die Beobachtung der grösten Schärfe und Deutlichkeit führt.

Indessen hat es mir nöthig geschienen diese Begriffe von Fluxionen zu geben, von denen in den gewöhnlichen auch grössern Anleitungen zur Differentialrechnung gar nichts gesagt ist. Schon das rechtfertiget mich dieserwegen, daß einem Liebhaber der Mathematik wichtig ist, auch die Lehrer jenseit des Meeres...

penitus toto divisos orbe Britannos

Virg.

brauchen zu können. Man versteht sie schlecht wenn man nach Veranlassung mehrer Anleitungen zur Differentialrechnung sich einbildet

ihre Fluxionen und unsre Differentialen seyen einerley. Auch erweitern die Fluxionen unsere Begriffe von der Differentialrechnung, zeigen, wie man statt der Verhältniß unendlich kleiner Aenderungen, Verhältniß von Geschwindigkeiten denken kann.

X) Gegen die Fluxionen hat man eingewandt: Bewegung und was damit zusammenhängt, Raum, Zeit, Geschwindigkeit, gehören nicht in die Geometrie, sondern in die Mechanik; on reproche à Neuton d'avoir introduit dans les mathematiques pures, des idées qui paroissent leur être etrangères, telles que celles du temps, du mouvement et de la viteſſe, et il me paroit qu' il valoit tout au moins la peine d' expoſer une partie des mathematiques pures auſſi importante que l'eſt celle des calculs ſuperieurs ſans y introduire des prîncipes de Méchanique dont il paroit qu'elles doivent être independantes, ſagt Hr. L' Huilier, Expoſition elementaire des principes des calculs ſuperieurs. Berlin 1786. §. LXVIII.

XI) Ohne Bewegung, läſſt ſich doch weder eine gerade Linie verlängern noch ein Kreis beſchreiben. Euklid nennt bey dieſen Foderungen, auch in der Definition des Kreiſes, Bewegung nicht ausdrücklich, muß ſie aber doch ſtillſchweigend vorausſetzen.

In Euklids XI. B. 14. Definit. wird eine Kugel zu beſchreiben, ausdrücklich Umdrehung eines Halbkreiſes erfodert.

Bey

Bey diesen Lehren der Elementargeometrie wird jede Bewegung einzeln betrachtet, und da ist die Zeit in welcher sie vollendet wird gleichgültig, folglich kömmt Geschwindigkeit nicht in Betrachtung.

Archimed in seinem Buche von den Schnekkenlinien in der ersten Erklärung, führt eine gegebene gerade Linie um einen Mittelpunct, daß sie einen Kreis beschreibt, in gleichen Zeiten gleiche Winkel, und auf ihr, geht ein Punct vom Mittelpuncte aus, beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Stücken von ihr, und kömmt in des Kreises Umfang, wenn die Linie sich um vier Rechte gedreht hat. Das heisst ja wohl: die Geschwindigkeiten der beyden Puncte, des Endpuncts der Linie welcher den Umfang beschreibt, und des Puncts der sich auf ihr bewegt, verhalten sich wie Umkreis zum Halbmesser.

Zur Quadratrix erfodert Dinostratus daß eines Kreises Halbmesser sich gleichförmig dreht und eine gerade Linie immer gleichförmig einer Tangente des Kreises parallel fortrückt. Man s. meine geometrische Abhandlungen II. Samml. 23. Abh. 33. §.

So gehörten Bewegung und Geschwindigkeit in die Geometrie der Griechen.

XII) Aber bey diesen Definitionen dreht man gerade Linie oder Halbkreis, ohne an Kraft zu denken die allerdings erfodert wird wenn man der definirten Grössen sinnliche Bilder darstellt;

raldisputation: Principia atque Historia inuentionis calculi differentialis et integralis, nec non methodi fluxionum.

Allgemeiner Beweis des Binomischen Lehrsatzes durch die Differentialrechnung.

46 Aufg. **Eine Formel für die Ausdrükkung der Potenz einer zweytheilichen Wurzel durch eine unendliche Reihe zu finden, deren Exponent mag bejaht oder verneint, ganz oder gebrochen seyn.**

Aufl. I) Die Reihe für die Potenz m jeder zweytheilichten Wurzel zu finden, ist genug, daß man nur diese Reihe für die Potenz von $1 + y$ sucht (Alg. 144.) Es sey also

$$(1+y)^m = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 \ldots + Py^n + Qy^{n+1} + \ldots = w$$

wo man die Coefficienten dieser Reihe w bestimmen will. Daß sie von 1 anfängt, ist klar, weil sie für jeden Werth von y und also auch für den Werth $= 0$ richtig seyn soll.

II) Also ist $m.(1+y)^{m-1} dy = dw$ oder $m.(1+y)^m.dy = (1+y)\,dw$ oder $mw\,dy = (1+y)\,dw$ oder $\frac{(1+y)\,dw}{dy} - mw = 0.$

Es ist aber

$\frac{dw}{}$

$$\frac{dw}{dy} = A + 2.B.y + 3.C.y^2 \ldots\ldots + n.P.y^{n-1} + (n+1).Qy^n$$

$$\frac{(1+y).dw}{dy} = \left.\begin{matrix} A \\ +2.B \end{matrix}\right| .y + \left.\begin{matrix} 3.C \\ +A \\ +2.B \end{matrix}\right| .y^2 \ldots\ldots$$

$$-m.w = \left.\begin{matrix} -m \\ -m.A \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} \\ -m.B \end{matrix}\right|$$

$$+n.P.y^{n-1} + \left.\begin{matrix} (n+1).Q \\ +n.P \\ -m.P \end{matrix}\right| .y^n \ldots\ldots$$

Also ist (Alg. 624.)

$$A = m;\ B = \frac{(m-1)A}{2};\ C = \frac{(m-2)B}{3};\ldots$$

$$Q = \frac{m-n}{n+1}.\ P.$$

Es erhellt, daß diese Coefficienten nach dem Gesetze (Alg. 141.) gemacht werden, weil das dortige a; b; hier 1; y sind. Folglich gilt dieses Gesetz für alle Werthe von m; für welche die Regeln zu differentiiren gelten, vermittelst deren die Coefficienten hier gefunden werden; d. i. für gebrochne, verneinte, und selbst unmögliche (30).

47. Wenn m keine ganze bejahte Zahl ist, so hört die Reihe nicht auf, weil der Zähler eines jeden Coefficienten ein Product aus Factoren ist, die aus m immer um ganze Zahlen vermindert bestehen. Daß also das Glied b^m (Alg. 141.) oder hier y^m nicht vorkömmt, wie auch deswegen nicht geschehen kann, weil y hier, wie dorten b, lauter ganze bejahte Zahlen zu Exponenten hat.

48. Anm. Verschiedene Schriftsteller haben den binomischen Lehrsatz durch die Differentialrechnung finden gelehrt, als Euler Inst. Calc. diff. P. II. §. 72; Colson Comment. on Newtons Method of Fluxions p. 309. Auch hat Herr Clemm einen Beweis, der dem hier vorgetragenen völlig ähnlich ist, von Herrn Eulern gelernt, und schon 1752. in s. lettre sur quelques paradoxes du calcul analytique bekannt gemacht. S. seine ersten Gründe aller mathemat. Wissenschaften

110. §. Die Absicht derer, die solche Anwendungen der Differentialrechnung gemacht haben, kann aber nicht gewesen seyn, den Satz dadurch in völliger Schärfe zu erweisen. Denn sie haben nicht zuvor dargethan, daß man von den Gründen, auf denen die Regeln der Differentialrechnung beruhen, überzeugt seyn könne, ehe man diesen Satz in seiner völligen Allgemeinheit weiß, wie ich (30). Ihr Verfahren kann also keine andere Absicht als eine Uebung dieser Rechnung haben, auch ist es sonst von dem meinigen weit unterschieden, auf das ich 1756. gerathen bin, als ich Herrn Huben, der sich durch seine analytische Abhandlung von den Regelschnitten bekannt gemacht hat, einen befriedigenden Beweis von der Allgemeinheit des binomischen Lehrsatzes zu geben suchte. Ich verfiel anfangs auf Differentiirung der Logarithmen, weil ich aber dabey nach der Schärfe, die ich suchte, sorgfältig verhüten wollte, daß nichts vorausgesetzt würde, das sich schon auf den binomischen Lehrsatz in seiner Allgemeinheit gründete, so fand ich für dienlicher alles auf die einfachste Anwendung der Differentialrechnung zu bringen; So habe ich den Beweis in einem 1758. hier herausgegebenen Programma: theorema binomiale vniuerſaliter demonſtrat. bekannt gemacht; den Beweis für ganze bejahte Exponenten (Alg. 141.) habe ich in einer 1745. zu Leipzig herausgegebenen Schrift Demonſtratio theorematis binomialis mitgetheilet.

49. Anm. Das Gesetz der Coefficienten wenn der Exponent eine ganze bejahte Zahl ist, steht in Stifels Arithmetica integra I. B. 5. Cap. daraus ich es in meiner Geschichte der Mathematik, I. Band 120 S. anführt habe. Stifels Buch ist 1544. erschienen, er giebt sich nicht als Erfinder dieses Gesetzes an, ich weiß aber keine frühere Nachricht. Trigonalzahlen nennt er, und deutlich ist man auf das Gesetz durch Betrachtung der figurirten Zahlen gekommen.

Zunächst

Zunächst nach Stifeln finde ich es in Clavii Geometr. practica Rom. 1604. Lib. VI. Prop. 19. Beyde Schriftsteller brauchen es zu Ausziehung der Wurzeln.

Seitdem Buchstabenrechnung eingeführt war, ließ es sich dadurch bequemer ausdrucken als mit Worten, und die das thaten wurden als Erfinder angesehn, ohne daß man mehr an die Vorfahren dachte, die eben das, nur anders gesagt hatten. So nennt Io. Bernoulli Op. T. IV. p. 173; Pascal als den ersten Erfinder, sagt auch er habe es auch gefunden auf eine einfachere Art als Newton, den die Engländer als Erfinder angeben. Jacob Bernoulli Art. Coniect. P. II. c. 8. p. 131. hat gewiesen, wie es aus der Lehre von den Combinationen fliesst: Nähmlich a + b verschiedenemahl mit einander multipliciren heisst soviel als a und b auf verschiedene Arten mit einander combiniren, nur mit dem Unterschiede von Alg. 735; daß hier in einer Verbindung eine Sache zu wiederhohlten mahlen vorkömmt. In dieser Formel der Potenzen für jeden ganzen Exponenten hat man sich nun die Freyheit genommen, statt des Exponenten einen Bruch und eine verneinte Zahl zu setzen, weil Wurzeln und Quotienten dergleichen Exponenten haben. Ob gleich das letztere nun richtig ist, so hat es mir doch immer geschienen, als berechtige uns dieses nicht, in der binomischen Formel den Exponenten einem Bruche oder einer verneinten Zahl gleich zu setzen, weil diese Formel aus dem Begriffe der Multiplication und folglich aus der Voraussetzung, daß der Exponent eine ganze bejahte Zahl ist, hergeleitet wird. Daß gründliche Algebraisten eben dergleichen Bedenken gehabt, erhellt aus ihren Bemühungen, diese Erweiterung zu rechtfertigen, s. Clairaut Algebra IV. Th. 54. u. f. Art. 286. S. in Mylius Uebers. Auch von Segner Elem. Analys. finitor. §. 264; 329; Bey dem Verfahren dieser Gelehrten bleibt mir der Zweifel Alg. 627. übrig. Und eben dieser Zweifel zeigt, warum die

Dif-

Differentialrechnung einen so kurzen und offenbahren Beweis giebt, weil sie nähmlich von der Reihe, in welche eine Potenz aufgelöset wird, nicht alle Glieder braucht (30). Es ist auch einer guten Methode desto weniger zuwider, die Differentialrechnung hier zu brauchen, weil man die Erweiterung der binomischen Formel auf andere als ganze bejahte Exponenten, nicht eher als bey der Rechnung des Unendlichen vorgenommen hat, wovon Newtons analysis per aequationes infinitas; im Commerc. epist. Io. Collins p. 3. und Newtons Briefe daselbst p. 49. 67 Proben enthalten.

Den binomischen Satz, für alle Arten von Exponenten darzuthun ist die Bemühung v. Segner. Nouv. mém. de l'Ac. de Pr. 1777. p. 37. L'Huilier Principior. calc. diff. et int. expositio Tub. 1795. Caput A. p. V. Henr. Aug. Rothe Theor. binom. ex simplicissimis Analyseos finitor. fontibus, Lipsi. 1796. Einladungsschrift zur Antrittsrede der Profession. Alle drey gründen sich darauf: Für eine Potenz geht eine Reihe nach dem binomischen Gesetz, und auch so eine Reihe für eine andere Potenz; beyder Reihen Product giebt beyder Potenzen Product und ist eine Reihe, die nach dem binomischen Gesetze geht.

L'Huilier hat den Beweis mehr entwickelt als Segner. Rothe hat ihn in Hr. Prof. Hindenburgs Zeichen vorgetragen, wo Coefficienten die wievielten sie sind und zu welcher Potenz sie gehören, kurz angedeutet werden. Jeder ist für sich auf diesen Beweis gekommen.

50. Exempel. Für $m = -\frac{1}{2}$ sind die Coefficienten: $-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}.-\frac{3}{2}:2 = +\frac{3}{8}; +\frac{3}{8}.-\frac{5}{2}:3 = -\frac{5}{16}; -\frac{5}{16}.-\frac{7}{2}:4 = +\frac{35}{128}$ u. s. w. also

$$\frac{1}{\sqrt{(1+y)}} = (1+y)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{3}{8}y^2 - \tfrac{5}{16}.y^3 + \tfrac{35}{128}y^4 \ldots$$

Dieſe Reihe multiplicirt mit

$(1+y)^{\frac{1}{2}} = (\text{Alg. } 625.)$
$1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 - \frac{5}{128}y^4 \ldots$

giebt

$$\begin{array}{llll} 1 & -\frac{1}{2}y & +\frac{3}{8}y^2 & -\frac{5}{16}y^3 \quad +\frac{35}{128}y^4 \ldots \\ & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & +\frac{3}{16} \quad -\frac{5}{32} \\ & & -\frac{1}{8} & +\frac{1}{16} \quad -\frac{3}{64} \\ & & & +\frac{1}{16} \quad -\frac{1}{32} \\ & & & \qquad -\frac{5}{128} \end{array}$$

oder $= 1$ weil ſich alle folgende Glieder aufheben, welches als eine Probe dienet, daß beyder Reihen Coefficienten, ſo weit ſie da ſtehen, richtig ſind berechnet worden.

51. Exempel. Für $m = \frac{1}{n}$ iſt $(1+y)^{\frac{1}{n}} =$

$$1 + \frac{1}{n}y + \frac{1.(1-n)}{1.2\,n^2}y^2 + \frac{1.(1-n)(1-2n)}{1.\,2.\,3\,n^3}y^3 \ldots$$

$$\frac{+1.(1-n)\ldots.(1-(r-1)n)}{1.2\ldots\ldots r.\,n^r}y^r$$

$$\frac{+P.(1-rn)}{(r+1).n}y^{r+1}.$$

Wenn der Coefficient bey der Potenz r von y; P heiſſt. Iſt der folgende $= Q$ ſo iſt

$$Q = P\left(\frac{\frac{1}{n}-r}{r+1}\right) = -P.\left(\frac{r-\frac{1}{n}}{r+1}\right)$$ wo das, was

was in P multiplicirt wird, gewiß ein bejahter eigentlicher Bruch ist, es mag nun n eine bejahte oder eine verneinte ganze Zahl seyn. Also ist, ohne Absicht auf das Zeichen, jeder Coefficient kleiner als der vorhergehende; und das Zeichen mit betrachtet ist er dem vorhergehenden allemahl entgegengesetzt.

§2. Exempel. Wenn e eine ganze bejahte Zahl und n (§1) eine ganze verneinte Zahl seyn soll, so setze man $e = -n$; dieses giebt

$$(1+y)^{-1:e} = 1 - \frac{1}{e}y + \frac{1.(1+e)}{1.2\,e^2}y^2 \ldots + \frac{1.(1+e)\ldots 1+(r-1)e}{1.2.\ldots.r.\,e^r}y^r - P.$$

$\frac{r+1:e}{r+1}y^{r+1}$ wo wieder jeder Coefficient kleiner als der vorige und ihm mithin entgegengesetzt ist.

§3. Wenn m (46) ein eigentlicher bejahter Bruch ist, so sind $m-1$; $m-2$; u. s. w. lauter verneinte Zahlen: Also ist der zweyte Coefficient $\frac{m.(m-1)}{1.2.}$ verneint; dieser aber mit $\frac{m-2}{3}$ multiplicirt giebt den dritten bejaht, und so sind ferner alle Coefficienten abwechselnd bejaht und verneint, so daß der erste bejaht ist.

54. Weil $(1-y)^m = 1 - m.y + \frac{m.(m-1)}{1.2} y^2 \ldots$ und also wenn $y = 1$ gesetzt wird; $0 = 1 - m + \frac{m.(m-1)}{1.2}$ u. s. w.

so sind dieser Reihe zweytes, viertes u. s. f. alle Glieder deren Zahl gerade ist verneint, wenn m ein bejahter eigentlicher Bruch ist; denn es sind bejahte Grössen (51) vor denen das Zeichen — steht (Alg. 148.) das dritte, fünfte, und alle folgenden ungeraden Glieder aber sind verneinte Grössen (51) vor denen das Zeichen + steht, (Alg. 148.) und also verneint. Also besteht diese Reihe aus einer 1 und lauter verneinten Grössen, die also zusammen $= -1$ seyn müssen, weil die Reihe $= 0$ seyn soll. Hieraus folgt, daß die unendliche Reihe der Binomialcoefficienten, wenn m ein eigentlicher bejahter Bruch ist, vom ersten, m, an gerechnet, zusammen $= -1$ giebt, welches dient unzählige unendliche Reihen von Brüchen zu finden, deren jede $= 1$ seyn muß.

So ist (51) $1 = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{2n^2} + \frac{(2n-1).(n-1)}{2.3.n^3} + \frac{(3n-1).(2n-1).(n-1)}{2.3.4.n^4}$ u. s. w.

55.

55. Für einen verneinten Werth von m $= -n$ läſſt ſich ein Schluß wie 54 nicht anbringen. Es wird alsdenn

$$(1-y)^{-n} = 1 + ny \frac{+n.(n+1)}{1.\ 2} y^2 \ldots$$

$$\frac{+n.(n+1)\ldots(n+r-1)}{1.\ 2\ \ldots\ r} y^r.$$

In allen Gliedern nähmlich deren Zahl gerade iſt enthält der Coefficient eine ungerade Anzahl verneinter Factoren, und in allen deren Zahl ungerade iſt eine gerade; alſo wäre der Coefficient für ſich, dorten verneint, hier bejaht: Aber in allen geraden Gliedern iſt der Coefficient in eine ungerade Potenz, und in allen ungeraden in eine gerade von $-y$ multiplicirt, folglich das Product allemahl bejaht. Folglich beſteht dieſe Reihe, und alſo auch die, welche herauskömmt, wenn $y = 1$ geſetzt wird, aus lauter bejahten Gröſſen. Jede dieſer Gröſſen, wie

$$\frac{n.(n+1)\ldots(n+r-1)}{1.\ 2\ldots\ldots\ r}$$

iſt endlich, wie groß auch r ſeyn mag; alſo machen ihrer unendlich viel eine unendliche Summe, nähmlich $\frac{1}{0^n}$ welches unendlich iſt. (Trigon. 4. Erkl. 4. Zuſ.)

Formel für die Potenz einer unendlichen Reihe (infinitinomium).

56. Aufg. Die Potenz m der Reihe $1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 \ldots$ zu finden; wo die griechischen Buchstaben gegebene Coefficienten bedeuten.

Aufl. Man setze sie $= 1 + y$; und ihre Potenz m; $= w = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5$ wo man die grossen lateinischen Buchstaben sucht (wie 46). Also ist m. $(1 + y)^{m-1} dy = dw$ oder $mwdy = (1 + y).dw$.

II) Nun ist $dy = (\alpha + 2\beta z + 3\gamma z^2 \ldots) dz$ und $dw = (A + 2Bz + 3Cz^2 \ldots) dz$; also

III) $(1 + y).\frac{dw}{dz} = A + \left.\begin{matrix} A\alpha \\ 2B \end{matrix}\right\} z + \left.\begin{matrix} A\beta \\ 2B\alpha \\ 3C \end{matrix}\right\} z^2$

$+ \left.\begin{matrix} A\gamma \\ 2B\beta \\ 3C\alpha \\ 4D \end{matrix}\right\} z^3 \quad + \left.\begin{matrix} A\delta \\ 2B\gamma \\ 3C\beta \\ 4D\alpha \\ 5E \end{matrix}\right\} z^4 \ldots.$

IV) $\frac{mwdy}{dz} = m\alpha + \left.\begin{matrix} 2m\beta \\ mA\alpha \end{matrix}\right\} z + \left.\begin{matrix} 3m\gamma \\ 2mA\beta \\ mB\alpha \end{matrix}\right\} z^2 +$

$$\left.\begin{array}{l} +\,4\,m\delta \\ +\,3\,mA\gamma \\ +\,2\,mB\beta \\ +\,mC\alpha \end{array}\right| z^3 \qquad \left.\begin{array}{l} +\,5\,m\varepsilon \\ +\,4\,mA\delta \\ +\,3\,mB\gamma \\ +\,2\,mC\beta \\ +\,mD\alpha \end{array}\right| z^4 \quad \ldots$$

V) Wenn man nun die Coefficienten bey einerley Potenzen von z; (coefficientes terminorum homogeneorum) in III; IV; gleich setzt, welches so viel ist, als ob man alles auf eine Seite gebracht hätte, und nach Alg. 624. verführe; so erhält man

$$A = m\alpha;\ B = \frac{(m-1)\,A\alpha + 2\,m\beta}{2};\ C = (m-2)\,B\alpha + (2m-1)\,A\beta + 3m\gamma) : 3;$$
$$D = (m-3)\,C\alpha + (2m-2)\,B\beta + (3m-1)\,A\gamma + 4m\delta) : 4;\ E = (m-4)\,D\alpha + (2m-3)\,C\beta + (3m-2)\,B\gamma + (4m-1)\,A\delta + 5m\varepsilon) : 5.$$

VI) Wenn man das Gesetz, das diese Coefficienten beobachten, bemerkt, so wird man folgenden Ausdruck für den nächsten daraus schliessen:

VII) $F = (m-5)\,E\alpha + (2m-4)\,D\beta + (3m-3)\,C\gamma + (4m-2)\,B\delta + (5m-1)\,A\varepsilon + 6m\zeta) : 6.$

VIII) Diese Vermuthung zu rechtfertigen, und eine allgemeine Formel bequem herauszubringen; will ich jeden Coefficienten der Reihe $1 + y$ mit λ, und mit Beyfügung seiner Zahl

bezeichnen; so daß $\alpha = \lambda 1$; $\beta = \lambda 2$; und die zu z^n und z^{n-1} gehören, λn und $\lambda (n-1)$ heissen. Eben so bedeute L mit beygefügter Zahl, jeden Coefficienten der Reihe w; so daß $L 1 = A$; $L 2 = B$; und Ln und $L (n-1)$ zu z^n und z^{n-1} in dieser Reihe gehören.

Diesem gemäß bedeuten λo und Lo jedes $= 1$. Aber $\lambda -1$; $L -1$ u. s. w. rückwärts sind jeder $= o$.

Die beyden im griechischen und im lateinischen Alphabete gleichgültige Buchstaben, bedeuten also jeder, überhaupt einen Coefficienten seiner Reihe, und zu welcher Potenz er gehört, zeigt die Zahl an die ihm beygeschrieben ist.

Das Zeichen, für ein Product aus dem Buchstaben in die Zahl anzusehen, wird leicht verhütet, wenn zwischen ein Paar Grössen die multiplicirt werden, allemahl das Multiplicationszeichen steht. So lassen sich die Reihen folgendergestalt ausdrücken:

$$1 + y = 1 + \lambda 1 . z \ldots + \lambda r . z^r \ldots + \lambda n . z^n \ldots$$

$$w = 1 + L 1 . z \ldots + Lr . z^r \ldots + Ln . z^n \ldots$$

$$\frac{dy}{dz} = \lambda 1 \ldots + 1 . \lambda r . z^{r-1} \ldots + n . \lambda n . z^{n-1}$$

$$\frac{dw}{dz} = L 1 \ldots + 1 . Lr . z^{r-1} \ldots + n . Ln . z^{n-1}$$

IX. Man suche den Coefficienten des Products $(1+y).dw:dz$ bey z^n.

In der Reihe $dw:dz$ steht vor jeder Potenz von z; ein Product aus einer Zahl die um 1 grösser ist als der Exponent, in L mit eben der Zahl.

Also ist ein unbestimmtes Glied dieser Reihe $=(n-r+1).L(n-r+1).z^{n-r}$.

Dieses unbestimmte Glied, mit der Reihe für $1+y$ unbestimmten Glieder $\lambda r.z^r$ multiplicirt, giebt zum Producte $(n-r+1).L(n-r+1).\lambda r.z^n$ Das Glied des Products $(1+y).dw:dz$ das die Potenz n von z enthält, ist die Summe aller Producte, aus einem Gliede der Reihe $dw:dz$ das die Potenz $n-r$ enthält, in ein Glied der Reihe $1+y$ das die Potenz r enthält.

Nähmlich der Reihe $dw:dz$ Glieder in denen z die Potenzen $n; n-1; \ldots n-r \ldots 0$ hat, jedes nach angezeigter Ordnung in eines der Glieder der Reihe $1+y$ multiplicirt, wo sich die Potenzen $0; 1; \ldots r \ldots n$ befinden.

In jedes dieser Producte verwandelt sich vorhin angegebenes Product aus der beyden Reihen unbestimmten Gliedern, wenn man r von n an durch alle ganze Zahlen bis an 0 abnehmen lässt; auch giebt diese Verwandlung den jedesmahligen Coefficienten jedes einzelnen Products.

Die Summe aller dieſer Coefficienten oder der Coefficient des ganzen Products bey der Potenz n von z; iſt alſo = 1. L1. λn + 2. L2. λ(n − 1) + 3. L3. λ(n − 2) ..... + (n − r + 1). L(n − r + 1). λr .... + n. Ln. λ1 + (n + 1). L(n + 1). 1.

X) Man ſuche den Coefficienten des Products wdy: dz bey z^n. Er beſtehet eben wie in IX; aus den Producten jedes Coefficienten der Reihe dy: dz; die zu den Potenzen n; n − 1; ... n − r; .. o gehören, in einen der Coefficienten der Reihe w; die zu den Potenzen o; 1; ... r; .... n gehören. Er iſt alſo (n + 1) λ(n + 1). 1 + n. λn. L1 + (n − 1). λ(n − 1). L2 ... + r. λr. L(n − r + 1) .... + 2. λ2. L(n − 1) + λ1. Ln.

XI) Weil nun $\frac{m.w.dy}{dz} = \frac{(1+y).dw}{dz}$ (II) ſo ſind in der Reihe linker Hand, und in der rechter Hand, die Coefficienten gleich, die zu einerley Potenz von z gehöre, alſo auch zu der n.

Man multiplicire den in (X) gefundenen Coefficienten, die Glieder rückwärts geordnet mit m, ſo kömmt m. λ1. Ln ... + m. r. λr. L(n − r + 1) ... + m. (n + 1). λ(n + 1). 1.

Das beträgt ſo viel als der Coefficient in (IX) auch rückwärts geordnet oder als (n + 1).

$L(n+1).1..i(n-r+1).L(n-r+1).\lambda r...+1.L1.\lambda n$. Beyde gleich geſetzt kömmt $(n+1).L(n+1).1=(m-n).L\,n.\lambda 1....+(m.r-n+r-1).L(n-r+1).\lambda r....+m(n+1)...\lambda(n+1)$.

XII) Wenn man hier, was zur rechten Hand des Gleichheitszeichens ſteht, mit $n+1$ dividirt, ſo erhält man einen allgemeinen Ausdruck für $L(n+1)$ durch die gleich anfangs gegebenen Coefficienten der Reihe $1+y$ und durch die ſchon gefundenen vorhergehenden der Reihe w; wo ſich dann zeiget, daß das (VI) beobachtete Geſetz allgemein iſt.

XIII) Dieſer allgemeine Coefficient (XII) deſſen Nenner $n+1$ iſt, hat zum allgemeinen Gliede des Zählers $(mr-n+r-1).L(n-r+1).\lambda r$, welches alle Glieder des Zählers giebt, wenn man nach der Ordnung 1; 2;.... $n+1$ ſtatt r ſetzt.

XIV) Wenn man ſtatt A; B; u. ſ. w. ihre Werthe ſetzt, ſo findet ſich

$$A=m\alpha$$

$$B=\frac{m.(m-1)}{1.2.}\alpha\alpha+m\beta$$

$$C=\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}\alpha^3+m.(m-1).\alpha\beta+m\gamma$$

u. ſ. w. die folgenden Coefficienten aber werden immer mehr und mehr

zu-

zusammengesetzt, wie man beym Wolf El. analyf. fin. §. 102. sehen kann; und ich zweifle, ob sich das Gesetz des Fortganges der auf diese Art ausgedrückten Coefficienten mit gehöriger Schärfe würde erweisen lassen. Selbst zum Gebrauche ist mein Ausdruck bequemer, weil man doch einen Coefficienten nach dem andern berechnet, und es also am bequemsten ist, wenn die folgenden nicht ganz von neuem, sondern vermittelst der schon berechneten vorhergehenden gefunden werden.

XV) Die allgemeinste Reihe $\pi u^e + \alpha u^{e+w} + \beta u^{e+2w} \ldots$ läßt sich auf den Ausdruck $\pi u^e (1 + \frac{\alpha}{\pi} u^w + \frac{\beta}{\pi} u^{2w} \ldots)$ bringen, welcher sich wenn $u^w = z$ gesetzt wird, in $\pi z^{e:w} (1 + \frac{\alpha}{\pi} z + \frac{\beta}{\pi} z^2 \ldots)$ verwandelt. Es ist klar, daß man nur die Potenz m des letzten Factors der unendlichen Reihe, suchen, jedes Glied derselben durch diese Potenz des ersten Factors multipliciren, und alsdenn statt z seinen Werth u^w setzen darf. Daß also das Verfahren gegenwärtiger Aufgabe, zulänglich ist, die Potenz jeder unendlichen Reihe zu finden.

57. Anm. Jac. Bernoulli Op. T. II. n. 103. art. 1. lehret zwo Arten die Potenz einer unendlichen Reihe zu finden. Eine davon, welche die Integralrechnung erfodert, zieht er der andern vor, weil sie das Gesetz der Coefficienten besser vor Augen stellte, sie scheint

scheint mir aber nicht so geschickt dergleichen Gesetz allgemein zu erweisen, als mein Verfahren. Die Erinnerung, die ich (56. XV.) gemacht habe, findet sich auch in Cramers Anmerkungen bey dieser Stelle Bernoullis, weil Bernoulli geglaubt hatte, die Reihe $1 + \alpha z \ldots$ sey nicht allgemein genug. Zuvor hatte schon de Moivre Trans. n. 230. und aus ihm Colson in s. Comment. über Newtons Method of Fluxions p. 312. diese Aufgabe aufgelöset, aber so, daß sich das allgemeine Gesetz der Coefficienten nicht so leicht erweisen läßt wie aus meinem Verfahren. Des Moivre Reihe findet sich beym Wolf (56. XIV.) weiter fortgeführt als beym Colson. Das Gesetz, das ich hier angewiesen habe, findet sich auch beym Euler Inst. Calc. diff. P. II. §. 202.

58. Aus 56. folgt die Potenz jeder endlichen Reihe. So ist für eine dreytheilichte Wurzel $0 = \gamma = \delta = \varepsilon$ u. s. w. also der allgemeine Coefficient von $(1 + \alpha z + \beta z^2)^m$ aus 56; XII. $L(n+1) = (m-n).\,Ln.\,\alpha + (2m-n+1).\,L(n-1)\,\beta + (3m-n+2).\,L(n-2).\,\gamma) : (n+1)$. Hier ist für den ersten Coefficienten $n = 0$; also $A = m.\,\alpha$ (56. XIII.). Für den zweyten und dritten $n = 1$; $= 2$; also $B = (m-1)\,A.\,\alpha + 2m\beta) : 2$; $C = (m-2).\,B.\,\alpha + (2m-1).\,A.\,\beta) : 3$. u. s. w. wie in 56. V. wenn dorten $\gamma = \delta = \varepsilon = 0$ gesetzt werden.

59. Auch kann man die Reihe unendlich lassen, aber die Potenz bestimmen. So ist für $m = 2$; der allgemeine Coefficient (56. XI.) des Quadrates einer unendlichen Reihe

$(2-n).\,Ln.\,\lambda 1 + (5-n).\,L(n-1).\,\lambda 2 + (8-n).\,L(n-2).\,\lambda 3 \ldots + (3r-1-n).$

$L(n-r+1).\lambda r \ldots + 2.(n+1).\lambda(n+1):(n+1)$.

60. Exempel. Für eine dreytheilichte Wurzel wird dieser Ausdruck (59) $(2-n).\mathrm{Ln}.\alpha + (5-n).L(n-1).\beta):(n+1)$. Setzt man hier nach und nach 0; 1; 2; 3; 4; 5; statt n; so bekömmt man

$$A=2\alpha;\ B=\frac{A\alpha+4\beta}{2}=\alpha\alpha+2\beta;\ C=\frac{3A\beta}{3}=2\alpha\beta;\ D=-\frac{C\alpha+2B\beta}{4}=\beta\beta;$$

$$E=-\frac{2D\alpha+C\beta}{5}=0;\ 6F=-3E.\alpha+0.D.\beta=0;$$

für $n>5$ verschwinden also Ln und $L(n+1)$ daher das Quadrat einer dreytheilichten Wurzel auf diese Art wie durch die gewöhnliche Rechnung gefunden wird.

61. Dieses Exempel zeigt, wie die Reihe w (56) für eine Wurzel von einer bestimmten Menge von Theilen abbricht, wenn man statt m eine ganze Zahl setzt, weil alsdenn die Coefficienten (59) verschwinden.

62. Es erhellt aber, daß m in 56 alle Werthe haben darf, die es in 46 haben durfte, weil die Auflösung beyder Aufgaben völlig auf einerley Gründen beruhet. Ich habe die (56) in einem hier 1759. herausgegebenen Programma: infi-

infinitinomii ad potentiam indefinitam eleuati formula, bekannt gemacht.

Herr Prof. Hindenburg infinitinomii dignitatum exponentis indefiniti hiſtoria, leges ac formulae. Gott. 1779; beruhet auf Combinationen. Macht den Anfang der Erweiterungen welche die Analyſis durch die combinatoriſche Analytik vermittelſt ſeiner Bemühungen und Anleitungen erhalten hat. Einige dahin gehörige Schriften nenne ich An. endl. Gr. 748. Mehrere dergleichen finden ſich beſonders in dem von Herrn Prof. Hindenburg ſeit 1794. beſorgten Archiv für reine und angewandte Mathematik, davon um Michaelis 1797; der ſechſte Heft erſchienen iſt. Vorzüglich muß erwähnt werden: Der polynomiſche Lehrſatz, das wichtigſte Theorem der ganzen Analyſis, nebſt einigen verwandten u. a. Sätzen. Neu bearbeitet und dargeſtellt, von Tetens, Klügel, Kramp, Pfaff und Hindenburg. Leipz. 1796.

Beſtimmung der Tangenten der krummen Linien; durch die Differentialrechnung.

63. Lehrſ. LMN iſt ein zuſammenhängender Bogen einer krummen Linie, welcher ganz auf einer Seite ſeiner Sehne LN liegt, M befindet ſich zwiſchen L und N; die geraden Linien LM, MN, ſind Sehnen der beyden Bogen die jenen ganzen

ganzen ausmachen, von M auf beyde Seiten genommen, daß die drey geraden Linien LN, LM, MN, ein Dreyeck einschliessen.

Nun lasse man dem Puncte M, sich die bey- L, N, nähern; so wird der Winkel LMN immer grösser, und kömmt zween rechten so nah als man will, wenn die Puncte L, N, dem M, so nahe kommen können als man will. Man kann also allemahl die Bogen vom mittlern Puncte so klein nehmen, daß der Winkel von zween rechten weniger unterschieden ist, als um irgend einen gegebenen Unterschied.

Bew. Dieß ist weiter nichts als das Gesetz der Stetigkeit Geom. 6. Erkl. Anmerk. Ein Punct nähmlich, der den Weg LMN beschreibt, muß in M wenn er nach N zu geht, seinen Weg so ändern, daß der Weg, auf dem er nach N zu geht, von dem, auf welchem er von L nach M kam, weniger als um jeden gegebenen Unterschied abweicht. Nimmt man innerhalb des Bogens LM eine Stelle und zieht von solcher eine gerade Linie nach M; so unterscheidet sich der wahre Weg, den der Punct aus dieser Stelle nach M nimmt, von dieser geraden Linie desto weniger, je näher die Stelle bey M ist, und der Unterschied wird unendlich vermindert, wenn die Stelle dem Orte M unendlich nahe rückt. So verhält es sich auch mit einer Stelle in dem Bogen MN; die geraden Linien also von M nach beyden

beyden Stellen müſſen von einer einzigen geraden Linie unendlich wenig unterſchieden werden, oder ihr Winkel muß 2R unendlich nahe kommen.

64. Weil die gerade Linie von einer ſolchen Stelle nach M, dem wahren Wege des Punctes, d. i. dem Bogen zwiſchen der Stelle und M unendlich nahe kömmt, ſo kann man beyde für eines halten. In dieſem Verſtande ſtellt man ſich vor, die krumme Linie beſtehe aus unendlich kleinen geraden Linien als Elementen (G. 41. S. 5. Z.).

65. Von zween Bogen verſchiedener Schenkel einer krummen Linie, die einander in M ſchneiden 3. Fig. gilt 63 nicht. Ein Exempel geben Alg. 483; und daſelbſt III. Taf. 22. Fig. die beyden Bogen αδC; αDC; welche den Knoten der Muſchellinie machen, wenn das dortige C hier den Punct M 3 Fig. bedeutet.

66. Lehrſ. Der ganze Bogen LMN, liege auf einer Seite der geraden Linie TMV 1 Fig. die ihn alſo in M berührt. (Alg. 449). Ich ſage, man könne durch M, keine gerade Linie auf der Seite der Linie MV auf welcher N liegt, ziehen, die den Bogen MN nicht ſchneide; d. i. man könne keine gerade Linie zwiſchen der Tangente und dem Bogen MN ziehen.

Bew. Geſetzt MH 3 Fig. ſey eine gerade Linie zwiſchen der Tangente und dem Bogen MN; So fällt MT nothwendig zwiſchen ihre Verlängerung Mh und den Bogen MN; So nahe man alſo auch die Stellen N; L; dem Orte M rücken läſſt, ſo können die Sehnen ML; MN; doch nie einen gröſſern Winkel mit einander machen als der Winkel TMH iſt, und folglich kann ihr Winkel ſich 2R nicht unendlich nähern, wieder 63.

67. Wenn LMN ein zuſammenhängender Bogen einer krummen Linie ſeyn ſoll, ſo kann er nicht ganz auf einer Seite der geraden Linie TMV; und zugleich auch auf einer Seite der geraden Linie hMH liegen. Das iſt: Ein Bogen einer krummen Linie hat an einem Puncte nicht mehr als eine Tangente. Zweene Bogen, die einander in einem Puncte ſchneiden, können jeder an dieſem Puncte ſeine eigene Tangente haben (65). Dergleichen wären LM; MN; 3 Fig. ihre Tangenten, MT; MH;

68. Der Punct N 1 Fig. kann dem Puncte M allemahl ſo nahe rücken, daß der Winkel VMN kleiner wird als jeder gegebene Winkel; oder: wenn N unendlich nahe an M rückt, ſo wird VMN unendlich klein. Denn jede gerade Linie durch den Berührungspunct, die einen endlichen Winkel mit der Tangente macht, ſchneidet die krumme Linie (66) alſo kann der Punct

N

N allemahl so nahe an M rücken, daß er zwischen die nur genannte gerade Linie und die Tangente fällt; d. i. daß die Sehne MN mit der Tangente einen kleinern Winkel macht als die nur genannte gerade Linie, d. i. einen kleinern Winkel als jeder endliche Winkel ist.

Weil nun der Bogen MN zwischen Tangente und Sehne fällt; der Winkel der Tangente und Sehne aber unendlich abnimmt, so nähern sich Sehne, Bogen und Tangente, unendlich einem Zustande, da sie nicht mehr zu unterscheiden sind; einem Zustande, da das Element des Bogens, oder sein unendlich kleiner Theil, von den beyden geraden Linien, der Sehne und der Tangente, nicht mehr zu unterscheiden ist. Man sieht also das Element des Bogens als einen geraden, unendlich kleinen Theil der Tangente oder die Tangente als des Elements Verlängerung an; dieser Ausdruck will der Schärfe nach sagen: der Bogen kann durch beständige Verminderung so weit gebracht werden, daß er sich in der Lage und in der Länge, von seiner Sehne, und von einem der Sehne gleichen Stücke der Tangente, weniger als jede angebliche Grösse beträgt, unterscheidet. Siehe Geom. 41. S. 5. Z. und Anm.

69. Erkl. Ein Bogen LMN einer krummen Linie 1 Fig. ist nach einer Gegend O zu hohl (concauus) wenn die Sehnen LM; MN; so

vielmahl man auch drey Puncte innerhalb dieſes Bogens nehmen kann, allemahl nach dieſer Gegend zu Winkel machen, die weniger als 2 R betragen. Nach der andern Seite zu, wie nach O 4 Fig.; iſt er erhaben (conuexus).

70. Der Bogen fällt zwiſchen die Tangente und die Gegend, nach der er hohl iſt, 1 Fig. aber die Tangente fällt zwiſchen ihn und die Gegend, nach der er erhaben iſt. 4. F.

71. Wenn VNQ 1 F. NVQ 4 F. der Ordinate MP und MS der Abſciſſe AP; parallel iſt, ſo iſt MNS = MVS ± VMN das obere Zeichen für den hohlen Bogen, das untere für den erhabenen.

72. MNS nähert ſich dem Winkel MVS unendlich (68).

73. VS : MS = ſin VMS : ſin MVS (Tr. 10 S.
MS : NS = ſin MNS : ſin NMS

VS : NS = ſin VMS. ſin MNS : ſin NMS.
ſin MVS (Arithm. V. 50.).

In der letzten Verhältniß nun nähern ſich die beyden erſten Factoren ihres erſten und zweyten Gliedes einander unendlich (68) und eben das thun die beyden letzten; (72) alſo nähert ſich die Verhältniß VS : NS unendlich der Verhältniß der Gleichheit.

74. VN wird alſo in Vergleichung mit NS immer kleiner und kleiner, ſo daß es in Vergleichung

chung damit, weniger als jede angebliche Gröſſe (1) ſo klein ſie auch iſt, in Vergleichung mit einer andern angeblichen beträgt; oder VN verſchwindet gegen NS (5).

75. Die Verhältniß VS: SM nähert ſich unendlich der Verhältniß NS: SM.

76. Erkl. Wenn die verlängerte Tangente, der Abſciſſenlinie in T begegnet, ſo heiſſt PT die Subtangente.

77. Aufg. Die Verhältniß der Ordinate zur Subtangente, MP: PT zu finden.

Aufl. MP: PT = VS: SM (71) wie groß oder wie klein auch die Entfernung zwiſchen VQ und MP iſt, wenn man aber die erſte Linie ſich der zweyten unendlich nähern läſſt, ſo nähert ſich die Verhältniß VS: SM unendlich der Verhältniß NS: SM (75). Folglich iſt MP: PT der Verhältniß NS: SM unter der Bedingung gleich, daß N unendlich nahe bey M iſt. Da iſt aber NS: SM die Verhältniß der Differentialen der Ordinate und Abſciſſe (14) heiſſt alſo PM = y; AP = x; ſo iſt $PT = \frac{y.\,dx}{dy}$ welches man in endlichen Gröſſen findet, wenn man nach den Regeln der Differentialrechnung den Quotienten $\frac{dx}{dy}$ ſucht. Daraus findet man auch AT = TP — AP.

78. Wenn Mm das Element der krummen Linie (68) bedeutet, so ist $mR = dy$; $MR = dx$ da denn die Aehnlichkeit der Dreyecke MmR; TMP; eben das giebt. Das Dreyeck MmR welches vom Barrow (s. 90.) schon betrachtet worden, hat Leibniz triangulum characteristicum genannt, weil sich dadurch die krummen Linien unterscheiden lassen.

79. Wenn N sich M unendlich nähert, also NS unendlich klein wird, so wird VN in Vergleichung mit einer unendlich kleinen Grösse unendlich klein, (74) oder ein Unendlichkleines der zweyten Ordnung, wenn NS eines der ersten ist; oder wenn $NS = \frac{1}{\infty}$ so ist $VN = \frac{1}{\infty^2}$. (11). Die Meinung ist: indem VN und NS zugleich abnehmen so wird VN zu einer Zeit kleiner als jede angebliche Grösse, da sich die Grösse von NS noch angeben läßt.

80. In den Figuren, auf welche sich die Rechnung 77. gründet, ist angenommen, daß Ordinaten und Abscissen von M nach N zu, zugleich wachsen, auch von N nach M zu zugleich abnehmen, oder daß ihre Differentiale beyde zugleich bejaht oder verneint sind, (23) folglich ihr Quotient bejaht ist, und also auch die Subtangente bejaht ist, wenn die Ordinate bejaht angenommen wird. Zugleich aber erhellt aus eben den Figuren, daß die Subtangente von P nach dem

dem Anfange der Abscissen zu fällt, oder T und A auf einer Seite der Ordinate liegen.

81. Nähme aber die Ordinate ab, indem die Abscisse zunimmt, wie wenn B der Anfang der Abscissen BQ, BP, wäre, so wäre der Quotient ihrer Differentiale verneint, und also auch die Subtangente bey einer bejahten Ordinate verneint. Da lägen aber T und B auf verschiedenen Seiten der Ordinate.

82. Bey einer verneinten Ordinate wäre die Subtangente in 80 verneint, in 81 bejaht.

83. Kurz: Wenn für wachsende Abscissen, die krumme Linie sich von der Abscissenlinie entfernt, liegen Abscisse und Subtangente, auf einer Seite der Ordinate, aber auf entgegengesetzten, wenn für wachsende Abscissen, die krumme Linie sich der Abscissenlinie nähert.

Wenn man also nur den Werth von $\frac{y.dx}{dy}$ berechnet, ohne darauf zu sehn ob dieser Werth bejaht oder verneint ist, so giebt nur beygebrachte Bemerkung, die Lage der Subtangente, welche Lage auch dadurch angedeutet wird, ob der Werth bejaht oder verneint ist.

Exempel zu 77.

84. Aufg. Die Subtangente der Parabel (Alg. 349.) zu finden.

Aufl. Aus der Gleichung für die Parabel $yy = bx$ wird die Differentialgleichung $2ydy = bdx$ (18; 24) oder $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{b}$; folglich $PT = \frac{2yy}{b} = \frac{2bx}{b} = 2x$ oder die Subtangente ist der doppelten Abscisse der Parabel gleich, wenn die Abscissen vom Scheitel gerechnet werden.

Verzeichnung. An den gegebenen Punct der Parabel M; eine Tangente zu ziehen, ziehe man die Ordinate MP; und nehme AT vom Scheitel rückwärts (83) der Abscisse AP gleich, so ist TM die Tangente.

85. Aufg. Die Subtangente für die Ellipse (362) und Hyperbel (389) zu finden.

Aufl. Die Gleichung $yy = bx \mp \frac{bxx}{a}$ wo das obere Zeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel gilt, giebt $2ydy = \left(b \mp \frac{2bx}{a}\right)dx$ oder $\frac{dx}{dy} = \frac{2ay}{b.(a \mp 2x)}$ folglich $\frac{y.dx}{dy}$ oder $PT = \frac{2x.(a \mp x)}{a \mp 2x}$ Also $PT - x$ oder $AT = \frac{ax}{a \mp 2x}$

Verzeichnung. An den gegebenen Punct M der Ellipse oder Hyperbel eine Tangente zu ziehen, ziehe man seine Ordinate, und suche die vierte

vierte Proportionallinie zu $a \mp 2x$; x; a; welche vom Scheitel hinausgenommen den Punct T giebt.

Für die Ellipse ist der Zähler der Subtangente beständig bejaht, (Alg. 375.) der Nenner aber bejaht oder verneint, nachdem die Abscisse vom Scheitel an gerechnet kleiner oder grösser als die halbe Axe ist. In jenem Falle also liegen Subtangente und Anfang der Abscissen auf einer Seite der Ordinate, in diesem auf verschiedenen, wie die Figur der Ellipse so gleich zeigt. Für die Hyperbel gäbe es noch mehr Fälle zu unterscheiden, weil x ohne Ende wachsen, und auch verneint werden kann, jeder aber wird sich aus der Figur entscheiden und mit 83 vergleichen lassen.

86. Für $x = \frac{1}{2} a$ ist bey der Ellipse $\frac{dy}{dx}$ oder $b \cdot \frac{a - 2x}{2ay} = \frac{b \cdot 0}{2ay} = 0$. Also verschwindet hier dy in Vergleichung mit dx; das heisst; um den Mittelpunct herum nimmt die Ordinate unendlich weniger zu als die Abscisse. Folglich wird daselbst der Winkel mMR (78) unendlich klein; oder die Tangente mMT der Abscissenlinie parallel. Damit stimmt überein, daß in diesem Falle $PT = a \cdot \frac{\frac{1}{2}a}{0}$ unendlich wird. Eben

so wird $\frac{dx}{dy} = \frac{2ay}{b.o}$ unendlich, welches weiter nichts gesagt ist, als daß der umgekehrte Bruch $\frac{dy}{dx}$ verschwindet.

87. Ueberhaupt, wenn für eine gewisse Abscisse $\frac{dy}{dx} = o$ wird, so ist die Tangente der Abscissenlinie parallel, und folglich senkrecht auf eine Linie, die auf die Abscissenlinie senkrecht ist, wie AD 1 Fig. Hieraus sieht man, was es bedeutet, wenn $\frac{dy}{dx} = \infty$; unendlich wird. Alsdenn ist $\frac{dx}{dy} = o$ oder die Tangente ist der Linie AD parallel, welche mit dem Ordinaten y parallel geht, und also auf die Linie der Abscissen x senkrecht, wenn APM ein rechter Winkel ist.

88. Die Regeln 85, verwandeln sich nach 10 in 84 wenn $a = \infty$ gesetzt wird; wegen Alg. 384.

89. Diese Vorschriften gelten auch, wenn die Abscissenlinie gleich nicht die Axe, sondern nur ein Durchmesser ist. Alg. 453.

90. Anm. Die Regel 77 kömmt völlig auf eines mit derjenigen heraus, die Barrow Lect. Geometr. X. am Ende als einen Anhang nach art. XIV. gegeben hat, nur daß er sich anderer Ausdrückungen bedient. Man kann nähmlich AF = y; Abscisse und FM = x Ordi-

Ordinate nennen. Nun hat Newton, Barrows als seines Lehrers Schriften gewiß gelesen, und Leibniz vielleicht auch. Ferner sind die ersten Anwendungen der Fluxionen und der Differentialrechnung auf die Ziehung der Tangenten gemacht worden. Diese Erinnerung gehört zu 44. Jac. Bernoulli hat sie schon in s. ersten Specimine calculi differentialis Act. Erud. Lipſ. Ian. 1691. gemacht; und vermuthlich um Leibnitzen nicht zu mißfallen, am Ende des zweyten Speciminis (daſ. Iun. 1691.) etwas gemildert. S. Op. Iac. Bern. p. 431. und 453.

91. Eine gleichartige Gleichung zwiſchen zwo veränderlichen Gröſſen (An. endl. Gr. §31.) läſſt sich so darstellen: $y^{\alpha} + a. y^{\alpha-\varepsilon}. x^{\varepsilon} = b. x^{\alpha}$ wo a, b, Zahlen bedeuten.

Aus ihr findet man

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\alpha. y^{\alpha-1} + (\alpha-\varepsilon). a. y^{\alpha-\varepsilon-1}. x^{\varepsilon}}{\alpha. b. x^{\alpha-1} - \varepsilon. a. y^{\alpha-\varepsilon}. x^{\varepsilon-1}}$$

Alſo die Subtangente =

$$\frac{\alpha. y^{\alpha} + (\alpha-\varepsilon). a. y^{\alpha-\varepsilon}. x^{\varepsilon}}{\alpha. b. x^{\alpha-1} - \varepsilon. a. y^{\alpha-\varepsilon}. x^{\varepsilon-1}}$$

Der Dividend iſt so groß als ein Product aus x in Diviſor folglich iſt die Subtangente = x. Die gebrauchte Gleichung enthält alle gleichartige Gleichungen zwiſchen zwo veränderlichen Gröſſen. Die Rechnung thut alſo allgemein dar, daß die Subtangente der Abſciſſe gleich iſt.

Nähm-

Nähmlich eine solche Gleichung gehört für gerade Linien die durch den Anfang der Abscissen gehn, und eine gerade Linie ist ihre eigne Tangente.

Bernard Nieuwentiit, analysis infinitorum, seu curuilineorum proprietates ex polygonorum natura deductae. Amst. 1695; giebt Gleichheit der Subtangente mit der Subtangente, als eine Merkwürdigkeit gleichartiger Gleichungen an, Cap. 1. §. 21. Ich weiß nicht ob er an die geraden Linien gedacht hat, denen die Gleichung gehört.

92. Erkl. Wenn MO auf die Tangente senkrecht steht, und die Abscissenlinie in O schneidet, so heisst sie eine Normallinie und PO die Subnormallinie.

Wenn die Ordinaten mit den Abscissen rechte Winkel machen, so ist die Subnormallinie

$PO = \frac{PM^2}{PT} = (77)\ \frac{ydy}{dx}$ wie auch aus der Aehnlichkeit der Dreyecke MmR; MOP erhellt.

93. Also für die Parabel (84) $= \frac{1}{2}b$ oder unveränderlich, und allemahl dem halben Parameter gleich.

Für die Ellipse und Hyperbel (85) $= b.\frac{(a \mp 2x)}{2a}$.

94.

94. Anm. Wenn in der Ellipse $x = \frac{1}{2}a$; so wird die Subnormallinie $= o$ wegen (87). Ist $b = a$, daß die Ellipse sich in einen Kreis verwandelt, so wird die Subnormallinie des Kreises $= \frac{1}{2}a - x = OP$ 1 Fig. wenn LMN der Bogen eines Kreises um den Mittelpunct O wäre, weil da alle Normallinien durch den Mittelpunct gehen.

95. I) Man nehme 1 Fig. auf der Normallinie $MG = c$. Geschieht eben das auf jeder andern Normallinie, so bekömmt man eine Reihe Puncte, deren jeder von der krummen Linie CM um die Entfernung $= c$ absteht. Diese sind also in einer krummen Linie welche man der CM gleichlaufend (aequidistantem) nennen kann. Ich ziehe diese Benennung der parallel vor, weil parallel ursprünglich von geraden Linien gebraucht wird, die in einer Ebene sind und keinen Punct gemein haben; die sind freylich auch gleichlaufend, es giebt aber krumme Linien in einer Ebene, die keinen Punct gemein haben, und doch weder parallelae noch aequidistantes heissen, z. E. eine Hyperbel und eine Parabel über einer Axe da die Hyperbel ganz auser der Parabel liegt.

II) Von G falle auf die Axe CO ein Perpendikel $= u$; Es schneide auf AO von C an ein Stück $= t$ ab; so sind t, u; Coordinaten der gleichlaufenden Linie.

III)

so nehme man auf dem Faden ein Stück GM = c; Da beschreibt M, die CM und G die gleichlaufende.

Läßt man eine Kreisscheibe deren Durchmesser = g an der CM rollen, so beschreibt der jedesmahlige äuserste Punct der Scheibe, die gleichlaufende.

Diese beyden Verfahren schlägt Leibniz vor curuas parallelas, wie er sie nennt zu beschreiben. Act. Er. Lipſ. 1695; p. 93; Der Aufsatz steht auch in Ioann. Bern. Operib. T. I. n. 29. p. 253. Begreiflich dient keines zur Ausübung im Grossen.

X) Man beschreibe um einen Mittelpunct, ein Paar ähnliche Ellipsen, deren grosse Axen auf einer und derselben geraden Linie liegen. Ihre Tangenten an ähnlich liegenden Puncten sind parallel aber jedes Paar solcher Tangenten hat einen andern Abstand. So was könnte man doch auch gleichlaufende krumme Linien nennen wo die Entfernung zusammengehöriger Puncte veränderlich wäre.

XI) Ausgeführt findet sich diese Untersuchung in meiner Abh. de curuis aequidiſtantibus, Commentat. Soc. ſc. Gott. T. XI. ad 1791 et 92.

XII) CM sey eine Parabel, deren Scheitel C, Parameter = b; CP = x; PM = y = $\sqrt{(b.x)}$. Man nehme CA = h; und beschreibe eine gleiche äusere Parabel deren Scheitel C;

Ab-

Abſciſſe $CP = h + x$, Ordinate dem Puncte P zugehörig $= z = \sqrt{(b.(h+x))}$. Nimmt man von A eine Abſciſſe $= x$ ſo gehört ſolcher in der äuſern Parabel eine Ordinate $= y$, die ſteht von der Ordinate PM, nach A zu um h ab, und eine gerade Linie durch ihr Ende und M, iſt der gemeinſchaftlichen Axe beyder Parabeln parallel und $= h$. Es giebt alſo in beyden Parabeln, Paare zuſammengehöriger Puncte, jedes Paar in einer Parallele mit der gemeinſchaftlichen Axe, welche immer den Abſtand $= h$ haben. In dieſer Bedeutung könnten die beyden Parabeln einander gleichlaufend heiſſen, eigentlich ſind beyde freylich eine und dieſelbe Parabel, längſt der Axe verſchoben.

XIII. Ferner iſt $z^2 - y^2 = b.h$, alſo $z - y = \frac{b.h}{z+y}$. Nun gehören einem Puncte P, der weiter von C alſo auch von A liegt, ein gröſſeres z, und ein gröſſeres y, folglich ein kleineres $z - y$. Auch kann $z + y$ ins Unendliche wachſen, ſo wird $z - y$ kleiner als jede angebliche Gröſſe.

Bey innerer und äuſerer Parabel findet ſich ſo was wie bey Hyperbel und Aſymptote (Anendl. Gr. 408.). Man kann alſo auch ſagen: die äuſere Parabel ſey der innern Aſymptote, oder: eine Parabel längſt der Axe verſchoben ſey ihre eigne Aſymptote.

XIV. Dieſes nur als einfache Exempel von mancherley Bedeutung, gleichlaufender krummen Linien (X; XII) und krummlinichter Aſymptoten (XIII.)

96. Mm, mn; 5. Fig. ſind zweene nach einander folgende gleiche Bogen eines Kreiſes um den Mittelpunct O; Sie mögen anfangs beyde endlich ſeyn. MS ſey die Tangente bey M. Der Winkel MOm = mOn heiſſe u; die Sehne Mm ſey in W verlängert, und mn die andere Sehne; So iſt OMS = R; OMm = OmM = Omn = R — ½ u (G. 13. S. 5. Z.) folglich Wmn = WmO — Omn = mMO + u — mMO = u. Iſt OmS = R ſo ſchneiden beyde Tangenten einander unter dem Winkel VSm = u. Nähern ſich nun (wie in 63) die Puncte M, n, dem m, und ſo die Sehnen Mm; mn; ihren Bogen unendlich, daß ſich die Sehnen in Elemente des Kreiſes verwandeln (G. 41. S. 2. Z.) ſo wird der Winkel u unendlich klein, und der Satz wird ſo ausgedrückt: Wenn der Kreis in gleiche Elemente eingetheilet wird, ſo macht die Verlängerung jedes Elementes mit dem folgenden einen Winkel, welcher ſo groß iſt als der Winkel, der jedem Elemente am Mittelpuncte zugehört. Der Winkel eines Elements aber mit dem Halbmeſſer iſt von einem rechten, um die Hälfte des nur genannten Winkels unterſchieden. Wenn man die unendlich kleinen Veränderun-

Varignon in Hist. de l'Ac. R. des Sc. A. 1722.

PARSONS LIBRARY University of MICHIGAN

derungen, zu- oder abnehmender Winkel sucht, so muß man OMm $= R - \frac{1}{2}u$ annehmen; Sonst aber kann OMm $= R$ gesetzt werden, von dem es unendlich wenig unterschieden ist.

97. Aufg. Eine Tangente der Muschellinie Alg. 479. zu ziehen.

Aufl. I. In der dortigen Gleichung $(b+x)\sqrt{(aa-xx)} = yx$ setze man $aa - xx = zz$ also $-\frac{xdx}{z} = dz$; ferner ist $(b+x)z = yx$ also $dz = \frac{(y-z)\,dx + xdy}{b+x}$ beyde Werthe von dz einander gleich gesetzt, geben nach gehöriger Rechnung $dx:dy = x:z-y-\frac{bx}{z}-\frac{x^2}{z}$.

II. Wenn man nun Alg. III. T. 21. Fig. die Abscissen auf EF nimmt, so heissen sie y; und die Ordinaten x; Heisst also die Subtangente die Entfernung zwischen den beyden Puncten, R, und dem wo die Tangente der Abscissenlinie begegnet, so verhält sich $dx:dy = x:$ Subtangente, sie ist also $= z - y - \frac{x.(b+x)}{z}$.

III. Aber $z-y = \frac{x.y}{b+x} - y = \frac{-b.y}{b+x}$ und $\frac{x.(b+x)}{z} = \frac{(b+x)^2}{y}$; Also ist die Subtan-

gente $= -\frac{b.y}{b+x} - \frac{(b+x)^2}{y} = -$

$\frac{b.\sqrt{(a^2-x^2)}}{x} - \frac{(b+x).x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = -$

$\frac{(a^2.b+x^3)}{x.\sqrt{(a^2-x^2)}}$.

IV. Ueber der Asymptote BF; nimmt die Ordinate MR = x beständig ab, indem die Abscisse ER = y, zunimmt, also liegen Subtangente und Anfang der Abscissen auf entgegengesetzte Seiten der Ordinate, (83) Eben so verhält es sich meist unter der Asymptote einige Stellen des Knotens ausgenommen.

V. Für x = o oder = a; wird die Subtangente unendlich, die Tangente ist in jenem Falle die Asymptote, in diesem der Asymptote parallel.

VI. Für den Punct C; ist x = — b und die Subtangente $= \frac{-(a^2.b-b^3)}{-b.\sqrt{(a^2-b^2)}} = -$ $\sqrt{(a^2-b^2)}$. Dem Puncte C gehört die Abscisse y = o; Man nehme also $\sqrt{(a^2-b^2)}$ auf der Asymptote, auf beyden Seiten von E, weil jede Quadratwurzel bejaht oder verneint kann genommen werden, das sind die Subtangenten für den Punct C; jede für einen der Schenkel welche durch C gehn.

VII.

VII. Die Subtangente in (III) $= \sigma$ gesetzt giebt $x = -\sqrt[3]{-a^2 b}$, das hat nur einen möglichen Werth, und den verneint. Begreiflich ist dieses x, eine Ordinate für die beyden Puncte des Knotens, an deren jedem die Tangente senkrecht auf der Asymptote steht.

VIII. Setzt man $a = b$, so kömmt der Anal. endl. Gr. III. Tafel 23. Fig. Da ist hie in (VI) die Subtangente $= o$; Nähmlich die beyden Schenkel λC, μC; berühren EC.

98. Aufg. Wenn F; G; 6 Fig. Brennpuncte einer Ellipse sind, in der sich M befindet, die Verhältniß zwischen den Winkeln zu finden, welche die Linien FM; GM; mit der Tangente an M machen.

I. Aufl. MN sey anfangs eine endliche Sehne $= h$. Man nenne $FM = z$; $MG = a - z$; wo a die grosse Axe ist. Ferner sey $FN = z + g$; so ist $NG = a - z - g$; die Winkel heissen $MFN = \varphi$; $MGN = \gamma$.

II. Man nehme $FQ = FM$; $GS = GM$; so sind $NQ = NS = g$; Man ziehe die geraden Linien, $MQ = z.\ 2.\ \sin \frac{1}{2}\varphi$; $MS = (a-z).\ 2.\ \sin \frac{1}{2}\gamma$; So hat man auf beyden Seiten der Linie MN, Dreyecke, MNQ, MNS, denen MN gemein ist, $NQ = NS = g$; $MQ =$

$$\text{gente} = -\frac{b.y}{b+x} - \frac{(b+x)^2}{y} = -\frac{b.\sqrt{(a^2-x^2)}}{x} - \frac{(b+x).x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = -\frac{(a^2.b+x^3)}{x.\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

IV. Ueber der Asymptote BF; nimmt die Ordinate MR = x beständig ab, indem die Abscisse ER = y, zunimmt, also liegen Subtangente und Anfang der Abscissen auf entgegengesetzte Seiten der Ordinate, (83) Eben so verhält es sich meist unter der Asymptote einige Stellen des Knotens ausgenommen.

V. Für x = o oder = a; wird die Subtangente unendlich, die Tangente ist in jenem Falle die Asymptote, in diesem der Asymptote parallel.

VI. Für den Punct C; ist x = — b und die Subtangente $= \frac{-(a^2.b-b^3)}{-b.\sqrt{(a^2-b^2)}} = -\sqrt{(a^2-b^2)}$. Dem Puncte C gehört die Abscisse y = o; Man nehme also $\sqrt{(a^2-b^2)}$ auf der Asymptote, auf beyden Seiten von E, weil jede Quadratwurzel bejaht oder verneint kann genommen werden, das sind die Subtangenten für den Punct C; jede für einen der Schenkel welche durch C gehn.

VII.

VII. Die Subtangente in (III) $= \sigma$ gesetzt giebt $x = -\sqrt[3]{-a^2 b}$, das hat nur einen möglichen Werth, und den verneint. Begreiflich ist dieses x, eine Ordinate für die beyden Puncte des Knotens, an deren jedem die Tangente senkrecht auf der Asymptote steht.

VIII. Setzt man $a = b$, so kömmt der Anal. endl. Gr. III. Tafel 23. Fig. Da ist hie in (VI) die Subtangente $= o$; Nähmlich die beyden Schenkel λC, μC; berühren EC.

98. Aufg. Wenn F; G; 6 Fig. Brennpuncte einer Ellipse sind, in der sich M befindet, die Verhältniß zwischen den Winkeln zu finden, welche die Linien FM; GM; mit der Tangente an M machen.

I. Aufl. MN sey anfangs eine endliche Sehne $= h$. Man nenne $FM = z$; $MG = a - z$; wo a die grosse Axe ist. Ferner sey $FN = z + g$; so ist $NG = a - z - g$; die Winkel heissen $MFN = \varphi$; $MGN = \gamma$.

II. Man nehme $FQ = FM$; $GS = GM$; so sind $NQ = NS = g$; Man ziehe die geraden Linien, $MQ = z.\ 2.\ \sin \frac{1}{2}\varphi$; $MS = (a - z).\ 2.\ \sin \frac{1}{2}\gamma$; So hat man auf beyden Seiten der Linie MN, Dreyecke, MNQ, MNS, denen MN gemein ist, $NQ = NS = g$; $MQ =$

z. 2. sin $\frac{1}{2}\varphi$; MS = (a − z). 2. sin $\frac{1}{2}\gamma$, auch MQN = 90° + $\frac{1}{2}\varphi$; MSN = 90° − $\frac{1}{2}\gamma$.

III. Im Dreyecke MQN ist cos MQN = $\frac{MQ^2 + QN^2 - MN^2}{2.\,MQ.\,QN}$

das ist

$$-\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{4.\,z^2.\,(\sin\tfrac{1}{2}\varphi)^2 + g^2 - h^2}{4.\,z.\sin\tfrac{1}{2}\varphi.\,g}$$

Daraus $\sin\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{h^2 - g^2}{z.\,(z-g)}}$.

IV. Im Dreyecke MSN ist

$$\cos MSN = \frac{MS^2 + SN^2 - MN^2}{2.\,MS.\,SN}$$

oder

$$+\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{4.\,(a-z)^2.\,(\sin\tfrac{1}{2}\gamma)^2 + g^2 - h^2}{4\,(a-z).\,\sin\tfrac{1}{2}\gamma.\,g}$$

Daraus

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}.\sqrt{\frac{h^2 - g^2}{(a-z).\,(a-z-g)}}.$$

V. MN sey linker Hand nach T verlängert, rechter Hand nach V; Ich suche die Winkel TMF, GMV.

VI. MN : MQ = sin MQN : sin MNF

$$h : 2.\,z.\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \cos\tfrac{1}{2}\varphi : \frac{z.\sin\varphi}{h}$$

Also

Alſo aus (III) ſin MNF =

$$\sqrt{\left(\frac{z.(h^2-g^2)}{h^2.(z-g)}\right)}.\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}.\left(\frac{h^2-g^2}{z.(z-g)}\right)^2\right)}.$$

VII. TMF = φ + MNF.

VIII. MN : NS = ſin MSG : ſin SMN

$$h : g = \text{cof}\,\tfrac{1}{2}\gamma : \frac{g.\,\text{cof}\,\frac{1}{2}\gamma}{h}$$

IX. GMV = $90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$ — SMN.

X. Aus VII; IX; hat man die beyden Winkel FMT, GMV allgemein vermittelſt Sinuſſe die durch a, z, g, h, gegeben ſind.

XI. Wenn FC = CG = e; und für den Punct M, die Ordinate = y; die Abſciſſe aus dem Mittelpuncte C gerechnet = u; ſo iſt (An. endl. Gr. 368) $y^2 = (a^2 - 4.e^2).\left(\frac{1}{4} - \left(\frac{u}{a}\right)^2\right)$ und wenn für N, die Abſciſſe u* heiſſt, die Ordinate y* hat man auch ſo die Gleichung zwiſchen ihnen, und aus beyden Gleichungen findet man durch dieſe Coordinaten, z, g, h;

XII. Wenn das Dreyeck FMG ungeändert bleibt, kann ſich die Linie TMV um M drehen, daß N ein Punct der Ellipſe näher bey M iſt, da nehmen die Winkel MFN, MGN, ab, und können ſo klein werden als man will, auch ſo nehmen h, g, ab, und ihre Verhältniß ändert ſich. Wenn nun dieſes Abnehmen bis zum

Unendlich klein werden fortgeht, wird TV eine Linie welche die Ellipse in M berührt.

XIII. Wenn solchergestalt, φ, γ, immer abnehmen, kömmt in VII; TMF so nah als man will an MNF, und in IX; GMV so nah als man will an $90° - SMN$.

XIV. Alsdann wird (VI) sin MNF $= \frac{\sqrt{(h^2 - g^2)}}{h}$ und (VIII) cos SMN bekömmt eben den Werth. Die Winkel MNF, GMV, bekommen gleiche Sinus, zwischen ihnen liegt FMG; Sie betragen also zusammen nicht zweene rechte, und sind folglich gleich.

XV. Meine Absicht war hie zu zeigen wie man auf diese Gleichheit durch Betrachtung einer endlichen Sehne kömmt. Der Winkel Sinus selbst fände man aus dem Werthe von $\frac{g}{h}$ wenn beyde Linien verschwinden, und der liesse sich aus (XI) herleiten. Freylich aber findet sich alles kürzer durch Differentialrechnung, wenn man nach (85.) die Lage der Tangente sucht, und daraus ihre Winkel mit Linien aus den Brennpuncten an den Berührungspuncte.

99. I. So ist nach den Gesetzen der Reflexion, MG oder MF zurückgeworfner Strahl, nach dem FM oder GM einfallender ist. Wenn man

man einen Spiegel hat deſſen Fläche durch Umdrehung einer Ellipſe um ihre Axe beſchrieben wird, und in F ein Licht ſetzt, ſo reflectirt der Spiegel alle Strahlen deſſelben nach G. Das hat den Nahmen der Brennpuncte veranlaſſt.

II. Man ſtelle ſich die ganze Ellipſe vor wie die in An. endl. Gr. II. T. 12. Fig. und ſetze in F ein Licht. Der Strahl FM, wird nach Mf zurückgeworfen, geht durch f fort und trifft wiederum an der Ellipſe unterſte Hälfte, die ſendet ihn nach F zurück, und er geht durch F an die obere Hälfte von der er wiederum nach f geſandt wird, und ſo wird er unzähliche mahl reflectirt, geht allemahl durch einen der beyden Brennpuncte.

III. Dieſe Eigenſchaft: Einen Strahl nach zwo Zurückwerfungen wiederum in denſelben Punct zu bringen könnte wohl mehr krummen Linien auſer der Ellipſe zukommen. Euler legte ſie in den leipziger Actis Eruditorum 1745 vor. Sie ward in dieſer periodiſchen Schrift von drey Leipzigern aufgelöſt, Oechliz, Bärmann, und mir. Meine Auflöſung ſteht im Octob. 1746; die Analyſis derſelben im Nov. 1747. Euler hat ſeine eigne Analyſis daſelbſt 1748 bekannt gemacht. Eine geometriſche Auflöſung giebt Klingenſtierna Abh. d. K. Schwed. Ak. d. W. 1749; 296. S. meiner Ueberſetzung.

IV. Wenn in An. endl. Gr. II. Taf. 14. Fig. ein Strahl FM auf die Hyperbel aus dem Brennpunct F fällt, so wird er reflectirt, daß sein Theil der Licht ist, von M innerhalb der Höhlung der Hyperbel fortgeht, als wenn er von f ausginge. Dieser blos geometrische Theil des Strahles, fM, geht allemahl aus f. Man kann dieses aus An. endl. Gr. 406; herleiten.

V. Bey der Parabel rückt der zweyte Brennpunct, hie 6. Fig. G, ins Unendliche, (An. endl. Gr. 384.) daß MG der Axe parallel wird (Geom. 12. S. 12. Zus.). Umgekehrt also, Strahlen die der Axe parallel einfallen, werden von ihr im Brennpuncte vereinigt, daher man sie zu Brennspiegeln gebraucht, auch wohl Brennlinie genannt hat.

100. Anm. Es sey Alg. I. T. 11. Fig. AQ eine beständige Grösse = c, und MH der Axe parallel also = PQ; man nenne dieses PQ = z; so ist, wenn der Parameter = b heisst, aus Alg. 360; FM $= \frac{1}{4}b + x$; das ist $= \frac{1}{4}b + c - z$ oder $\frac{1}{4}b + c =$ FM + z = FM + MH.

Ist AP > AQ; so wird z verneint, und wenn also MH linker Hand der Ordinate geht, ist $FM - MH = \frac{1}{4}b + c$.

So ist c = o für AG, und $FM - MG = \frac{1}{4}b$.

101. Anm. I. Für die Ellipse hier 6 Fig. sey FG $= \sqrt{(a^2 - ba)}$ (Alg. 376.) $= a - \frac{1}{2}b - \frac{bb}{8a} \ldots$ (46) wo die folgenden Glieder immer höhere und höhere

Potens-

Potenzen von a in den Diviſoren haben werden. Nun ſey A der Scheitel der Ellipſe, und KH ein Kreisbogen um G mit einem willkührlichen Halbmeſſer beſchrieben. So iſt $AF = \frac{a - \gamma(aa - ab)}{2}$. (Alg. 376.) alſo $AG = \frac{a + \gamma(aa - ab)}{2}$ oder $AK + KG = a - \frac{1}{4}b - \frac{bb}{16a}$ ... Ferner $FM + MH + HG = a$; (Alg. 378.) folglich gleiches von gleichem abgezogen $FM + MH - AK = \frac{1}{4}b + \frac{bb}{16a}$ ... Hier verſchwinden nun alle Glieder, welche a im Diviſor haben, wenn a unendlich wird, (5) oder G unendlich weit hinaus rückt, alſo kömmt $FM + MH = \frac{1}{4}b + AK$ zugleich aber wird KH eine gerade auf die Axe ſenkrechte Linie (G. 20. S. 2. Z.) und MH der Axe parallel; daß alſo dieſes Verfahren aus dem, was von der Ellipſe erwieſen worden, die Eigenſchaft der Parabel (200) als einen beſondern Fall einer Ellipſe, deren Axe unendlich wird, herleitet; woraus noch deutlicher erhellt, wie die Parabel in 99 unter der Ellipſe 98 enthalten iſt.

II. Man kann ſuchen, was für Ellipſen, Scheitel A und Brennpunct F, (6 Fig.) gemein haben.

Aus An. endl. Gr. (376)] iſt $AF = \frac{a - \gamma(a^2 - a.b)}{2}$

Man nenne dieſe Gröſſe $= k$; alſo $a - \gamma(a^2 - a.b) = 2k$; ſo findet ſich $a.b = 4.a.k - 4.k^2$ wo man Parameter oder Axe als gegeben annehmen kann.

Nimmt man den Parameter als gegeben an, ſo iſt $\frac{4.k^2}{4.k - b} = a$.

Alſo

Also wenn AF zuerst gegeben ist, und man dazu einen Parameter b, nimmt, nach Gefallen, nur kleiner als 4k; so geben sich alle Ellipsen, die A zum Scheitel, F zum Brennpuncte haben.

Wächst b, und kömmt immer näher an 4.k, so wächst a, und ins Unendliche, wenn man b so nah man will an 4k bringt. So verwandelt sich die Ellipse in die Parabel die Scheitel A, Brennpunct F hat.

Für k grösser als 4b, wird a verneint, also kommen Hyperbeln.

Es ist $FG^2 = a^2 - a.b = a.(a-b)$ aber $a-b = \frac{4.k^2}{4k-b} - b = \frac{(2.k-b)^2}{4k-b}$, daher $FG = \frac{2.k.(2.k-b)}{4.k-b} = k - \frac{k.b}{4.k-b}$

102. Aufg. An einen gegebenen Punct P 7 Fig. der Cycloide FPA (Alg. 597.) eine Tangente zu ziehen.

Aufl. I. Man ziehe PLM mit AE parallel, und an L eine Tangente des Kreises LV; der die gesuchte Tangente PV in V begegnet. Man nehme p unendlich nahe bey P und ziehe plm; auch Ps mit des Kreises Elemente Ll parallel. Weil PV; LV; die Verlängerungen von pP; lL, sind, (68) so sind Ps; LV parallel, also die Dreyecke pSP; PLV; ähnlich und pS : SP = PL : LV. Es ist aber pS = pl — PL = dy und PS = Ll — dx (Alg. 609.) folg-

folglich $LV = \frac{y\,dx}{dy}$. Weil nun bey der Radlinie $dy = dx$ (Alg. a. a. O.) so ist $LV = y$. Man nehme also auf der Tangente des Kreises an L, $LV = LP$, so ist PV die Tangente der Radlinie.

II. Der Bogen FL messe am Mittelpunct seines Kreises einen Winkel $= \zeta$. So ist r und die ihm gleiche gerade Linie $LP = r \cdot \zeta = x = y$.

III. Die Tangente an L macht da den Winkel $VLM = \zeta$. Da nun bey der Cycloide $LV = LP$ so sind die Winkel $LPV = LVP = \frac{1}{2}\zeta$. So hat man den Winkel LVP, den die Tangente der Cykloide mit einer geraden Linie macht welche durch den Berührungspunct P, mit der Grundlinie AE parallel geht.

Indem der Punct L im Kreise von F bis an E hinabrückt, rückt der Punct P in der Cycloide von F bis A hinab, und der Winkel ihrer Tangente mit genannter Parallele wächst von 0 bis an 90 Grad.

Aufwärtsrücken und Abnehmen des Winkels folgt wenn der Punct L in seinem Kreise von E bis F aufwärts rückt.

103. Wenn FLE was man will für eine algebraische krumme Linie ist, und die krumme

Linie

Linie FPA so bestimmt wird, daß LP eine Function des Bogens FL ist, so kann man allezeit die Verhältniß dx : dy und folglich LV finden, und der Linie FPA Tangente ziehen. Es sey z. E. $FL^2 = a.PL$ so ist $2xdx = ady$ und $LV = ay : 2x$.

Tangenten an Linien zu ziehen, wo die Ordinaten aus einem Puncte gehen.

164. Aufg. In dem Kreise AP 8. Fig. um den Mittelpunct C ist die Lage des Halbmessers CA = r gegeben, von welchem der veränderliche Bogen AP = x gerechnet wird. Nun ist MN ein Bogen einer krummen Linie, dessen Punct M sich im Halbmesser CP befindet: auch ist CM = y; und eine Gleichung zwischen AP und CM gegeben, daß man also hier die Bogen AP für die Abscissen, und die Linien aus einem Puncte, CM für die Ordinaten annimmt. Man sucht an M eine Tangente der Linie MN zu ziehen.

Aufl. Auf PC kann man in C ein Perpendikel setzen. Dieses begegne der gesuchten Tangente in T; Man nehme des Bogens AP Element Pp und ziehe Cmp; imgleichen den Bogen MS mit dem Halbmesser CM; so ist mM ein Element der krummen Linie; MS eines Kreis-

bogens,

bogens, der CM zum Halbmesser hat, auch mS = dy; und CP : Pp = CM : MS (G. 44. S. 11. Z.) also MS = ydx : r und auf Cp und CP senkrecht (96). Ferner mMT eine gerade Linie (68) und mS : SM = mC : CT. Weil aber m unendlich nahe bey M ist, so ist die Verhältniß mC : CT der MC : CT unendlich nahe, oder die letzte kann statt jener angenommen werden, also ist $CT = \frac{yydx}{rdy}$.

105. CT und CA liegen auf einerley oder auf verschiedenen Seiten von CP, nachdem CMm grösser oder kleiner als der rechte Winkel CMS (96) ist, d. i. nachdem Cm grösser oder kleiner als CM ist, d. i. nachdem dx und dy einerley oder verschiedene Zeichen haben, (23) d. i. nachdem CT bejaht oder verneint ist. Dieses zeigt, ob man in dem Perpendikel, das auf CP gesetzt wird, den Punct T nach eben der Seite von CP zu nehmen soll, nach welcher A liegt, oder ob man ihn auf die andere Seite zu nehmen soll; Eine Erinnerung, die der (83) ähnlich ist.

106. Exempel. Für die archimedische Spirallinie (Alg. 580.) ist pdy = rdx und $CT = \frac{pyy}{rr} = \frac{xy}{r}$. Man muß also hier den Bogen AP in eine gerade Linie verwandeln können, wenn man

man die Tangente ziehen will. Und umgekehrt, wenn man eine Methode hätte, an jeden Punct der Spirallinie eine Tangente zu ziehen, so könnte man jedesmahl das zugehörige CT finden, und solchergestalt den Bogen AP in eine gerade Linie verwandeln. Die Tangente der Spirallinie hängt also mit der unbestimmten Quadratur des Kreises (Alg. 621.) zusammen.

107. Exempel. Es sey $PM^2 = a.AP$; oder man stelle sich vor, die Axe einer Parabel werde in den Bogen eines Kreises gebeugt, so daß ihr Scheitel in A ist. Weil die Ordinaten mit der Axe rechte Winkel machen, so gehen sie bey dieser Krümmung alle nach C zu, (95) und die Linie MN heisst die paraboliſche Spirallinie. Also ist $(r-y)^2 = ax$ und $\frac{2.(y-r)}{a} = \frac{dx}{dy}$. Dieser Quotient ist verneint, weil MP und AP zugleich wachsen, folglich CM abnimmt, wenn AP wächst. Auch wird $CT = \frac{2.(y-r).yy}{ar}$ verneint (105). Diese krumme Linie hat Jac. Bernoulli im ersten Specimine calculi differentialis (90) betrachtet.

Von

Von den Asymptoten.

108. Lehrs. Eine Asymptote (Alg. 408.) kann als eine Tangente an einem unendlich entfernten Puncte angesehen werden.

Beww. Wenn eine gerade Linie einen Punct mit einem Schenkel einer krummen Linie gemein hat, übrigens aber der Schenkel um diesen Punct herum auf einer Seite der geraden Linie liegt, so ist sie des Schenkels Tangente (Alg. 449.) der Bogen der krummen Linie, welcher der Asymptote zugehört, schneidet sie nicht, und liegt also ganz auf einer Seite von ihr; seine Puncte nähern sich ihr unendlich, oder man kann einen unendlich entfernten Punct in ihm ansehen, als wäre er in der Asymptote; folglich ist die Asymptote seine Tangente an diesem Puncte.

109. Sie kann aber den Schenkel, in welchem sich dieser Bogen befindet, schneiden. (Alg. 451.)

110. Jeder Bogen einer krummen Linie ist gegen seine Tangente erhoben, (69) also auch hier der Bogen gegen die Asymptote.

111. Schneidet sie aber den Schenkel, (109) oder ist sonst irgendwo hohl gegen sie, wie bey der Muschellinie Alg. 477. 478. der obere Theil zunächst um den Punct A Alg. III. T. 22. 23. F. so giebt es eine Stelle, wo der Bogen nach der

Gegend, nach welcher er vorhin hohl war, erhoben wird.

112. Erkl. Eine solche Stelle heisst ein Wendungspunct (punctum flexus contrarii).

113. Aufg. Die Asymptoten einer krummen Linie zu finden.

Aufl. Die Asymptote berührt die krumme Linie in einem unendlich entfernten Puncte (108). Es muß also von den beyden Coordinaten, welche diesem Puncte zugehören, eine unendlich werden können; die andere kann vielleicht endlich bleiben, oder gar unendlich klein werden wie bey der Muschellinie (Alg. 478.) die, welche unendlich werden kann, nehme man für die Abscisse an. Können beyde unendlich werden, so ist es gleichgültig, welche man wählen will. Wenn nähmlich AD i. F. mit PM parallel geht, so könnte man eine Parallele mit AP durch M bis an AD ziehen, und das Stück, AF, das sie von A aus abschnitte, und das = MP wäre, Abscisse, die Parallele selbst aber AP = FM Ordinate nennen.

Nun muß die Asymptote die angenommene Abscissenlinie entweder in einem gegebenen Puncte schneiden oder ihr parallel seyn.

TM 1. Fig. sey eine Asymptote für den ersten Fall; welche von AD, die den Ordinaten parallel ist, in K geschnitten werde. So ist der

Punct

Punct M unendlich von A entfernt, weil AT endlich ist. Dieses $AT = TP - AP$; ist also der Unterschied zwischen einer unendlichen Subtangente und Abscisse. Weil aber unendliche Grössen, die um was endliches unterschieden sind, als gleich angesehen werden, (10) so würde man nichts finden, wenn man beyde gleich anfangs unendlich setzte, und alsdenn von einander abziehen wollte. Daher ist folgendes Verfahren nöthig. Für ein unbestimmtes endliches x, suche man $AT = \frac{y\,dx}{dy} - x$ (77) und $\frac{PM.\,AT}{TP}$ oder $AK = y - \frac{x\,dy}{dx}$ so daß man den Quotienten $\frac{dx}{dy}$ durch endliche Grössen ausdruckt.

In den gefundenen Ausdrückungen nun setze man x unendlich, so giebt sich die Weite AT vom Anfange der Abscissen, in welcher die Abscissenlinie von der Asymptote geschnitten wird, und der Winkel T unter welchem solches geschieht, aus der Verhältniß AT:AK, weil der Ordinatenwinkel A, gegeben ist.

Wenn dieses Verfahren für AT einen unendlichen Werth giebt, so ist die Asymptote der Abscissenlinie parallel, und AK ihre Entfernung davon. (Alg. 348.)

114. Exempel. Für die Hyperbel ist (85) $AT = ax : (a + 2x)$ und $AK = y - \frac{bx.(a+2x)}{2ay} = \frac{bx}{2y}$ In diesen Ausdrückungen nun muß man x unendlich setzen. Alsdenn wird $AT = \frac{1}{2}a$ (10) und die Verhältniß $x : y$ oder $x : \sqrt{(bx + \frac{bxx}{a})} = x : \sqrt{\frac{bxx}{a}}$ (12) $= \sqrt{a} : \sqrt{b}$; Also wird $AK = \frac{\sqrt{ab}}{2} = \frac{1}{2}c$ (Alg. 399). Also ist T der Hyperbel Mittelpunct, TA die halbe große, und AK die halbe kleine Axe; alles wie Alg. 408.

Weil AK als eine Quadratwurzel zweene entgegengesetzte sonst gleiche Werthe hat; so giebt es auch einen Punct K unter der Axe, durch welchen ebenfalls eine Asymptote geht. Diese zweyte Asymptote geht ebenfalls durch den Mittelpunct. Man findet sie nähmlich, wenn man $-x$ unendlich setzt: da ist $AT = -a.x : (a-2x)$ noch $= \frac{1}{2}a$.

115. Ex. I. Es sey 9 F. $AP^2.(PM - AE) = a^3$; also, wenn $AE = c$; $AP = x$; $PM = y$; $xx.(y-c) = a^3$ oder $y = \frac{a^3}{xx} + c$;

II. Weil man a und c bejaht nimmt, ist y immer bejaht, und die krumme Linie ganz über der Abscissenlinie AP.

III.

III. Einer verneinten Abſciſſe ſo groß als AP, gehört eine verneinte Ordinate ſo groß als PM. Iſt alſo AS ein Perpendikel auf die Abſciſſenlinie, ſo liegen auf beyden Seiten deſſelben, ähnliche Hälften der krummen Linie.

IV. Wenn die Abſciſſe wächſt nimmt die Ordinate ab, und kömmt dem Werthe c ſo nah als man will, wenn die Abſciſſe ſo groß wird als man will. Auf dem Perpendikel (III) ſey AE = c, und durch C mit der Abſciſſenlinie, eine Parallele vEV, das iſt eine Aſymptote, an welcher ſich die krumme Linie nach EV, und Ev, hinzieht.

V. Wenn x abnimmt, wächſt y und das ins Unendliche, wenn x ins Unendliche abnimmt, das Perpendikel (III) iſt alſo auch eine Aſymptote, an deren beyden Seiten ſich die krumme Linie nach MF, mf, ins Unendliche hinaufzieht.

VI. Die krumme Linie iſt eine Hyperbel vom dritten Grade, kann von einer geraden Linie dreymahl geſchnitten werden. Nennt man EQ oder $y - c = z$, ſo wird die Gleichung kürzer $z = \frac{a^3}{x^2}$. Man ſ. unten (211)

VII. Man bekömmt $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^3}{2.a^3}$ Die Tangente an M begegne der Abſciſſenlinie AP in W,

so ist die Subtangente $PW = -\frac{1}{2}x - \frac{cx^3}{2.a^3}$, der verneinte Werth zeigt an P liege zwischen ihr und dem Anfange der Abscissen. (83) Wenn man also $AW = AP + PW$ wissen will, nimmt man diesen Werth bejaht, und da kömmt AW $= \frac{3}{2}x + \frac{cx^3}{2.a^3}$.

Das wird unendlich oder o, für Abscisse unendlich oder o, wegen der beyden Asymptoten. (IV; V;)

VIII. Die Tangente an M; begegnet der Asymptote ES in t; und es ist $WP:PM = WA:At$ giebt $At = \frac{3.a^3}{x^2} + c$

Das wird $= c$ oder unendlich, nachdem x unendlich oder $= o$ wird.

116. Anm. Wenn krumme Linien Asymptoten haben, so werden die Gleichungen am einfachsten, wenn man die Coordinaten auf den Asymptoten nimmt. Die Gleichungen für die Hyperbel Alg. 389; 412; sind ein Beyspiel davon. Und für gegenwärtige Hyperbel würde die Gleichung mehr zusammengesetzt werden, wenn man eine andere Abscissenlinie für sie nähme.

117. Anm. Für $x = \infty$ ist (115) $z = \frac{a^2}{\infty^2}$ ein Unendlich kleines der zweyten Ordnung (11) und daher bleibt für diesen Fall xxx noch der endlichen Grösse

Gröſſe a^3 gleich, obgleich von den drey Factoren dieſes Productes zweene unendlich ſind (12).

118. Anm. Wenn y nicht auf eine ſo einfache Art, wie in den gebrauchten Exempeln durch x gegeben iſt, ſo kann man zuweilen nicht ſogleich überſehen, ob Producte in denen ſich beyde Coordinaten befinden, endlich oder unendlich ſind, weil, wenn die eine unendlich wird, die andere ein Unendlich groſſes oder kleines von verſchiedener Ordnung werden kann (11), da denn die Sache nach (12) zu beurtheilen wäre. Dieſes macht alſo Schwürigkeit die Werthe von AT und AK für die unendliche Abſciſſe zu finden, weil darinnen dergleichen Producte vorkommen können. Wer die Ordinate durch die Abſciſſe nach dem Newtoniſchen Parallelogramm (Alg. 632.) ſuchen will, kann ſich hier allemahl helfen. Denn wenn die Abſciſſe unendlich werden ſoll, ſo muß er die Ordinate durch eine fallende Reihe ſuchen (Alg. 665. V) deren erſtes Glied alsdenn den Werth von y für das unendliche x giebt. So fände man im Exempel, Alg. 665. $y = x - \frac{1}{3}a - \frac{aa}{3x} \ldots$ wo für die unendliche Abſciſſe, $y = x$ ein Unendliches von eben der Ordnung iſt.

119. Anm. Aber das Newtoniſche Parallelogramm lehret auch ſowohl dieſe Aſymptoten, als auch krumme Linien, denen ſich eine gegebene krumme Linie ohne Ende nähert, (aſymptotos curuilineas) (95. XIII) unmittelbar finden, wovon mich aber hier die Abhandlung zu weit führen würde, da ich überhaupt von den krummen Linien nicht umſtändlich handeln kann. S. Cramer anal. des lignes courbes ch. VIII.

Von den höhern Differentialen.

120. Aufg. Der krummen Linie KLM 10 Fig. Abscissenlinie, ist in lauter gleiche Theile NO = OP u. s. w. von einer willkührlichen Grösse = e getheilt. Ihnen sind Kk; Ll; parallel, also Lk; Ml; die Unterschiede der Ordinaten; Man soll eine krumme Linie $\varkappa\lambda\mu$ vorzeichnen, deren Ordinaten sich für eben die Abscissen, wie jener Unterschiede verhalten, oder wo $O\lambda : P\mu = Lk : Ml$.

Aufl. Man nehme eine willkührliche Länge = a an, und $O\lambda = \frac{a.Lk}{e}$; $P\mu = \frac{a.Ml}{e}$ u. s. w. Weil nähmlich die Ordinaten der Linie KLM für jede Abscisse gegeben sind, so findet man auf diese Art der Linie $\varkappa\lambda\mu$ Ordinaten für eben die Abscissen.

121. Die Reihe der Ordinaten der Linien KLM 10 F. stellt die Hauptreihe y Alg. 724. und die Reihe der Ordinaten $\varkappa\lambda\mu$, die Reihe $\Delta 1$; vor. Nennt man $KN = y$; $OL = y1$; $PM = y2$, so ist $O\lambda$ wie $y1 - y = 1\Delta 1$; $P\mu$ wie $y2 - y1 = 2\Delta 1$.

122. Wenn LO sich KN unendlich nähert, oder NO unendlich abnimmt, so muß Lk verschwinden: Also muß Lk einen solchen Ausdruck haben, der verschwindet, wenn e unendlich abnimmt. Also muß $Lk = P.e$ seyn, wo P eine solche

solche Function von x; y; u. c; ist, die, wenn c bis auf nichts abnimmt, für jede Abscisse entweder endlich ist, oder auch verschwindet, oder wenn sie unendlich wird, gleichwohl mit c ein verschwindendes Product giebt, wie nach (12) möglich ist.

123. So ist $\frac{Lk}{c} = P$ und wenn P für ein verschwindendes c sich in p verwandelt, da denn $\frac{Lk}{c} = \frac{dy}{dx}$ wird, so ist $\frac{dy}{dx} = p$ welches ordentlich für unbestimmte Werthe von y endlich seyn wird, aber $= o$ oder unendlich werden kann, nachdem für eine gewisse Abscisse, der krummen Linie KLM Tangente, der Abscissenlinie oder den Ordinaten parallel wird (87).

124. Anm. Den letzten Fall in 122. zu erläutern, dient die krumme Linie Alg. 474. Wenn ihre erste Ordinate $y = a + \sqrt[3]{a.(a-x)^2}$ heisst, so ist die zweyte, welche von der ersten um die Weite c absteht, $= a + \sqrt[3]{a.(a-x-c)^2}$. Beyder Unterschied, hier Lk, zu finden, mache man aus der letztern Cubikwurzel nach (58) eine unendliche Reihe. Man betrachte sie nähmlich als

$[a.(a-x)^2 - 2a.(a-x)c + ac^2]^{\frac{1}{3}}$ oder als $\sqrt[3]{\left(a.(a-x)^2.\left(1 - \frac{2c}{a-x} + \frac{c^2}{(a-x)^2}\right)\right)} = \sqrt[3]{a.(a-x)^2}.$

$\sqrt[3]{\left(1 - \frac{2c}{a-x} + \frac{c^2}{(a-x)^2}\right)}$ wo man für die zweyte Cubikwurzel; in 58; $m = \frac{1}{3}$; $\alpha = -\frac{2}{a-x}$; $\beta = \frac{1}{(a-x)^2}$; $z = c$; setzt. Dieses giebt selbige $= 1 - \frac{2c}{3.(a-x)}$ ... so daß die folgenden Glieder alle höhere Potenzen von c enthalten. Wenn man hier nun jedes Glied mit $\sqrt[3]{a.(a-x)^2}$ multiplicirt, so kömmt $\sqrt[3]{a.(a-x-c)^2} = \sqrt[3]{a.(a-x)^2} - \frac{2}{3}.\sqrt[3]{\frac{a}{a-x}}.c + \alpha c^2 + \beta c^3$ ... u. s. w. wo die griechischen Buchstaben die Coefficienten der höhern Potenzen von c bedeuten, die hier zu berechnen nicht nöthig ist. Folglich ist $Lk = c.(-\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{a}{a-x}} + \alpha c + \beta c^2 ..)$ Wo der letzte Factor $= P$ (121) ist. Wenn man nun hier $\frac{Lk}{c} = P$ setzt, so wird p oder $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}.\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\frac{a}{a-x}}\right)}$ dieses nun wird für $x = a$ unendlich, wie aus der dort angegebenen Figur der krummen Linie, und hier 87 folgt; demohngeachtet aber wird dy unendlich klein: denn wenn x sich dem a unendlich nähert, also $a - x$ ein Unendlichkleines der ersten Ordnung wird, so wird $\frac{a}{a-x}$ ein Unendlichgrosses der ersten Ordnung, aber die Cubikwurzel daraus ein Unendlichgrosses der Ordnung $\frac{1}{3}$; die also mit dx einen unendlich kleinen der ersten Ordnung multiplicirt, ein unendlich kleines der Ordnung $\frac{2}{3}$ giebt. (12) Von dieser

dieſer Ordnung der Unendlichkleinen iſt alſo dy und daher iſt dx als ein Unendlichkleines der erſten Ordnung in ihm unendlich vielmahl enthalten. Die Wahrheit, welche durch dieſe Ausdrückungen angezeigt wird, iſt folgende: Weil für die Abſciſſe $x = a$; die Tangente der Axe ſenkrecht iſt, ſo wachſen die Ordinaten um dieſen Berührungspunct herum viel ſchneller als die Abſciſſen abnehmen.

125. In 120 kömmt die Beſchaffenheit der Linie $\varkappa\lambda\mu$ auf die Gröſſe von c an. Denn wenn man z. E. die Abſciſſenlinie in Theile jeden ſo groß als OH eintheilte, ſo wäre der beyden nächſten Ordinaten Unterſchied $OL - HI = Li$; und die Linie, deren Ordinaten ſich wie jener Unterſchiede verhalten ſollten, hätte für die Abſciſſe AO, die Ordinate $\frac{a.Li}{OH}$ wo $\frac{Li}{OH}$ mit $\frac{Lk}{c}$ nicht allemahl und nothwendig einerley ſeyn wird.

126. Um alſo eine krumme Linie $\varkappa\lambda\mu$ zu finden, da jede Ordinate $O\lambda$; nur durch die Abſciſſe AO; und nicht zugleich durch c beſtimmt wird, ſetze man der Linie $\varkappa\lambda\mu$ Ordinate $z = ap$ (123). Hier nähmlich iſt p durch x und y gegeben, und wenn alſo auch eine Gleichung für die krumme Linie KLM ſelbſt gegeben iſt, ſo hat man drey Gleichungen, die für die Linie KLM, die zwiſchen p; x; y; und die nur angenommene $z = ap$. Aus dieſen dreyen kann man y und p wegſchaffen, (Alg. 202.) und bekömmt

kömmt also eine Gleichung zwischen z und x für $\varkappa\lambda\mu$.

127. Erkl. KLM soll die Hauptlinie, und $\varkappa\lambda\mu$ (125) ihre erste Differentiallinie heissen.

128. Zus. Wenn zu einer Abscisse der Hauptlinie mehr als eine Ordinate gehört, so hat $\frac{dy}{dx}$ für eine Abscisse mehr als einen Werth, nachdem nähmlich dy den Unterschied zwischen den beyden nächsten Ordinaten in einer oder in der andern Reihe der Ordinaten (Alg. 328) bedeutet. Folglich gehöret zu dieser Abscisse mehr als ein z der Differentiallinie.

129. Ex. Für den Kreis 11 F. sey CT = x; TM = y; der Halbmesser CA = 1 also yy = 1 − xx, und ydy = − xdx also wenn a = 1 gesetzt wird; $z = \frac{x}{\sqrt{(1-xx)}}$. Wegen des doppelten Zeichens, das die Wurzelgrösse haben kann; gehören jeder Abscisse zwey entgegengesetzte sonst gleiche z zu und entgegengesetzten, sonst gleichen Abscissen, gehören gleiche z zu; und es ist für

x = | 0 | + ½ | + 1
z = | ∓0 | ∓ 1 : √3 | ∓∞

Setzt man ACM = φ so ist z = − cot φ. Indem x von 0 bis 1 wächst, nimmt der Winkel

kel ACM vom Rechten bis auf Nichts ab, und seine Cotangente wächst von o bis ins Unendliche. Wenn CT; Ct; entgegengesetzte sonst gleiche Abscissen sind, so ist $-\frac{CT}{TM} = TR$ einem verneinten z; und $-\frac{CT}{Tm} = Tr$ einem bejahten z weil TN eine verneinte Ordinate ist; ferner $-\frac{Ct}{tN}$ bejaht, weil Ct was Verneintes ist, also $= tq$ und $-\frac{Ct}{tn}$ verneint, also $= tr$; folglich gehören zu den Quadranten KMA; AmL; LnB; BNK die Schenkel CQ; RC; Cq; rC und FAE; fBe sind Asymptoten der krummen Linie. Es ist nähmlich klar, daß für ein wachsendes bejahtes x; die Verhältniß dy:dx entweder die Verhältniß der Differentiale der abnehmenden bejahten Ordinate TM und der zunehmenden Abscisse CT; oder der abnehmenden verneinten Ordinate Tm und der zunehmenden Abscisse CT ist; Im ersten Falle ist $\frac{dy}{dx}$ verneint, im zweyten bejaht. Für ein wachsendes verneintes x; da dx verneint ist, ist dy:dx; die Verhältniß der Differentiale entweder einer abnehmenden bejahten Ordinate tN; oder einer abnehmenden verneinten tn zu dem Differentiale

der

der wachsenden verneinten Abscisse, und also ist $\frac{dy}{dx}$ im ersten Falle bejaht, im zweyten verneint; welches zeigt, wenn z, das sich wie $\frac{dy}{dx}$ verhält, bejaht oder verneint wird.

130. Wie in 122 wird erwiesen, daß $\mu\varrho = Q.e$ und Q eine Function von x, z, e, wie dorten P von x, y, e ist.

131. Also ist $P\mu - O\lambda$ oder $\frac{a.(Ml-Lk)}{e}$ (120) $= Q.e$. Hier wird Q. e und folglich $\frac{a.(Ml-Lk)}{e}$ kleiner als jede angebliche Grösse, oder es verschwindet, wenn e unendlich abnimmt. Das heisst, wenn e unendlich abnimmt, so verschwindet der Unterschied zwischen den Unterschieden der Ordinaten, der zweyte Unterschied der Ordinaten (Alg. 724.) in Vergleichung mit dem Unterschiede der Abscissen.

132. Erkl. Diesen verschwindenden Unterschied nennt man das zweyte Differential oder das Differentiodifferential von y.

133. $Q = \frac{\mu\varrho}{e} = \frac{a.(ML-Lk)}{ee}$ wie man nun dx für ein verschwindendes e und dy für das zugehörige Lk schreibt, so wird für ein verschwindendes

dendes e der Unterschied Lk – ML oder das Differentialdifferential = ddy können genennt werden, und wenn für diesen Fall Q sich in q verwandelt, so ist $q = \frac{a\,ddy}{dx^2}$ wo man ddy als eine Grösse, die in Vergleichung mit dx (131) und folglich mit dy (123) unendlich klein ist, ansehen kann.

134. Zus. Für ein verschwindendes e wird $\frac{\mu\varepsilon}{e} = \frac{dz}{dx}$ also $dz = q\,dx = \frac{a\,ddy}{dx}$ (132). Aber $\frac{dy}{dx} = \frac{z}{a}$ (126) also $d\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{a} = \frac{ddy}{dx}$ eben wie man es gefunden hätte, wenn man dy als eine veränderliche, dx als eine unveränderliche Grösse angesehen, und $\frac{dy}{dx}$ nach 26; 22; differentiirt hätte.

135. Einen Ausdruck der Differentiale enthält, von neuem zu differentiiren, darf man nur mit den Differentialen auch wie vorhin mit den endlichen Grössen verfahren.

136. Wäre KLM die erste Differentiallinie einer krummen Linie, deren Ordinaten y hiessen, also $KN = z = \frac{a\,dy}{dx}$ so wäre für $\varkappa\lambda\mu$ als ihre

Diffe-

Differentiallinie die Ordinate $O\lambda = \frac{a\,dz}{dx} = \frac{a^2 . ddy}{dx^2}$.

137. Wäre $KN = \frac{a^2\,ddy}{dx^3}$ so wäre $O\lambda = \frac{a . dKN}{dx} = \frac{a^3 . dddy}{dx^3}$, wenn man das Differential von ddy oder das dritte Differential von y durch dddy anzeigt, welches in eben dem Verstande geschehen kann, in welchem man das von dy durch ddy anzeigte.

138. Ueberhaupt erhellet, daß man so die Differentiale ohne Ende fortsetzen kann; wie man auch allemahl KLM als die erste (136) zweyte (137) dritte u. s. w. Differentiallinie einer Hauptlinie ansehen kann, da denn $\varkappa\lambda\mu$ dieser Hauptlinie zweyte, dritte, vierte u. s. w. Differentiallinie wird. Nimmt man auf den Abscissen dieser Linien, e von endlicher Grösse, so stellen die Ordinaten die endlichen Unterschiede $\Delta 1$; $\Delta 2$; $\Delta 3$; u. s. w. (Alg. 724.) der Reihe y vor; welche sich in dy; $d^2 y$; $d^3 y$; u. s. w. verwandeln, wenn e verschwindet, oder wenn es sich in dx verwandelt.

139. Willk. Satz. Das zweyte, dritte, vierte, ... nte. Differential oder die höhern Differentiale, von y bezeichne man durch $d^2 y$, $d^3 y$; $d^4 y$ ... $d^n y$

wo

wo man dieſes Zeichen von dy^n oder des Differentials von y Potenz n unterſcheiden muß.

So iſt der nten Differentiallinie Ordinate $\frac{a^n d^n y}{dx^n}$.

140. Eine Gleichung, die zweyte, dritte u. ſ. f. Differentiale, oder Differentiale von einem gewiſſen Grade enthält, wird von neuem differentiirt, wenn man bey dieſen Differentialen eben die Regeln beobachtet die bey endlichen Gröſſen gelten. Und wie z als die Ordinate der erſten Differentiallinie ordentlich endlich iſt, (136) ſo iſt, wenn man dieſe Linie als eine Hauptlinie betrachtet, die Ordinate ihrer Differentiallinie endlich, und ſo ſind überhaupt die Ordinaten jeder Differentiallinie ordentlich endlich, oder $\frac{d^n y}{dx^n}$ iſt endlich. Ich ſage ordentlich, weil für gewiſſe Abſciſſen dieſe Ordinaten verſchwinden oder unendlich werden können wie in (129).

141. Anm. Wenn man dieſe Begriffe auf die Fluxionen bringen will, ſo verhält ſich ddy wie die Geſchwindigkeit, mit der ſich vy verändert (39 VIII) und dx unveränderlich annehmen, heiſſt vx unveränderlich annehmen, und ſo ſtellt jedes höhere Differential die Geſchwindigkeit vor, mit der ſich die Geſchwindigkeit verändert, welche durch das nächſtvorhergehende vorgeſtellt wurde.

142. Ob gleich bisher der leichtern Rechnung wegen, e (120) oder dx unveränderlich

ist angenommen worden, so wäre doch dieses nicht nothwendig. Man setze $\frac{dy}{dx} = p$ und nehme wie in (126) $z = ap$ nur daß man auch dx veränderlich oder Ll nicht gleich groß mit Kk annehme; So ist noch $\mu\varrho$ oder $dz = adp$ aber nun $dp = \frac{dx\,ddy - dy\,ddx}{dx^2}$; Es verhält sich nähmlich hier noch dp oder dz, wie das Differential des Quotienten $\frac{dy}{dx}$ in dem aber nun auch dx veränderlich ist. Setzt man $ddx = 0$ (22) so bekömmt man für dz den Ausdruck (134).

143. Anm. Die höhern Differentiale bekommen aber ordentlich keine bestimmten Werthe, wenn man nicht ein erstes Differential, oder eine Grösse, die durch erste Differentiale gegeben ist, unveränderlich setzt; oder ihr Werth wird anders und anders, nachdem man eine andere solche Grösse unveränderlich setzt. Z. E. Wenn $dy = pdx$ also $ddy = dpdx + pddx$ so wird $ddy = dpdx$ wenn dx unveränderlich ist. Setzt man aber $dx^2 + dy^2$ unveränderlich, also $dxddx = -dyddy$ (22) oder $ddx = -\frac{dyddy}{dx}$ so wird $ddy = dpdx - \frac{pdyddy}{dx}$ und $(dx + pdy).\ ddy = dpdx^2$ also $ddy = dpdx.\ \frac{dx}{dx + pdy}$ welches mit dem vorigen Werthe, da dx unveränderlich war, nicht einerley seyn kann, weil gewiß nicht $\frac{dx}{dx + pdy} = 1$ ist. Allgemeinere und ausführe-

lichere

Kürzere Betrachtungen hierüber findet man beym Euler Inst. Calc. Diff. P. I. §. 251. seqq.

Ausdrückung eines unbestimmten Gliedes einer Reihe (Alg. 725.) durch die höhern Differentiale.

144. Wenn $x^m = \omega$ und dx beständig ist, so ist $m x^{m-1} dx = d\omega$ also $m x^{m-1} = \frac{d\omega}{dx}$

Ferner $m.(m-1) x^{m-2} = \frac{dd\omega}{dx^2}$

$$m.(m-1).(m-2) x^{m-3} = \frac{d^3\omega}{dx^3}$$

und überhaupt

$$m.(m-1).(m-2)....(m-n+1).x^{m-n} = \frac{d^n\omega}{dx^n}$$

Was in die Potenzen von x hier multiplicirt wird, will ich Coefficienten des ersten, zweyten, dritten, nten Differentials nennen.

145. Vergleichung dieser Coefficienten mit den Binominalcoefficienten (Alg. 141) der erste, zweyte, dritte ... nte Binominalcoefficient sollen A, B, C, ... N heissen.

Es sind also die Coefficienten der Differentiale

des ersten = A
des zweyten = 1. 2. B
des dritten = 1. 2. 3. C
des nten = 1. 2. 3. . . . . n. N

Diese Uebereinstimmung hat Leibniz bemerkt Miscell. Berol. (1710) P. III. art. 1. pag. 160. Sie findet sich auch in Ger. Meermann specimen calculi fluxionalis Leid. 1742. Hr. Joh. Freyh. v. Paccassi, Versuch einer neuen Methode zu integriren. In den physikal. Arbeiten der einträchtigen Freunde in Wien, aufgesammelt von Ignaz Edlen von Born Wien 1786; N. 3. 34 S. Giebt auch Formeln für diese Vergleichungen. Seine Vorgänger hat er nicht gekannt. Ueber die Anwendung zum Integriren hat er der Kais. Ak. zu St. Petersb. eine Abhandlung gesandt.

146. Wenn $(x+c)^m = \omega + e$; so ist $\omega + e = x^m + Ax^{m-1}c + Bx^{m-2}c^2 + Cx^{m-3}c^3 \ldots + Nx^{m-n}c^n \ldots$ aber aus 144 und 145 ist $Ax^{m-1} = \frac{d\omega}{dx}$; $Bx^{m-2} = \frac{d^2\omega}{1.2\,dx^2}$; $Cx^{m-3} = \frac{d^3\omega}{1.2.3\,dx^3} \ldots . Nx^{m-n} = \frac{d^n\omega}{1.2.3.n.dx^n}$

Daher $\omega + e = \omega + \frac{c\,d\omega}{dx} + \frac{c^2 d^2\omega}{1.2.dx^2} + \frac{c^3 d^3\omega}{1.2.3.dx^3} + \frac{c^n d^n\omega}{1.2.3\ldots n.dx^n} \ldots$

So lässt sich also $\omega + e$ durch höhere Differentiale ausdrucken dergestalt daß wenn ω der Werth ist der einem gewissen Werthe von x zugehört, man $\omega + e$ findet das zu $x + c$ gehört.

147.

147. Wenn m eine ganze bejahte Zahl iſt, ſo giebt es m Differentiale, und die Reihe für $\omega + e$ hat $m + 1$ Glieder: Auſerdem gehn die Glieder ohne Ende fort. Völlig wie beym Ausdrucke dieſer Reihe durch den binomiſchen Satz (47).

148. Exempel. Wenn $m = 4$ ſo iſt

$$\frac{d\omega}{dx} = 4x^3; \quad \frac{dd\omega}{dx^2} = 12x^2, \quad \frac{d^3\omega}{dx^3} = 24x;$$

$$\frac{d^4\omega}{dx^4} = 24; \text{ alſo}$$

$$\omega + e = \omega + 4x^3c + 6x^2c^2 + 4xc^3 + c^4$$

wie der binomiſche Satz gab.

149. Wenn $u = a.x^m$, $u + g = a.(x+c)^m$ ſo iſt $u = a.\omega$; $du = a.d\omega$; $ddu = a.dd\omega$ u. ſ. w. Ferner $u + g = a.(\omega + e)$; Um alſo $u + g$ zu finden, darf man nur der Reihe für $\omega + e$ jedes Glied mit a multiplicirem, ſo gibt ſie

$$u + g = u + \frac{c.du}{dx} + \frac{c^2.d^2u}{1.2.dx^2} \cdots$$

$$\cdots + \frac{c^n.d^nu}{1.2 \ldots n.dx^n} \cdots.$$

150. Wenn $z = ax^m + bx^r$, ſo heiſſe man den erſten Theil u, den zweyten v; alſo $dz = du + dv$, $ddz = d^2u + d^2v$, $d^3z = d^3u + d^3v$ u. ſ. w. Wenn ſich nun x in $x + c$ verwandelt, ſo verwandelt ſich

u in $u + \frac{cdu}{dx} + \frac{c^2d^2u}{1.2.dx^2} \cdots$.

$$v \ln v + \frac{c\,dv}{dx} + \frac{c^2\,|^2 v}{1.2.dx^2} \cdots$$

also $u + v$ oder z

$$z \ln u + v + \frac{c}{dx}\cdot(du + dv) + \frac{c^2}{1.2.dx^2}(d^2u + d^2v) \ldots$$

Das ist in

$$z + \frac{c\,dz}{dx} + \frac{c^2 d^2 z}{1.2\,dx^2} \cdots$$

Es ist klar, daß eben dieß gelte, wenn z aus drey, vier oder mehr solchen veränderlichen Theilen bestünde.

151. Wenn y eine Function von x ist, und man das y aus x berechnen will, so läßt sich allemahl annehmen, es sey eine Reyhe

$y = ax^m + bx^{m+\delta} + cx^{n+2\delta} \ldots$ gegeben, die eine endliche oder unendliche Menge von Gliedern hat. Ist y eine algebraische Function von x so lehrt das Parallelogramm solche Reihen finden. Ist es eine transcendentische, so weiß man vielleicht bisher noch nicht wie die Reihe gefunden wird, es ist aber doch begreiflich, daß wenn sich keine solche Reihe finden liesse, der Werth von y der jeden x zugehörte, nicht könnte berechnet werden. Auf andre Art, etwa durch Verzeichnung liesse es sich bestimmen, wie z. E. wenn y der Bogen wäre der dem Sinus x zugehörte, aber eine Berechnung findet nicht statt, wenn nicht y durch eine solche Reihe, oder durch

irra-

irrationale Ausdrückungen z. E. $\sqrt{(a^2 + x^2)}$ u. d. gl. die sich denn allemahl in Reihen verwandeln lassen gegeben ist. Also kann man allemahl eine solche Reihe für y annehmen, und wenn also x sich in $x + c$ verwandelt, so verwandelt sich nach 150; y in

$$y + \frac{c\,dy}{dx} + \frac{c^2 d^2 y}{1.2.dx^2} + \frac{c^3 d^3 y}{1.2.3.dx^3} \cdots + \frac{c^n d^n y}{1.2.3 \ldots dx^n}$$

Exempel $y = 4x^3 + 7x + 5$, gibt $\frac{dy}{dx} = 12x^2 + 7$; $\frac{d^2 y}{dx} = 24x$; $\frac{d^3 y}{dx} = 24$; Wenn also x um c wächst so verwandelt sich y in

$$y + 12.cx^2 + 7c + 12c^2 x + 4c^3$$

Wenn z. E. $c = 10$; so giebt dieses

$$y + 120x^2 + 1200x + 4070.$$

Man seze $x = 0$ so ist $y = 5$; und verwandelt sich für $x = 0 + 10$ in 4075 wie gehörig.

Von den Grössten und Kleinsten.

152. Erkl. Wenn eine Function von x so beschaffen ist, daß sie bis auf einen gewissen Werth zunimmt und von dar wieder abnimmt, indem x beständig zunimmt oder abnimmt, so heisst dieser ihr Werth ein Grösstes; Nimmt sie aber bis auf einen solchen Werth ab, und von dar

wieder zu, so heisst sie ein Kleinstes (maximum vel minimum.)

So wird der Ellipse Ordinate PM Alg. II. Taf. 12 Fig. ein Grösstes, wenn sie zur Ordinate durch den Mittelpunct CD wird. Aber wenn $x^2 - 10x + 60 = y$ so ist y, für $x = 5$ ein kleinstes; Es wird alsdenn $= +35$ und jeder andere Werth von x gibt ein grösseres y; z. E. $x = 6$ oder 4 gibt eines wie das andere $y = 36$.

153. Wenn man bejahte und verneinte Grösten oder Kleinsten unterscheiden will, so wird ein grösstes Verneintes (maximum negatiuum,) seyn, vor dem kleinere Verneinte vorhergehen und nachfolgen, wie das mittlere unter den dreyen -10; -11; -9; und so wird ein kleinstes Verneintes, das seyn, vor dem grössere Verneinte vorhergehen und nachfolgen, wie das mittelste unter den dreyen -8; -7; -9. Heisst aber kleiner, das, was von dem andern abgezogenen was bejahtes lässt, daß also ein grösser verneintes kleiner heisst, so braucht man nicht zu sagen, ob ein Grösstes oder ein Kleinstes an sich selbst bejaht oder verneint seyn soll, sondern das Verneinte, das vorhin das grösste Verneinte hiesse, ist nun überhaupt ein Kleinstes, wie -11; im ersten Exempel, und das Verneinte, das vorhin ein verneintes kleinstes hiesse, ist nun überhaupt ein grösstes; wie -7 im zweyten

Exem-

Exempel. Ich werde in der Folge, wenn ich nicht das Gegentheil erinnere, diese Wörter in der letztern Bedeutung brauchen.

154. Eigentlich ist hier nur die Rede von solchen Functionen von x, da nur ein Werth zu einem Werthe von x gehört (functiones vniformes). Denn sonst kann für einerley x, ein Werth der Function ein grösstes oder kleinstes seyn, und der andere nicht. Bey der Ellipse (152) wäre so für einerley Abscisse die Ordinate CD ein grösstes, und die Ordinate Cd ein kleinstes (153). Eben so gehören Alg. I. Taf. 8 Fig. zu jeder Abscisse zwo Ordinaten, z. E. $f\varphi$; $f\Phi$; und da ist für den Punct A, eine in der Reihe, wo $f\varphi$ den Anfang macht, die kleinste $= 0$; und eine in der Reihe, wo $f\Phi$ den Anfang macht, die grösste AB.

155. Aufg. Wenn y eine einförmige Function von x ist, die Umstände zu finden, unter denen sie ein Grösstes oder Kleinstes wird.

Aufl. I. Wenn man erstlich $x + \alpha$; darnach $x - \alpha$ statt x setzt, so muß die Function beydemahl kleiner als das y werden, das ein Grösstes ist, und gröſſer als dasjenige, das ein Kleinstes ist, die erste Voraussetzung aber giebt (138).

$$\Gamma) y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 d^2 y}{2 dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3 y}{6 dx^3} \cdots$$

und die andere

wieder zu, so heisst sie ein Kleinstes (maximum vel minimum.)

So wird der Ellipse Ordinate PM Alg. II. Taf. 12 Fig. ein Grösstes, wenn sie zur Ordinate durch den Mittelpunct CD wird. Aber wenn $x^2 - 10x + 60 = y$ so ist y, für $x = 5$ ein kleinstes; Es wird alsdenn $= +35$ und jeder andere Werth von x gibt ein grösseres y; z. E. $x = 6$ oder 4 gibt eines wie das andere $y = 36$.

153. Wenn man bejahte und verneinte Grösten oder Kleinsten unterscheiden will, so wird ein grösstes Verneintes (maximum negatiuum,) seyn, vor dem kleinere Verneinte vorhergehen und nachfolgen, wie das mittlere unter den dreyen -10; -11; -9; und so wird ein kleinstes Verneintes, das seyn, vor dem grössere Verneinte vorhergehen und nachfolgen, wie das mittelste unter den dreyen -8; -7; -9. Heisst aber kleiner, das, was von dem andern abgezogenen was bejahtes lässt, daß also ein grösser verneintes kleiner heisst, so braucht man nicht zu sagen, ob ein Grösstes oder ein Kleinstes an sich selbst bejaht oder verneint seyn soll, sondern das Verneinte, das vorhin das grösste Verneinte hiesse, ist nun überhaupt ein Kleinstes, wie -11; im ersten Exempel, und das Verneinte, das vorhin ein verneintes kleinstes hiesse, ist nun überhaupt ein grösstes; wie -7 im zweyten

Exem-

Exempel. Ich werde in der Folge, wenn ich nicht das Gegentheil erinnere, dieſe Wörter in der letztern Bedeutung brauchen.

154. Eigentlich iſt hier nur die Rede von ſolchen Functionen von x, da nur ein Werth zu einem Werthe von x gehört (functiones vniformes). Denn ſonſt kann für einerley x, ein Werth der Function ein gröſſtes oder kleinſtes ſeyn, und der andere nicht. Bey der Ellipſe (152) wäre ſo für einerley Abſciſſe die Ordinate CD ein gröſſtes, und die Ordinate Cd ein kleinſtes (153). Eben ſo gehören Alg. I. Taf. 8 Fig. zu jeder Abſciſſe zwo Ordinaten, z. E. ſφ; ſΦ; und da iſt für den Punct A, eine in der Reihe, wo ſφ den Anfang macht, die kleinſte = 0; und eine in der Reihe, wo ſΦ den Anfang macht, die gröſſte AB.

155. Aufg. Wenn y eine einförmige Function von x iſt, die Umſtände zu finden, unter denen ſie ein Gröſſtes oder Kleinſtes wird.

Aufl. I. Wenn man erſtlich $x + \alpha$; darnach $x - \alpha$ ſtatt x ſetzt, ſo muß die Function beydemahl kleiner als das y werden, das ein Gröſſtes iſt, und gröſſer als dasjenige, das ein Kleinſtes iſt, die erſte Vorausſetzung aber giebt (138).

$$\Gamma)\ y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 d^2y}{2dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} \cdots$$

und die andere

$$\Delta) \; y - \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 d^2y}{2dx^2} - \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} \ldots$$

Da denn y, gröſſer als jeder dieſer Werthe ſeyn muß, wenn es ein Gröſſtes iſt, und kleiner, wenn es ein Kleinſtes iſt.

II) Wofern nun die Quotienten $\frac{dy}{dx}$ u. ſ. w. alle endlich ſind (140) ſo kann man allemahl α ſo klein annehmen, daß die Glieder jeder dieſer Reihe, die nach dem zweyten folgen, zuſammen weniger als das erſte betragen, weil die höhern Potenzen eines ſehr kleinen Bruches, ſehr ſchnell abnehmen. Weil nun der Werth von $\frac{dy}{dx}$ für Γ und für Δ einerley iſt, ſo wird in dieſem Falle, nachdem $\frac{dy}{dx}$ bejaht oder verneint iſt, Γ gröſſer oder kleiner, und Δ kleiner oder gröſſer als das y ſeyn, das der Abſciſſe x zugehört. Dieſe beyden Werthe fallen, jeder auf eine andere Seite des genannten y, ſo nahe als man will, weil man α ſo klein annehmen kann als man will; die geringſte Veränderung der Abſciſſe x, giebt alſo auf einer Seite was gröſſers als das genannte y, auf der andern was kleiners; folglich iſt dieſes y kein gröſſtes oder kleinſtes.

III. Wenn aber $\frac{dy}{dx} = 0$ und $\frac{ddy}{dx^2}$ endlich iſt, und wiederum α ſo klein angenommen wird, daß

daß die Glieder der Reihen, die nach dem dritten folgen, zusammen weniger als das dritte betragen; so werden Γ und Δ zugleich grösser oder zugleich kleiner als y seyn, nachdem ddy bejaht oder verneint ist.

IV. Um also zu untersuchen, ob die Function ein Grösstes oder ein Kleinstes werde, setze man dy:dx = o. Geht dieses an, und man findet aus dieser Voraussetzung einen, oder etliche Werthe von x, so beurtheilt man nach III. ob sie Grösten oder Kleinsten zugehören.

V. Wofern aber ddy:dx² = o so kann man aus III. noch nichts schliessen. Um die Art, wie man hier verfahren muß, deutlicher zu zeigen, sey $\frac{ddy}{dx^2} = p$; $\frac{d^3y}{dx^3} = q$; $\frac{d^4y}{dx^4} = r$ u.s.w.

Der Werth von y, der herauskömmt, wenn f statt x gesetzt wird, sey F; so ist das, was herauskömmt, wenn f + α statt x gesetzt wird;
$\Gamma = F + \frac{1}{2}\alpha\alpha p + \frac{1}{6}\alpha^3 q + \frac{1}{24}\alpha^4 r \ldots$
und das, was herauskömmt, wenn f − α statt x gesetzt wird,
$\Delta = F + \frac{1}{2}\alpha\alpha p - \frac{1}{6}\alpha^3 q + \frac{1}{24}\alpha^4 r \ldots$

VI. Wofern nun hier p = o; aber q endlich ist, so ist Γ grösser oder kleiner, und Δ kleiner oder grösser als F, nachdem q bejaht oder verneint ist; weil man allemahl α so klein annehmen kann, daß die folgenden Glieder der Reihen

hen zusammen weniger als das erste betragen; Also ist F kein Grösstes oder Kleinstes.

VII. Ist aber $q = o$ und r endlich, so sind Γ und Δ zugleich grösser oder kleiner als F, oder F ist ein Kleinstes oder Grösstes, nachdem r bejaht oder verneint ist.

VIII. Ueberhaupt sey $\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} = \varkappa$; $\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}} = \lambda$; so sind zwey allgemeine nächstfolgende Glieder von

$$\Gamma \ldots + \frac{1}{1.2.\ldots.2n} \cdot \alpha^{2n}\varkappa + \frac{1}{1.2..(2n+1)} \alpha^{2n+1}\lambda$$

und von

$$\Delta \ldots \frac{+1}{1.2.\ldots.2n} \cdot \alpha^{2n}.\varkappa - \frac{1}{1.2..(2n+1)} \cdot \alpha^{2n+1}.\lambda$$

Sind also alle vorhergehenden Glieder dieser Reihen $= o$; und $\varkappa$ ist endlich, so sind Γ; Δ; beyde zugleich grösser oder kleiner als F, und F ist ein kleinstes oder grösstes, nachdem $\varkappa$ bejaht oder verneint ist. Ist aber auch $\varkappa = o$ und λ endlich, so ist F weder ein grösstes noch ein kleinstes.

IX. Es sey $\frac{dy}{dx} = (x-f)^2 P$ wo P eine Function von x ist, die $x-f$ nicht zum Factor hat. So ist $\frac{dy}{dx} = o$ für $x = f$; $\frac{ddy}{dx^2} = 2.(x-f).$

P +

$P + (x-f)^2 \cdot \frac{dP}{dx}$ und dieſer Quotient wird $= o$ für $x = f$. Aber $q = 2.P + 4.(x-f).\frac{dP}{dx} + (x-f)^2 \frac{ddP}{dx^2}$ wird $= 2P$ für $x = f$. Alſo iſt hier F weder ein gröſſtes noch ein kleinſtes. (VI) Für $\frac{dy}{dx} = (x-f)^3$. P wird man auf eben die Art finden, daß p und q für $x = f$ verſchwinden, aber r endlich wird, alſo F ein gröſſtes oder kleinſtes iſt. (VII.) Und ſo erhellt überhaupt, daß F nur alsdenn ein gröſſtes oder ein kleinſtes iſt, wenn $\frac{dy}{dx} = (x-f)^m P$ ſo daß m ungerade iſt. Iſt aber m gerade, ſo iſt F weder ein gröſſtes noch ein kleinſtes.

X. Die gröſſten oder kleinſten leichter zu finden, dienen oft auch folgende Betrachtungen: Wenn y ein Gröſſtes oder Kleinſtes wird, ſo wird ay, und ay^n wofern a eine bejahte Gröſſe, und n eine bejahte ungerade Zahl iſt, auch ein Gröſſtes oder ein Kleinſtes, aber umgekehrt $b - ay^n$ imgleichen $\frac{a}{y^n} = b$ ein Kleinſtes oder ein Gröſſtes. Wenn n gerade iſt, läſſt ſich dieſes nicht anbringen, denn da kann y einen verneinten Werth haben, und alſo ein kleinſtes ſeyn, (153) und ſeine gerade Potenzen, die bejaht

ſind,

Für $\frac{dy}{dx} = o$ ist $x = \mp \sqrt{(a^3 : b)}$. Von dem doppelten Werthe der Quadratwurzel wird begreiflich hie der bejahte verstanden. Für diesen Werth ist p bejaht, also giebt $\sqrt{(a^3 : b)}$ ein kleinstes y.

II. Die dritte Seite findet sich auch $= \sqrt{(a^3 : b)}$, und so die halbe kleinste Fläche $= y = \frac{a^3}{b} + 2.$ a. $\sqrt{(a. b)}$

III. Das wäre die halbe kleinste Fläche wenn b gegeben ist. Man setze b sey nicht gegeben, so heißt die Frage: Unter allen gleichen Parallelepipeden das zu finden das die kleinste Fläche hat. So ist $\frac{dy}{db} = -\frac{a^3}{b^2} + a\sqrt{(a:b)}$, dieses $= o$ gesetzt giebt $b = a$. Also hat der Würfel selbst unter allen ihm gleichen Parallelepipeden die kleinste Fläche.

158. Ex. Unter allen geraden Linien OM, die aus einem gegebenen Puncte O 1. Fig. sich an eine gegebene algebraische krumme Linie CMN ziehen lassen, die kürzeste oder längste zu finden.

Aufl. I. Man ziehe durch O eine willkührliche Abscissenlinie OA, nehme auf derselben willkührlich $OA = c$ nenne Abscisse $AP = x$; Ordinate $PM = z$; auch $OM = y = \sqrt{(z^2 + (c-x)^2)}$

II)

II) Nun hat man zwischen x und z allemahl eine algebraische Gleichung (An. endl. Gr. 422; XXXVI.) Aus ihr $dz = m.dx$ wo m durch die beyden Coordinaten gegeben ist.

III) Aber $dy = \frac{z.dz - (c-x).dx}{y}$

Folglich wird $\frac{dy}{dx} = o$ wenn $c - x = m.z = \frac{z.dz}{dx}$ also $PO = c - x$ die Subnormallinie ist (92).

Die kürzeste oder längste OM ist also allemahl eine Normallinie.

IV. Daß die Normallinie eine kürzeste oder längste seyn kann, erhellt weil $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2.z.ddz}{dx^2} + 2.m^2 + 2$ verneint werden kann, wenn ddz verneint ist.

Befände sich z. E. O im Durchmesser eines Kreises, so gingen von diesem Puncte zwey Stücke einer einzigen geraden Linie an den Kreis, beyde senkrecht auf ihn, eins eine kürzeste Linie, das andre eine längste.

V. Bey transcendentischen Linien, findet die Voraussetzung (II) nicht statt. (An. endl. 575) So, wenn was hie O heisst, innerhalb der Spirale An. endl. III. Tafel 3. Fig. C wäre, giebt es da kein grösstes oder kleinstes CM.

159. Oft kann man grösste oder kleinste ohne Rechnung des Unendlichen bestimmen.

So: Eine Linie a ist in zwey Stücke getheilt x und a−x; Wenn wird das Rechteck aus beyden (a−x). x am grösten.

Da darf man nur x als Abscisse eines Kreises ansehen dessen Durchmesser = a; der Ordinate Quadrat ist dem Rechtecke gleich, und wird am grösten für $x = \frac{1}{2}a$. Ein Kleinstes giebt es nicht, wenn man nicht o dafür annehmen wollte.

Man kann die beyden Stücke $\frac{1}{2}a + u$ und $\frac{1}{2}a - u$ nennen, so ist ihr Rechteck $= \frac{1}{4}a^2 - u^2$, am grösten wenn $u = o$.

Sind OM, 1. 4. Fig. Normallinien so liegt der Bogen um M mit O auf einer Seite der Tangente, wo die krumme Linie gegen O hohl ist, aber auf der entgegengesetzten wo sie erhaben ist. Dort also ist die Normallinie eine längste, hie eine kürzeste.

160. I. Die Betrachtungen (155; V;) u.s. dienen sogleich aus der Rechnung zu entscheiden, ob man ein Grösstes oder ein Kleinstes findet, überlegt man die Beschaffenheit der Grösse von welcher die Frage ist, so entscheidet sich das öfters daraus ohne auf höhere Differentiale zu gehen.

II. Ehe man die Reihen (155) brauchte verhielt man sich so: Es sey y eine Ordinate die der Abscisse x gehört. Man nehme an x wachse wenigstens eine Zeit nach einander immer fort.

III.

III. Wenn nun diesen wachsenden Abscissen, einen Theil dieser Zeit über wachsende Ordinaten gehören, dann abnehmende, so giebt es eine Abscisse wo sich Wachsen der Ordinaten in Abnehmen verwandelt. Dieser gehört offenbahr die Ordinate, vor welcher, und nach welcher kleinere sind als sie.

IV. Nun ist $\frac{dy}{dx}$ bejaht für wachsende Ordinaten, verneint für abnehmende, also $= o$ wo es aus dem Bejahten ins Verneinte übergeht.

V. So kann auch eine Ordinate vor sich und nach sich grössere haben, bey ihr geht Abnehmen in Wachsen über, sie ist die kleinste in ihrer Reihe und auch für sie $dy : dx = o$.

VI. Für diese grösten oder kleinsten Ordinaten, ist die Tangente der Abscissenlinie parallel, die Subtangente unendlich, welches eben das Verhalten der Differentiale giebt.

VII. Aber eine Grösse kann auch aus dem Bejahten ins Verneinte durchs Unendliche übergehn. In diesem Falle wäre für die grösste oder kleinste Ordinate $dy : dx$ unendlich, oder $dx : dy = o$. Da wäre die Subtangente $= o$, die Tangente läge auf der Ordinate, wäre senkrecht auf die Abscissenlinie wenn die Ordinaten das sind.

VIII. Bey der krummen Linie (An. endl. 474) ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{a}{a-x}\right)}$

Für wachsende Abscissen, nehmen die Ordinaten ab, so lange x kleiner als a ist. Ist aber x grösser als a so ist die Kubikwurzel verneint, folglich der Quotient der Differentiale bejaht, und die Ordinaten wachsen. So geht Abnehmen in Wachsen über bey $x = a$; und da ist der Quotient der Differentiale unendlich.

Der Quotient, ist die trigonometrische Tangente, des Winkels den die berührende gerade Linie mit der Abscissenlinie macht. Dieser Winkel nimmt also für Abscissen grösser als a, immer ab, der Schenkel DG zieht sich ins Unendliche hinauf immer mehr und mehr in eine der Abscissenlinie parallele Lage. Das thut auch der ihm gleiche und ähnliche Schenkel DC. Für unendliche Abscissen verschwindet der Quotient, die Schenkel werden da der Abscissenlinie parallel.

IX. Das Beyspiel zeigt, wie man die Fälle leicht erkennt, wo $dy : dx$ nicht $= o$ sondern unendlich wird. Sie kommen bey Findung der Grössten oder Kleinsten nicht so häufig vor: Sie nicht auszuschliessen sagte ich in (155 II) nur, der Quotient sollte nicht endlich seyn.

X. Ich gebe nun ein Paar Beyspiele wo aus Betrachtung einer krummen Linie entschieden wird, ob man ein Grösstes oder ein Kleinstes finden, sie gestatten auch ökonomische Anwendung.

161. Einen Cylinder von gegebenem Innhalte zu machen, bey dem ein Boden und krumme Fläche zusammen ein Kleinstes sind.

I. Kör-

I. Körner und Getränke zu messen, braucht man hohle Cylinder die oben offen sind. Da kömmt also die Frage vor, ein solches Maaß aus dem wenigsten Holze oder Bleche zu verfertigen. Sie ward wirklich vor mehr Jahren in einer Reichsstadt von einem Mitgliede des Rathes dem dasigen Landmesser gethan, der sie natürlich an mich beförderte.

II. Des Cylinders Halbmesser sey = r; Höhe h, beyde unbekannt, aber der Innhalt $r^2 . h . \pi = a^3$ gegeben, folglich $h = a^3 : r^2 . \pi$.

III. Die krumme Fläche ist = $h . 2 . r . \pi = 2 . a^3 : r$. Dazu kömmt die Fläche eines Bodens = $r^2 . \pi$. Die Summe dieser beyden Flächen ändert sich wie sich r ändert. Ich setze sie = a. y so ist $y = \frac{r^2 . \pi}{a} + \frac{2 . a^2}{r}$; Eine Gleichung für eine krumme Linie deren Abscisse = r, Ordinate = y.

IV. Kann man eine Abscisse finden für welche die Ordinate ein Kleinstes ist, so giebt diese Ordinate mit a multiplicirt die kleinste Fläche.

V. Für $y = o$ ist $r^3 = -\frac{2 . a^3}{\pi}$. Es giebt also eine Abscisse $= -a \sqrt[3]{(2 : \pi)}$ wo die krumme Linie die Abscissenlinie schneidet. Sie ist verneint, und auser ihr giebt es keine andre, weil die reine kubische Gleichung nur eine mögliche Wurzel hat. (An. endl. 240)

VI. Man deute durch u eine bejahte veränderliche Zahl an, und ſetze $r = -u.a.\sqrt[3]{(2:\pi)}$, ſo kömmt (III) $y = \frac{2.a.(u^3-1)}{u\sqrt[3]{(2:\pi)}}$.

Dieß iſt bejaht oder verneint, nachdem u gröſſer oder kleiner als 1 iſt.

Im letzten Falle, eine deſto gröſſere verneinte Gröſſe, je kleiner u iſt, die alſo bis ins Unendliche verneinte wächſt, wenn u bis auf nichts abnimmt.

Für u gröſſer als 1; iſt y bejaht, und wächſt wenn u wächſt; ins Unendliche wenn u ins Unendliche wächſt.

VII. Man ſtelle ſich eine Abſciſſenlinie vor, wo vom Anfange der Abſciſſen, bejahte r, rechter Hand, verneinte linker Hand genommen worden, die Ordinaten ſenkrecht auf die Abſciſſe, bejahte über der Abſciſſenlinie, verneinte unter ihr. Durch den Anfang der Abſciſſenlinie ziehe man auf ſie ein unbegränztes Perpendikel.

VIII. Man laſſe vom Anfange der Abſciſſen, linker Hand verneinte wachſen: Ihnen gehören anfangs groſſe verneinte Ordinaten zu, die immer abnehmen, die Ordinate für $u = 1$ (V; VI) iſt $= o$ gröſſern wachſenden Abſciſſen gehören wachſende bejahte Ordinaten zu. Das unbegränzte Perpendikel (VII) iſt alſo eine Aſymptote an welcher

cher sich die krumme Linie linker Hand aus dem Unendlichen herauf zieht, und nach dem sie die Abscissenlinie geschnitten hat linker Hand ins Unendliche hinaufgeht, auch von der Linie an welcher sie heraufkam, sich immer weiter linker Hand ins Unendliche entfernt.

IX. Jede bejahte Abscisse, hat nur eine Ordinate, und diese bejaht (III) Für $r = o$ ist y unendlich, für kleine r sehr groß, aber abnehmend indem sie wachsen. Also ist das unbegränzte Perpendikel (VII) auch über der Abscissenlinie, Asymptote, an welcher sich die krumme Linie rechter Hand herabzieht, aber die Abscissenlinie nicht schneidet (V)

X. Nimmt man r sehr groß, und immer grösser, so wird der zweyte Theil des Werthes von y gegen den ersten immer weniger und weniger beträchtlich, und die Ordinate wächst ins Unendliche.

XI. Zwischen Abnehmen (IX) und Wachsen (X) giebt es also wenigstens einen Uebergang, da muß eine kleinste Ordinate seyn.

XII. Ich sage wenigstens eine, denn die Ordinaten könnten aus abnehmenden wachsende werden, und ferner aus wachsenden abnehmende, und dann wiederum wachsende u. s. w. Ob so was geschieht oder nicht, entscheidet am kürzesten die Betrachtung der Differentiale.

XIII. Nähmlich $\frac{dy}{dr} = \frac{2.\pi.r}{a} - \frac{2a^2}{r^2}$ ist für bejahte r, verneint so lange r^3 kleiner ist als $\frac{a^3}{\pi}$; wird = o wenn diese beyden Gröſſen gleich sind, und ist immer bejaht wenn die erste gröſſer ist als die letzte.

XIV. Also giebt es eine einzige Abscisse, bis an welche die Ordinaten abnehmen und dann wiederum zunehmen, sie ist $r = a : \sqrt[3]{\pi}$ einzig wegen der reinen kubischen Gleichung.

XV. Ihr gehört die kleinste Ordinate $3.a.\sqrt[3]{\pi}$; welche mit a multiplicirt die kleinste Fläche giebt.

XVI. Die Höhe (IX) ist $= a : \sqrt[3]{\pi}$ dem Halbmesser gleich.

XVII. Da man den Halbmesser nicht verneint nimmt, so gehören V. VIII. nicht zur Frage, mussten aber beygebracht werden, die ganze krumme Linie darzustellen, von welcher man hie nur den Theil braucht, der bejahten Abscissen gehört.

XVIII. Exempel. Münchhausen Hausvater 1. Th. 600. S. fand den braunschweigischen Himten, einen Cylinder dessen Durchmesser $= \frac{19}{3}$ pariser Zoll, die Höhe $= \frac{16}{3}$ par. Zoll. So ist der Innhalt $= (\frac{19}{3})^2 . \frac{1}{4}\pi . \frac{16}{3}$ also

2 log

2. $\log\left(\frac{15}{3}\right) = 2{,}5726136$
$\log \pi = 0{,}4971499$
$\log \frac{4}{3} = 0{,}1249388$

$\log$ des Innh. $= 3{,}1947023$

Giebt dem Innhalt 1565,6 pariser Cubikzoll. Münchhausen setzt ihn 1564. Begreiflich hat er nicht so scharf gerechnet. Meine Zahl nehme ich für a^3, setze den Pariser Zoll $= 1$. Also für (XV)

$\log a = 1{,}0649001$
abgez. $\frac{1}{3} \log \pi = 0{,}1657166$

$\log r = 0{,}8991835$
giebt $r = h = 7{,}9283$

Für die Fläche (XV)

2. $\log a = 2{,}1298002$
$\log 3 = 0{,}4771212$
$\frac{1}{3} \log \pi = 0{,}1657166$

$2{,}7726380$
giebt die Fläche $= 592{,}43$.

Bey Münchhausens Himten war der Halbmesser $= \frac{29}{3}$ die Höhe $\frac{16}{3}$ kleiner. Die Summe der krummen Fläche und der Grundfläche finde ich $= 617{,}49$.

162. Einen Cylinder von gegebenem Innhalte zu machen, wo Summe der krummen Fläche, und beyder Grundflächen ein Kleinstes ist.

ſchleifen im Zählen, Beyſichtragen u. ſ. w. ausgeſetzt. Je kleiner alſo die Fläche iſt wovon die gegebene Maſſe eingeſchloſſen wird, deſto weniger leidet das Geld durch Abſchleifen.

Die kleinſte Fläche zu erhalten, Geld ſo dick zu machen ſo breit es iſt, läſſt ſich wohl nicht bewerkſtelligen. Indeſſen zeigt dieſe Rechnung daß es gut iſt dem Gelde kleinere Durchmeſſer und mehr Dicke zu geben. Die Holländiſchen Ducaten weichen von dieſer Vorſchrift unter dem jetzo gewöhnlichen Gelde am meiſten ab, da wir keine Bracteaten mehr haben.

Dieſe Bemerkung über Verhältniß zwiſchen Durchmeſſer und Dicke des Geldes findet ſich in Friedr. Gottlieb Buſſe Kenntniſſe und Betrachtungen des Münzweſens; 1795. 65. S.

Betrachtung gewiſſer paraboliſcher Linien, welche zur Erläuterung der Lehre von den Gleichungen dienen.

163. Lehrſ. Wenn m eine ganze bejahte Zahl bedeutet, ſo hat die krumme Linie, welcher die Gleichung $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \ldots + tx + u = y$ zugehört, zweene unendliche Schenkel, beyde auf einer Seite der Axe, oder einen auf der einen, den andern auf der andern, nachdem m gerade oder ungerade iſt. Sie kann ferner die Axe nicht mehr

mehr als m mahl ſchneiden, und bey jedem Durchſchnitte wird y verneint oder bejaht, wenn es zuvor bejaht oder verneint war.

Bew. I. Es ſey 12 F. AP = + x; PM = + y; Wenn x unendlich wächſt, ſo wird y = x^m (10) Dieſes iſt für x = + ∞ allemahl bejaht, m mag gerade oder ungerade ſeyn: Aber für x = − ∞ iſt es bejaht oder verneint, nachdem m gerade oder ungerade iſt. Alſo befindet ſich allemahl ein unendlicher Schenkel für bejahte Abſciſſen über der Axe, der unendliche Schenkel für verneinte Abſciſſen aber iſt über oder unter der Axe, nachdem m gerade oder ungerade iſt. Bey jedem Durchſchnitte wie in E geht die krumme Linie durch die Axe, und alſo bekömmt y einen Werth, der ſeinem vorigen Werthe entgegengeſetzt iſt.

II. Es können zweene Durchſchnitte in einen zuſammengehen, wie wenn die Abſciſſenlinie, ſich ſelbſt parallel herunter bis in H rückte, und daſelbſt die krumme Linie berührte: Da ſind die Werthe von y auf beyden Seiten des Berührungspunctes einander nicht entgegengeſetzt.

III. Wenn die drey Durchſchnitte C; D; E; in einen zuſammengingen, oder wenn ſich der Bogen CHME in einen Beugungspunct (point d' inflexion; *Cramer* An. des Courb. §. 263.) verwandelte, ſo würden die Ordinaten auf beyden Seiten dieſes dreyfachen Durchſchnitts-

schnittspuncts einander entgegengesetzt seyn, welches aber wiederum nicht statt finden würde, wenn vier Durchschnittspuncte CDEF in einen Schlangenpunct (point de Serpentement, Cramer §. 164. Maupertuis; Mem. de l'Ac. des Sc. 1729. p. 277.) zusammengingen. Und so erhellt, daß die Ordinaten in das Entgegengesetzte übergehen oder nicht, nachdem die Zahl der Durchschnittspuncte, die in einen Punct der Axe zusammengehen, ungerade oder gerade ist.

IIII. Es giebt soviel Durchschnitte, soviel mögliche Wurzeln die Gleichung $y = o$ hat, welche ich Hauptgleichung nennen will, und die Abscissen für die Durchschnitte, AB; AC; AD; u. s. w. sind die möglichen Wurzeln dieser Gleichung.

164. Für eine andere krumme Linie 13 Fig. sey auch $A\pi = x$; $\pi\mu = z = \frac{dy}{dx} = mx^{m-1} + (m-1).px^{m-2} \ldots + t$, so ist dieses die Differentiallinie jener Hauptlinie (127.) und man kann dergleichen Differentiallinien weiter finden, bis man auf die $m-1$te kömmt, welche eine gerade Linie seyn, und $m.(m-1).(m-2)\ldots x$ zur Ordinate haben wird. Jede Differentiallinie kann in Absicht auf ihre nächstfolgende, als eine Hauptlinie betrachtet werden.

165. Die Abscissen AR; AG; AL; AV; 12 Fig. denen gröſste oder kleinste Ordinaten RS;

RS; GH; LN; VW; zugehören, sind diejenigen, wo z oder $\frac{dy}{dx} = o$ (153. IIII.) oder wo die Differentiallinie 13 F. ihre Axe schneidet (164). Also geben die Wurzeln der Gleichung $\frac{dy}{dx} = o$, die Abscissen, welche in der 12 F. grössten oder kleinsten Ordinaten zugehören.

166. Wenn die Axe in m unterschiedenen Puncten von der krummen Linie geschnitten wird, und F der letzte Durchschnitt zur Rechten ist, so ist die krumme Linie, rechter Hand des Punctes F beständig über der Axe (163. I.) also ist sie linker Hand dieses Punctes, unter der Axe, oder ihre Ordinaten zwischen F und dem nächstvorhergehenden Durchschnitte E sind verneint, und VW ist ein verneintes grösstes in der ersten Bedeutung 153, aber ein kleinstes in der letzten. Hier wird es bequemer seyn die erste Bedeutung zu brauchen. Eben so folgt 163. daß zwischen E und D eine bejahte grösste Ordinate LN, zwischen D und C eine verneinte grösste ist, und so ferner die Zeichen der grössten Ordinaten zwischen jedem Paare Durchschnitte und zwischen dem nächstvorhergehenden Paare Durchschnitte, wenn beyde Paare einen mit einander gemein haben, entgegengesetzt sind. Und diese grössten Ordinaten sind alle Grösste in der ersten Bedeutung (153) weil die Ordinaten von jedem Durchschnitte

ſchnitte bis zu dem nächſtvorhergehenden, anfangs von o an wachſen, und nach dieſem wieder bis auf o abnehmen müſſen.

167. Wenn für eine Abſciſſe, wo z = o die Ordinate kein Gröſſtes, ſondern ein Kleinſtes in der erſten Bedeutung 153 wird, ſo verlieren ſich zweene Durchſchnitte, und die Hauptgleichung y = o enthält zwo unmögliche Wurzeln. Wenn man für der krummen Linie 12 F. Axe KQ annähme, ſo wird ſie zu einer Gleichung vom fünften Grade gehören, die nur eine mögliche Wurzel KY; und vier unmögliche Wurzeln hat, deren zwo durch die kleinſte Ordinate IH; und zwo durch die kleinſte Ordinate XW angezeigt werden. Denn wenn die Ordinate ein Kleinſtes wird, ſo muß ſie zuvor abgenommen haben, und nach dieſem wieder wachſen. Nun kann ſie entweder die äuſerſte unter den gröſſten oder kleinſten Ordinaten ſeyn, wie XW wäre, oder nur von den Mittlern, wie IH; In dem letzten Falle, haben die Ordinaten vor ihr nicht von einem unendlichen Werthe, ſondern von einem endlichen gröſſten ON abgenommen, und wachſen nach ihr wieder bis auf eine endliche gröſſte TS zu; alſo fällt jede kleinſte Ordinate zwiſchen zwo gröſſte, die mit ihr einerley Zeichen haben, und die beyden Durchſchnitte C; D; verlieren ſich, welche ſtatt gefunden hätten, wenn man für der krummen Linie Axe AP angenommen hätte, da ſie zu einer Gleichung gehört hätte,

deren

deren fünf Wurzeln alle möglich sind, und wo die grösste Ordinate GH zwischen zwo grösste die mit ihr entgegengesetzte Zeichen gehabt hätten, RS; LN gefallen wären. Ist die äuserste grösste oder kleinste Ordinate zur rechten Hand nicht ein verneintes grösstes wie VW sondern ein bejahtes kleinstes wie XW, so verlieren sich die beyden Durchschnitte E und F. Die krumme Linie muß nähmlich rechter Hand des Punctes X beständig über der Axe bleiben, und ist linker Hand auch schon darüber gewesen, damit ihre Ordinate bis auf die kleinste XW abnahm.

Wenn m ungerade ist, so muß die krumme Linie zur Rechten des Durchschnittes, der wie B 12 F. zum äuersten nach der linken Hand liegt, über der Axe seyn, weil sie zur Linken dieses Durchschnittes beständig unter der Axe bleibt. Daher muß die grösste Ordinate RS zwischen diesem Durchschnitte und dem nächstvorhergehenden C bejaht seyn. Ist aber m gerade, so befindet sich die krumme Linie linker Hand des Durchschnittes, der wie R 13 F. am weitesten zur Linken liegt, beständig über der Axe, und also ist die grösste Ordinate zwischen ihm und dem nächstvorhergehenden verneint. Wenn also der Hauptgleichung äuerste Wurzeln AE, AF, und AC, AB, möglich seyn sollen, so muß die grösste bejahte Wurzel der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx}$

 $= 0$,

$= 0$, oder die kleinste verneinte, wenn diese Gleichung keine bejahten Wurzeln hat, (das ist, die Wurzel dieser Gleichung, welche unter den grössten oder kleinsten Ordinaten der 12 F. die giebt, welche am weitesten nach der rechten Hand liegt,) in y gesetzt ein grösstes verneintes geben. Die grösste verneinte Wurzel der Differentialgleichung aber, oder die kleinste bejahte, wenn sie keine verneinten hat, muß in y gesetzt ein grösstes Bejahtes oder Verneintes geben, nachdem m gerade oder ungerade ist.

Umgekehrt gilt dieses nicht. Wenn man für die Axe der krummen Linie 12 F. eine Parallele mit AP in der Weite XZ annimmt, so ist die äuserste grösste Ordinate ZW sowohl verneint als vorhin VW; und doch hat die Hauptgleichung alsdenn vier unmögliche Wurzeln.

168. Wenn die Hauptgleichung m unterschiedene mögliche Wurzeln hat, oder die Axe von der krummen Linie in m unterschiedenen Puncten geschnitten wird, und wenn die Differentialgleichung n bejahte Wurzeln hat, so sind die Ordinaten y welche diesen Wurzeln der Differentialgleichung in der Hauptlinie zugehören, lauter grösste, und jede zwo nächste sind einander entgegengesetzt; Heisst man also die äuserste zur rechten, wie VW 11 F. die nte und die vorhergehenden LN; GH, ... die

n —

n — 1te; n — 2te; u. s. w. so ist die
nte; n — 2te; n — 4te; .... n — 2kte verneint
n — 1te; n — 3te; n — 5te; n — 2k — 1te; bejaht.
Will man also wissen, wie die erste beschaffen ist, die der Abscisse AG zugehört, so ist sie verneint oder bejaht, nachdem n ungerade oder gerade ist; denn ihre Zahl 1; ist im ersten Falle = n — 2k und im zweyten = n — 2k — 1.

169. In der Voraussetzung (168) fallen nicht weniger als n Durchschnitte rechter Hand des Punctes A 12 F. oder die Gleichung y = o hat nicht weniger als n bejahte Wurzeln. Denn zwischen jede zwo nächste grösste Ordinaten fällt ein Durchschnitt, weil sie einander entgegengesetzt sind (166): Zwischen n grösste Ordinaten, fallen also n — 1 Durchschnitte; und weil die nte verneint ist (168) so fällt zu ihrer rechten Hand noch einer.

170. Wenn n ungerade ist, so ist die erste grösste Ordinate GH verneint (168). Ist nun in der Gleichung (163) das letzte Glied u bejaht, so ist die Ordinate für x = o oder die Ordinate durch A, bejaht, und folglich schneidet die krumme Linie die Axe zwischen A und G; und dieses nur einmahl, denn geschähe es mehr als einmahl, so würde die krumme Linie an dem nächsten Durchschnitte über die Axe, an dem nächstfolgenden wieder darunter kommen, und müsste also die Axe noch einmahl schneiden um

bey A darüber zu seyn: Also gäbe es zum wenigsten drey Durchschnitte; oder, wie auf eben die Art erhellt, fünf, sieben, u. s. w. Zwischen jedem Paar Durchschnitte aber fällt eine grösste Ordinate, daher wäre GH nicht die nächste grösste Ordinate bey A.

Ist u verneint, so befindet sich die krumme Linie bey A unter der Axe, und wenn sie also die Axe zwischen G und A schneiden sollte, so müsste solches entweder zweymahl, viermahl, sechsmahl u. s. w. geschehen; welches wiederum grösste Ordinaten zwischen A und GH gäbe; also schneidet sie die Axe zwischen A und G gar nicht.

Solchergestalt giebt es, wenn n ungerade ist, $n+1$; oder n; bejahte Wurzeln der Hauptgleichung, nachdem u bejaht oder verneint ist.

171. Wenn n gerade ist, so ist die erste grösste Ordinate bejaht, (168) und es wird wie vorhin erwiesen, daß zwischen ihr und dem Anfange der Abscissen, kein Durchschnitt oder nur einer fällt, das ist, daß die Gleichung n oder $n+1$ bejahte Wurzeln hat, nachdem u in ihr bejaht oder verneint ist.

Von den gleichen Wurzeln.

172. Lehrs. Wenn die Hauptgleichung $y = 0$; r gleiche Wurzeln enthält, so enthält die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ von diesen Wurzeln $r-1$;

Bew.

Bew. Wenn in der ersten Gleichung $x = e$, und noch einmahl $x = e$; u. s. f. [illegible]mahl $x = e$; so kommen in derselben [illegible] Wurzelgleichungen jede $x - e = o$ als Factoren vor, oder es ist $y = (x-e)^r$. P wo P das übrige bedeutet, was in die genannten n Wurzelgleichungen multiplicirt wird, um das Product zu erhalten, den Factor $x - e$ aber nicht enthält. Folglich ist $\frac{dy}{dx} = r.(x-e)^{r-1}.P + (x-e)^r.\frac{dP}{dx} = (x-e)^{r-1}\left(r.P + \frac{(x-e).dP}{dx}\right)$ Die Differentialgleichung enthält also ein Product aus $r-1$ Wurzelgleichungen, deren jede $x - e = o$ ist, oder $r-1$ Wurzeln jede $x = e$. Dieser Beweis gilt, wie offenbar ist, e mag möglich oder unmöglich seyn.

Ex. $x^5 * - 8x^3 + 24x^2 - 28x + 16 = y = (x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4).(x+4) = (x^2 - 2x + 2)^2.(x+4) = (x - 1 + \sqrt{-1}).(x - 1 - \sqrt{-1}).(x+4)$. Hier kann also einmahl $e = 1 - \sqrt{-1}$ und $P = (x - 1 - \sqrt{-1})^2.(x+4)$ zweytens $e = 1 + \sqrt{-1}$ und $P = (x - 1 + \sqrt{-1})^2.(x+4)$ beydesmahl $r = 2$ seyn; oder die Gleichung $y = o$ hat also zwo gleiche Wurzeln, jede $= 1 - \sqrt{-1}$ und zwo gleiche, jede $= 1 + \sqrt{-1}$. Folglich muß die Gleichung $\frac{dy}{dx} = o$ so wohl $1 +$

$\sqrt{-1}$ als $1 - \sqrt{-1}$ zur Wurzel haben. Es ist aber $\frac{dy}{dx} = 5.(x^{\square} - \frac{24}{5}x^2 + \frac{48}{5}x - \frac{28}{5})$

wo der letzte Factor $= 0$ wird, wenn man statt x die erwähnten Werthe setzt. Dieses leicht zu prüfen, darf man nur bemerken, daß $(1 \pm \sqrt{-1})^2 = \pm 2\sqrt{-1}$; und $(1 \pm \sqrt{-1})^3 = -2 \pm 2\sqrt{-1}$ und $(1 \pm \sqrt{-1})^4 = -4$; und $(1 \pm \sqrt{-1})^5 = -4 \mp 4\sqrt{-1}$

Wenn man den erwähnten letzten Factor von $\frac{dy}{dx}$ mit $x^2 - 2x + 2$ als der quadratischen Gleichung, deren Wurzeln $1 \pm \sqrt{-1}$ sind, dividirt, so kömmt $x^2 + 2x - \frac{14}{5}$ zum Quotienten, welches $= 0$ gesetzt zwo mögliche Wurzeln hat.

173. Wenn in der Voraussetzung (168) sonst nichts geändert wird, als daß unter den n bejahten Wurzeln, r gleiche sind, so gehen bey der Abscisse, die jeder dieser r Wurzeln gleich ist, $r - 1$ Grösste in einem Punct zusammen (166) und die Bogen der krummen Linie auf beyden Seiten dieses Punctes liegen auf einer Seite der Axe oder auf verschiedenen, nachdem r gerade oder ungerade ist. (163. III.) Uebrigens bleiben die Sätze 169; 170; 171; noch wahr.

Von

Von den unmöglichen Wurzeln.

174. Lehrs. Jede bestimmte rationale Gleichung, hat entweder keine unmöglichen Wurzeln, oder unmögliche Wurzeln in gerader Menge. Bekannter maassen wird o als eine gerade Zahl angesehn.

Bew. I. In 163; sey m gerade, ferner u eine bejahte Grösse; so ist für $x = o$ die krumme Linie über der Axe. Weil sie nun für ein bejahtes unendliches x, auch über der Axe ist, so schneidet sie rechter Hand des Anfangs der Abscissen, die Axe entweder gar nicht, oder zweymahl, oder viermahl u. s. w. Sie muß nähmlich zu jedem Durchschnitte, da sie unter die Axe kömmt, noch einen machen, da sie wieder herauf kömmt. Die bestimmte Gleichung also, die heraus kömmt, wenn $y = o$ gesetzt wird, hat keine bejahte Wurzel, oder deren eine gerade Zahl.

Nun ist die krumme Linie auch für das unendliche verneinte x, über der Axe; schneidet also wiederum die Axe linker Hand des Anfangs der Abscissen, gar nicht, oder sie macht eine gerade Menge Durchschnitte. Also giebt es auch nur eine gerade Menge möglicher verneinter Wurzeln.

Folglich machen die Mengen beyderley Wurzeln auch eine gerade Summe aus. Und weil die Menge aller Wurzeln ebenfalls gerade ist, so muß die Menge der unmöglichen gerade seyn.

II. m gerade, u verneint, (163) also die krumme Linie für $x = o$ unter der Axe. Nach eben der Art zu schliessen giebt es eine ungerade Menge bejahter, und auch eine ungerade Menge verneinter Wurzeln. Beyder Mengen Summe ist gerade, also auch die Menge der unmöglichen.

III. m ungerade, u bejaht, giebt eine gerade Menge bejahter Wurzeln, eine ungerade verneinter; beyder Mengen Summe ist ungerade, und lässt von der ungeraden Menge aller Wurzeln abgezogen eine gerade Menge unmöglicher übrig.

IIII. m ungerade, u verneint, giebt eine ungerade Menge bejahter Wurzeln und eine gerade verneinter, also wieder eine gerade Menge unmöglicher.

Man s. hievon Eulers Alg. 272. IIII. angef. Schrift.

175. Lehrs. Die Hauptgleichung hat soviel Paare unmöglicher Wurzeln, I) so viel Paare unmöglicher Wurzeln die Differentialgleichung hat; II) so viel den möglichen Wurzeln der Differentialgleichung zugehörige y kleinste werden.

Bew. I. Gesetzt, die Differentialgleichung habe α mögliche Wurzeln, und folglich $m - 1 - \alpha$ unmögliche (164). Wenn nun ihre möglichen Wurzeln, lauter grösste y geben, so sind

zugleich

zugleich jede zwey nächste solche y einander entgegengesetzt. Wären sie einander nicht entgegengesetzt, sondern lägen wie z. E. XW; ON 12 F. auf einer Seite der Axe KQ; so wird die Axe zwischen ihnen von der krummen Linie entweder geschnitten oder nicht. Geschicht das erste, so muß die krumme Linie die Axe zwischen O und X entweder zweymahl, oder viermahl, oder sechsmahl u. s. w. schneiden, um von N auf die andere Seite der Axe, und denn wieder nach W auf die erste zu kommen; zwischen jedem Paare Durchschnitte aber fällt ein Grösstes (166) also wären die genannten y nicht die nächsten Grösten. Die krumme Linie schneidet also zwischen ihnen die Axe nicht, und weil ON; XW; entweder Grösste oder Kleinste sind, so müssen die Ordinaten von ON bis WX entweder abnehmen oder zunehmen, ohne o zu werden, und XW muß ein kleinstes oder grösstes seyn, nachdem ON ein grösstes oder kleinstes ist.

Wenn also die Wurzeln der Differentialgleichung lauter Grösste geben, so fällt zwischen jedes Paar der nächsten Grösten ein Durchschnitt, und nur einer; und es giebt dieserwegen $\alpha - 1$ Durchschnitte.

Wenn die äuserste Ordinate für eine Wurzel der Differentialgleichung, zur rechten oder zur linken Hand, ein Grösstes wie VW oder RS ist, so müssen die Ordinaten rechter Hand

der VW und linker Hand der RS; abnehmen; und weil kein gröſſtes oder kleinſtes mehr folgt, ſo nehmen ſie bis auf o ab, und alſo gibt es rechter Hand von VW und linker Hand von RS, noch einen Durchſchnitt, F und B; und von jeder Art nur einen, denn gäbe es mehr, ſo fiele zwiſchen jedes Paar ein Gröſſtes y, (167) und VW; RS; wären nicht die äuſerſten.

Alſo kann die Hauptgleichung nicht mehr als $\alpha - 1 + 2 = \alpha + 1$ mögliche Wurzeln haben, wenn die Differentialgleichung deren α hat, und behält alsdenn $m - \alpha - 1$ unmögliche, ſoviel als die Differentialgleichung hatte. Daß $m - \alpha - 1$ eine gerade Zahl iſt, und ſich alſo dieſe Wurzeln mit Paaren zählen laſſen, iſt ſchon bekannt. (174.)

II. Giebt eine mögliche Wurzel der Differentialgleichung ein kleinſtes y, ſo verlieren ſich dieſer wegen zweene Durchſchnitte und nicht mehr (167) und es giebt in der Hauptgleichung ein Paar unmöglicher Wurzeln; alſo ſoviel Paare, ſo vielmahl ſolches geſchicht.

176. Man wird die Frage, wieviel unmögliche Wurzeln in der Hauptgleichung ſind, entſcheiden, wenn man die Wurzeln der Differentialgleichung ſucht, und die möglichen darunter in die Hauptgleichung ſetzt, und ſieht, ob ſie gröſſte oder kleinſte geben, welches man erfährt, wenn man nebſt jedem y das eine ſolche Wurzel gibt,

gibt, auch das y ſucht, das ein etwas gröſſeres oder kleineres x als dieſe Wurzel, giebt, um zu ſehen, ob es gröſſer oder kleiner iſt als das, welches der Wurzel zugehört. Dieſe Arbeit aber kann man ſich durch folgende Betrachtung erleichtern: y iſt ein bejahtes gröſſtes oder kleinſtes, nachdem ddy verneint oder bejaht iſt, (155. III;) und ein verneintes gröſſtes oder kleinſtes; (das iſt, ein kleinſtes oder gröſſtes in der Bedeutung (155. III; oder in der zweyten 153) nachdem ddy bejaht oder verneint iſt, oder y iſt überhaupt in gegenwärtiger Bedeutung ein gröſſtes oder kleinſtes, nachdem $\frac{ddy}{dx^2}$ mit ihm verſchiedene oder einerley Zeichen hat; d. i. nachdem $\frac{yddy}{dx^2}$ verneint oder bejaht iſt.

177. Jede der Gleichungen $p=0$; $q=0$; $r=0$; u. ſ. w. wo p; q; r; die Bedeutungen 155 V; nicht die (163) haben; kann nach (163) in Abſicht auf die nächſthöhere als eine Hauptgleichung betrachtet werden, und hat alſo ſoviel Paare unmöglicher Wurzeln als dieſe nächſthöhere hat. Da hat nun p gegen r eben ſo ein Verhalten wie vorhin y gegen q; Wenn man alſo eine Wurzel der Gleichung $p=0$ in $\frac{dy}{dx}$ und in q ſetzt,

q setzt, so zeigt sie ein paar unmögliche Wurzeln in $\frac{dy}{dx} = o$; und folglich (175. I.) ein $y = o$ an, wofern sie $\frac{dy}{dx} q$ bejaht macht. Eben so, wenn man eine Wurzel der Gleichung $q = o$ in p und r setzt, und sie p r bejaht macht, so zeigt sie ein paar unmögliche in $q = o$; und folglich in $p = o$, und in $\frac{dy}{dx} = o$; und in $y = o$ an. Und eine Wurzel von $r = o$. zeigt ein paar unmögliche in $q = o = p = \frac{dy}{dx} = y$ an, wenn sie q. s bejaht macht, u. s. w. Aber das Paar unmögliche Wurzeln, das z. E. dieses bejahte q. s anzeigte, könnte vielleicht mit einem Paare einerley seyn, das durch ein bejahtes p. r angezeigt würde. Also darf man nicht in der Hauptgleichung $y = o$ so viel Paare unmöglicher Wurzeln annehmen, so viel sich solcher bejahter Producte machen lassen, aber das ist richtig, daß es nicht mehr Paare unmöglicher Wurzeln in $y = o$ giebt, als sich mit den Wurzeln der Gleichung $\frac{dy}{dx} = o$ bejahte Producte y. p; und mit denen der Gleichung $p = o$ bejahte Producte $\frac{dy}{dx} \cdot q$ und so mit den Wurzeln jeder Differentialgleichung, bejahte Pro-

Producte aus dem vor ihr nächstvorhergehenden Differentiale in das nach ihr nächstfolgende machen lassen. Die bejahten Producte y. p nähmlich zeigen der Gleichung $y = o$ unmögliche Wurzeln der zweyten Art (175. II. und 176) an; aber die übrigen bejahten Producte der Gleichung $y = o$ unmögliche Wurzeln der ersten Art (175. I.)

178. Wenn eine gewisse Wurzel der Gleichung $\frac{dy}{dx} = o$ macht, daß $p = o$ wird, so nehmen um diese Wurzel herum die Ordinaten y beständig zu oder ab. (155. VI.) Also fällt das y das der Wurzel von $\frac{dy}{dx} = o$ die $p = o$ macht, zugehört, nicht zwischen zween Durchschnitten, und dieser Umstand zeigt zwo unmögliche Wurzeln in der Hauptgleichung an, so sind zwo Wurzeln der Gleichung $\frac{dy}{dx} = o$ unmöglich, wenn eine Wurzel der Gleichung $p = o$ in q gesetzt, $q = o$ giebt, u. s. w. Wenn nähmlich einerley Werth von x; zugleich zwo nach einander folgende Differentialgleichungen auf o bringt, so zeigt solches ein paar unmögliche Wurzeln in der Gleichung, die vor beyden nächstvorhergeht, und folglich in der Hauptgleichung an.

179.

179. Wenn einerley Werth von x zugleich $\frac{dy}{dx}$ und p und q auf o bringet, so zeigt dieses gewiß ein paar unmögliche Wurzeln der Hauptgleichung an (178). Das y aber, das diesem x zugehört, ist doch ein Grösstes in gegenwärtiger Bedeutung, wenn r das ihm entgegengesetzte Zeichen hat. (155; VII. und 176.) also hat es in diesem Falle auf jeder Seite einen Durchschnitt oder eine mögliche Wurzel. Diese beyden Wurzeln werden unmöglich, wenn y ein Kleinstes wird, oder r mit ihm einerley Zeichen bekömmt. In gegenwärtigem Falle giebt es also ein oder zwey Paare unmöglicher Wurzeln, nachdem y. r verneint, oder bejaht ist.

Wenn in (178; 179) das Element der krummen Linie der Abscissenlinie parallel ist, so findet sich in (178) ein Beugungspunct, in (179) ein Schlangenpunct (163; III.)

180. Brächte einerley x; zugleich $\frac{dy}{dx}$ und p und q und r auf o; so gäbe es zwo unmögliche Wurzeln wegen $p = o$; und wenn yr verneint wäre, würde solches zwo mögliche anzeigen; die wegen $y.r = p$ wegfallen, daß es daher vier unmögliche giebt.

181. Ueberhaupt erhellt nach dieser Art zu schliessen und aus 155 VIII. folgendes: Wenn einer-

einerley Werth von x; zugleich $\frac{dy}{dx}$ u. s. w. die ersten 2n Differentialgleichungen auf o bringt, so giebt es in der Hauptgleichung 2n unmögliche Wurzeln. Bringt aber einerley Werth von x, die ersten 2n + 1 Differentialgleichungen auf o; so giebt es 2n oder 2n + 2 unmögliche Wurzeln in der Hauptgleichung, nachdem das Product aus dem diesem x zugehörigen y in das 2n + 2te Differential verneint oder bejaht ist.

Wegen (177) gilt eben dieses von 2n oder 2n + 1 nach einanderfolgenden Differentialgleichungen, wenn es schon nicht die ersten sind; da man denn statt y das Differential nehmen muß, das vor den 2n + 1 nach einander folgenden zunächst vorhergeht.

182. Wenn man die Axe AP mit einer parallelen Bewegung herunter führt, so rücken Durchschnitte wie CD immer näher zusammen, gehen endlich in einen, wenn die Axe die krumme Linie in H berührte, und werden nachgehends unmöglich, wenn sie in die Lage KQ kömmt. Daher sagt man, daß die Wurzeln einer Gleichung durch eine beständige Näherung, erst gleich, darnach unmöglich werden. Dieses erklärt aber nur die eine Art (175. II.) welche auf das letzte Glied einer Gleichung ankömmt, durch dessen Veränderung solche unmögliche Wurzeln in mögliche und umgekehrt könnten verwandelt werden.

Z. E.

Z. E. die Gleichung $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + Ka = y$ würde der krummen Linie auf die Axe KQ bezogen zugehören, und hätte 4 unmögliche Wurzeln; Aber die $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + Ka - KA = y$ gehörte eben der krummen Linie auf AP bezogen zu, und hätte lauter mögliche Wurzeln. Wenn aber Wurzeln der Differentialgleichungen unmöglich sind, so kömmt die Unmöglichkeit der Wurzeln der Hauptgleichung auf ihre Coefficienten an.

183. Anm. Die Regeln 176. 181. nebst noch einigen andern, finden sich in des Abbé de Gua Recherche du nombre des racines réelles ou imaginaires &c. Mem. de l'Acad. des Sc. 1741.

184. Ex. Gesetzt, man hat eine Gleichung von 48 Graden; deren Differentialgleichung also vom 47 ist; Diese Differentialgleichung hat 24 unmögliche Wurzeln, 6 mögliche bejahte, und 17 mögliche verneinte; unter den bejahten findet sich eine, welche ein Kleinstes giebt, und unter den verneinten finden sich deren drey. Also giebt es in der Hauptgleichung 24 unmögliche Wurzeln, wegen der 24 unmöglichen ihrer Differentialgleichung (175. I.) und vier Paare wegen der vier kleinsten, (175. II.) folglich 32 unmögliche Wurzeln. Nun geben fünf bejahte Wurzeln der Differentialgleichung Grösste. Von diesen Grössten müssen eine oder zwo mit dem Kleinsten auf eine Seite fallen, nachdem das Kleinste ein äusserstes ist oder nicht (167) die übrigen geben vier bejahte

bejahte Wurzeln, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man sich die Figur entwerfen will. Also hat die Gleichung gewiß vier bejahte Wurzeln. Wären die 17 Ordinaten, die verneinten Wurzeln der Differentialgleichung zugehören, lauter Grösste, so geben sie 16 Durchschnitte zwischen jedem Paare, und einen linker Hand der äusserſten, also 17 verneinte Wurzeln, von denen aber wegen der drey kleinsten, $3 \cdot 2 = 6$ abgehen, daß also 11 verneinte übrig bleiben. Nun sind $48 - 32 = 16$ mögliche Wurzeln, von denen man weiß, daß 4 bejaht, 11 verneint sind. Eine kann noch bejaht oder verneint seyn, nachdem die krumme Linie zwischen dem Grösſten, das dem Anfange der Abscissen rechter oder linker Hand zunächst liegt, rechter oder linker Hand geschnitten wird. Wird aber die Axe zunächst rechter Hand des Anfangs der Abscissen geschnitten, so ist y verneint für $x = 0$; Und wird sie linker Hand geschnitten, so ist y bejaht für $x = 0$. Also ist die 16 Wurzel bejaht oder verneint, nachdem der Werth von y für $x = 0$, d. i. das letzte Glied der Gleichung verneint oder bejaht ist. Gua hat diesen letzten Umstand aus dem Zeichen des letzten Gliedes als ein Product aus den Wurzeln betrachtet herleiten wollen, aber dabey an die unmöglichen Wurzeln nicht gedacht, die in dieses Product auch kommen.

Anwendung auf die cubiſchen Gleichungen.

185. Ex. Wenn $x^3 * + qx + r = y$ ſo iſt $3x^2 + q = \frac{dy}{dx}$ welches $= o$ wird, wenn $x = \pm \sqrt{-\frac{1}{3}q}$ Iſt alſo q in der cubiſchen Gleichung bejaht, ſo hat die Differentialgleichung, und folglich die Hauptgleichung zwo unmögliche Wurzeln. (175. I.) Man nehme alſo $x^3 * - px + r = y$ wo p für ſich was bejahtes iſt, und das Glied px wegen des vorgeſetzten Zeichens verneint wird; So iſt $3x^2 - p = \frac{dy}{dx}$ deren Wurzeln $x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}p}$, ſind. Sollen nun alle Wurzeln der cubiſchen Gleichung möglich ſeyn, oder die krumme Linie, die ihr zugehört, die Axe dreymahl ſchneiden, ſo muß die Ordinate, die zu $x = + \sqrt{\frac{1}{3}p}$ gehört, ein verneintes, und die zu $x = - \sqrt{\frac{1}{3}p}$ gehört, ein bejahtes Gröſſtes ſeyn. (167) Folglich muß $\frac{1}{3}p \sqrt{\frac{1}{3}p} - p \sqrt{\frac{1}{3}p} + r$ oder $-\frac{2}{3}p \sqrt{\frac{1}{3}p} + r$ verneint ſeyn. Dieſes erfolgt von ſich ſelbſt, wenn r verneint iſt. Iſt aber r bejaht, ſo ſetzt es zum voraus, daß $\frac{4}{9}p^2 . \frac{1}{3}p > r^2$ oder $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}r^2$. Eben ſo ſoll $-\frac{1}{3}p \sqrt{\frac{1}{3}p} + p \sqrt{\frac{1}{3}p} + r$ oder $\frac{2}{3}p \sqrt{\frac{1}{3}p} + r$, bejaht ſeyn. Das iſt es nun allemahl, wenn r bejaht iſt: Iſt aber r verneint, ſo folgt daraus wiederum, daß der erſte bejahte Theil gröſſer als der andere verneinte, oder $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}r^2$ iſt. Dieſe Vergleichung zwiſchen p und r beſtimmt

bestimmt sich also aus der ersten Voraussetzung, wenn r bejaht, aus der zweyten wenn es verneint ist. Folglich enthält jede cubische Gleichung, deren zweytes Glied fehlt, unmögliche Wurzeln wie 175. I. wenn der Coefficient des dritten Gliedes bejaht ist, und wie 175. II. wenn $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} r^2$ welche Regeln bekannt sind. (S. Alg. 699. 700.) Wenn $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} r^2$ so wird eine von beyden Ordinaten, die zu $x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} p$ gehören, $= o$ oder die krumme Linie berühret da die Axe und es gehen zweene Durchschnitte in einen zusammen, oder die Gleichung hat zwo gleiche Wurzeln. Wenn man sich die Figuren entwerfen will, so wird man gleich sehen, daß diese Berührung rechter oder linker Hand des Anfangs der Abscissen fallen muß, nachdem die krumme Linie beym Anfange der Abscissen über oder unter der Axe ist. Also sind die gleichen Wurzeln der Gleichung beyde bejaht oder verneint, nachdem ihr letztes Glied bejaht oder verneint ist.

In $x^3 * - 27x + 54 = o$, ist $p = 27$; $r = + 54 = 2p$ also $\frac{1}{4} r^2 = p^2 = \frac{1}{27} \cdot 27^3 = \frac{1}{27} p^3$. Die gleichen Wurzeln sind beyde $+ 3$, bejahte wie das letzte Glied. Die dritte muß wegen des fehlenden zweyten Gliedes $= - 2.3 = - 6$ seyn.

Wenn alle drey Wurzeln möglich sind, so ist $\frac{r}{p\sqrt{p}}$ gröſſer als $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ oder als $\frac{2}{3}$ tang $30°$ In

Lamberts Zusätzen zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen dient die 29. Tafel solche Gleichungen aufzulösen. Sein 89. §. giebt die Theorie davon.

Erweis einer Regel, die Zahl der bejahten und verneinten Wurzeln in einer Gleichung aus den Zeichen der Coefficienten zu finden.

186. Erkl. Wenn in einer Gleichung zweene nach einander folgende Coefficienten einerley Zeichen, beyde + oder beyde — haben, so heisst dieses eine Folge der Zeichen (succeſſio) wenn sie aber beyde verschiedene Zeichen, einer + der andere — haben, so heisst solches eine Abwechslung (permutatio).

187. Lehrs. Eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln alle möglich sind, hat soviel bejahte Wurzeln, soviel in ihr Abwechslungen von Zeichen sind, und soviel verneinte, soviel sie Folgen von Zeichen hat.

Bew. Wenn p; q; allemahl bejahte Grössen bedeuten, so sind folgende vier Formen von quadratischen Gleichungen möglich:

I) $x^2 + px + q$; II) $x^2 - px + q$; III) $x^2 + px - q$; IIII) $x^2 - px - q$; I. hat lauter Folgen, weil das erste Glied allemahl + hat; II hat zwo Abwechslungen + — und — +. III hat eine Folge + + und eine Abwechselung, + —;

$+-$; IIII eine Abwechslung und eine Folge $+-$ und $--$. Die Wurzeln sind von I; $-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$ beyde verneint, weil der Irrationaltheil kleiner als der Rationaltheil ist, und sind auch in der Gleichung zwo Folgen; von II; $+\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, beyde bejaht wie in der Gleichung zwo Abwechslungen sind; von III; $-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$ eine bejaht, die andere verneint, und eben so von IIII; $+\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$, wie in diesen beyden Gleichungen eine Folge und eine Abwechslung ist.

188. Lehrs. Eine Reihe der Zeichen $+$ und $-$ wie man will unter einander vermengt, doch so, daß sie sich mit $+$ anfängt, hat Abwechslungen in gerader Zahl, wenn sie sich mit $+$; und in ungerader, wenn sie sich mit $-$ endigt.

Bew. Man setze eine solche Reihe Zeichen werde durch ein neues vermehrt, aber so, daß ihr erstes Glied $+$, und das letzte wie es zuvor war, $+$ oder $-$ bleibe. Ich behaupte, die Abwechslungen werden alsdenn entweder gar nicht, oder um ein Paar vermehrt werden. Denn wenn man das Zeichen irgendwo mitten in die Reihe setzt, so bringt man es entweder zwischen zwey ähnliche ($+$ zwischen zwey $+$; oder $-$ zwischen zwey $-$) und denn kömmt keine neue Abwechslung zu den vorigen; Bringt man es zwischen zwey ihm unähnliche, so entstehen zwo neue Ab-

wechslungen, zwiſchen ein ähnliches und ein unähnliches, ſo wird die Abwechslung, die vorhin zwiſchen dieſen beyden war aufgehoben, ſtatt ihrer aber kömmt eine andere Abwechslung, und noch eine Folge. Setzt man das neue Zeichen vor das erſte oder nach dem letzten, ſo muß es ihm ähnlich ſeyn, und giebt alſo eine neue Folge, keine Abwechslung. In allen dieſen Fällen werden die Abwechslungen entweder nicht, oder um ein Paar vermehrt. Iſt alſo der Satz von einer Reihe wahr, ſie mag ſo wenig Zeichen haben als ſie will, ſo iſt er auch von jeder andern wahr, die mehr Zeichen enthält. Die kürzeſte Reihe, die ſich mit + endigt, iſt + − + und hat eine gerade Zahl von Abwechslungen, alſo haben alle Reihen, die ſich mit + endigen, eine gerade Zahl.

Die kürzeſte Reihe, die ſich mit − endigt, iſt + − und hat nur eine Abwechslung, alſo haben alle Reihen, die ſich mit − endigen, eine ungerade Zahl von Abwechslungen, denn jedes neue Zeichen, das hinzukömmt vermehrt die vorige Zahl der Abwechslungen entweder nicht, oder um ein Paar.

189. Lehrſ. Geſetzt, die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ (167) habe lauter mögliche Wurzeln; und darunter ſoviel bejahte, als ſie Abwechslungen hat: Die Gleichung $y = 0$ habe auch lauter mögliche Wurzeln; So behaupte ich, die

die Gleichung $y = o$ werde auch soviel bejahte Wurzeln haben als sie Abwechslungen hat.

Bew. In $\frac{dy}{dx} = o$ sind soviel Folgen und Abwechslungen als im $x^m + px^{m-1} \ldots + tx$ weil $\frac{dy}{dx}$ nur aus diesem Theile der Hauptgleichung wird, wenn man jedes Glied nach den Regeln des Differentiirens ändert, welches aber die Zeichen nicht ändert.

Diese Zahl der Abwechslungen, und zugleich der bejahten Wurzeln in der Differentialgleichung sey $= n$; und gerade, so ist das letzte Zeichen in der Differentialgleichung $+$ (188) also können die beyden letzten Glieder der Hauptgleichung $+ tx + u$ oder $+ tx - u$ heissen. Im ersten Falle ist die Anzahl der Durchschnitte für bejahte Abscissen, oder der bejahten Wurzeln $= n$; im zweyten $n + 1$ (171). Im ersten Falle aber sind in der Hauptgleichung n Abwechslungen, wie in der Differentialgleichung; im zweyten $n + 1$, also beydemahl soviel bejahte Wurzeln als Abwechslungen.

Nun sey n ungerade. So ist der Differentialgleichung letztes Zeichen $-$ (188) also sind der Hauptgleichung beyde letzten Glieder $- tx + u$ oder $- tx - u$. Im ersten Falle sind $n + 1$ im zweyten n bejahte Wurzeln (170). Jedesmahl so viel als Abwechslungen.

190. Lehrs. **In jeder Gleichung, die lauter mögliche Wurzeln hat, giebt es soviel bejahte, soviel es Abwechslungen giebt.**

Bew. Der cubischen Gleichung, die lauter mögliche Wurzeln hat, Differentialgleichung ist eine quadratische, die lauter mögliche Wurzeln hat (175. I.) Von dieser nun ist der Satz erwiesen, (187.) und folgt also von ihr auf die cubische (189). Eine biquadratische, die lauter mögliche Wurzeln enthält, hat zur Differentialgleichung eine cubische die auch lauter mögliche Wurzeln enthält, (175. I.) Von der cubischen ist der Satz nun jetzo erwiesen, also folgt er für die biquadratische (189). Und so von der biquadratischen auf die vom fünften Grade, deren Differentialgleichung sie ist, und so ohne Ende fort von jeder Gleichung auf die nächsthöhere, von der sie als eine Differentialgleichung angesehen werden kann.

Daß diese Schlüsse wegfallen, wenn nicht alle Wurzeln möglich sind, wird aus ihren Gründen, 166. u. f. erhellen. In der That kann man auch unmögliche Wurzeln weder als bejaht noch als verneint ansehen, daß es also natürlich ist, wenn sie sich nicht nach einer solchen Regel beurtheilen lassen.

191. Eine Gleichung vom Grade m hat m + 1 Glieder, und m Folgen und Abwechslungen zusammen; hat sie also n Abwechslungen

und

und bejahte Wurzeln, so giebt es in ihr $m - n$ Folgen und verneinte Wurzeln. Wenn $n = o$, so erhellt, daß eine Gleichung, die lauter Folgen hat, deren Glieder also bejahte Zeichen haben müssen, keine andern als verneinte Wurzeln haben kann.

192. Wenn man das Zeichen des zweyten, vierten, sechsten u. s. w. der geraden Glieder einer Gleichung ändert, so verwandelt man dadurch die Abwechslungen in Folgen, und die Folgen in Abwechslungen, also die verneinten Wurzeln in bejahte, und die bejahten in verneinte.

Ex. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ hat zwo Abwechslungen und eine Folge, zwo bejahte Wurzeln 2; 4; und eine verneinte -3; $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$ hat zwo Folgen und eine Abwechslung, zwo verneinte Wurzeln -2; -4; und eine bejahte $+3$.

193. Anm. Die krummen Linien (163) sind von verschiedenen Mathematikverständigern zur Erläuterung der Lehre von den Gleichungen gebraucht worden. Der seel. Hausen machte mir sie bekannt, als er mich den Gebrauch der Reihen (Alg. 304.) lehrte, denn man sieht leicht, daß die Hauptlinie eine dortige Hauptreihe, und die Differentiallinien, Differenzenreihen für verschwindende e vorstellen. Man kann auch durch Betrachtung dieser krummen Linien vieles, das diese Reihen, und darauf beruhende Eigenschaften der Gleichungen betrifft leicht zeigen, das ich in einer 1739. zu Leipzig gehaltenen Disputation Theoria radicum in aequationibus aus der blossen arithmetischen Betrachtung der Reihen mühsamer hergeleitet

habe. Einige Zeit nach Hausens Tode kam ich bey Untersuchung dieser krummen Linien auf den Beweis des Satzes (190). Hausen hat mir nie etwas gesagt, daraus ich hätte urtheilen können, daß er diese Folge aus den krummen Linien gekannt hätte. Meine Entdeckung war mir desto angenehmer, weil dieser Satz fast von keinem Algebraisten bis dahin war allgemein erwiesen worden. Man hatte sich begnügt seine Richtigkeit durch Exempel zu zeigen. Reyneau hat ihn deßwegen, wie ich in der Vorrede zur Algebra erinnert habe, aus seiner Analyse demontrée weggelassen. M. Friedr. Wilh. Stübner hat in einer sehr weitläuftigen Disputation einen Beweis dieses Satzes gegeben, welchen durchzugehen aber meine Gedult nie zugereicht hat; Er gründet sich auf die Beschaffenheit der Coefficienten und ihren Ursprung aus den Wurzelgleichungen. Der G. R. v. Segner hat noch in Jena einen andern Beweis bekannt gemacht, der aber wenn man alles bey ihm aus einander setzen will, ebenfalls in grosse Weitläuftigkeiten zu führen scheinet. Meiner hat mit keinem jener beyden etwas gemein. Ich habe ihn 1745. drucken lassen, und dem seel. Pr. Heinsius, der damahls sein mathematisches Lehramt in Leipzig antrat, zugeeignet. In den Memoires de l'Acad. des Sciences 1741; von denen ich erst den holländischen Nachdruck von 1747. bekommen, finden sich 106 u. f. S. zweene Beweise dieses Satzes von Abt Gua. Derselbe hat sowohl in dieser Abhandlung 96. S. als auch in einer andern die ich vorhin angeführt habe (das. 582. S.) verschiedenes, das zur Geschichte der Algebra gehört, beygebracht. Diesen Satz hat man insgemein dem Engelländer Thomas Harriot zugeschrieben, und er ist daher auch unter dem Nahmen **Harriots Lehrsatz** bekannt. Gua aber eignet ihn dem Descartes zu.

Von

Von den Gränzen der Wurzeln.

194. Lehrs. Weil die Hauptlinie mit allen ihren Differentiallinien (163; 164) alle rechter Hand über die Axe kommen (163) so giebt es ein x, das zugleich y und $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{ddy}{dx^2}$, und $\frac{d^3y}{dx^3}$ u. s. w. die Hauptformel und alle Differentialformeln, bejaht macht. Ich sage, wenn man ein solches x gefunden hat, so werden alle diese Formeln auch von jedem grössern bejahten, wenn es bejaht war, und von jedem kleinern verneinten, wenn es verneint war, bejaht werden.

Bew. Die letzte oder (m — 1)te Differentiallinie ist eine gerade Linie, deren Gleichung

m. (m — 1).. 2 x + (m — 1).(m — 2) . . . p,

wenn nun in dieser einmahl eine Ordinate für ein gewisses x bejaht ist, so sind alle Ordinaten für grössere bejahte oder kleinere verneinte x, kurz, alle Ordinaten zur rechten der angenommenen bejaht, weil die gerade Linie ihre Axe nur einmahl schneidet. Nun stellen diese Ordinaten die Differentiale der Ordinaten der letzten Differentiallinie ohne eine vor: Diese (m — 2)te Differentiallinie, hatte für das angenommene x eine bejahte Ordinate, und die Differentialien ihrer Ordinaten, die Ordinaten der geraden Linie, sind rechter

ter Hand dieſer Ordinate alle bejaht, folglich wachſen bejahte Ordinaten dieſer (m — 2) ten Differentiallinie rechter Hand ohne Ende fort. Aber ihre Ordinaten ſind Differentiale der Ordinaten der (m — 3) ten Differentiallinie, die für das angenommene x eine bejahte Ordinate, und die Differentiale ihre Ordinaten rechter Hand dieſer angenommenen, als die Ordinaten der (m — 2) ten, alle bejaht, folglich auch lauter wachſende bejahte Ordinaten nach der rechten Hand hat. Und ſo folgt, daß wenn eine Linie, von dem angenommenen x an, rechter Hand bejahte wachſende Ordinaten hat, und dieſem x in der nächſtvorhergehenden Linie auch eine bejahte Ordinate zugehört, daß in der nächſtvorhergehenden Linie, bejahte Ordinaten rechter Hand der angenommenen wachſen, weil ihre Differentiale, die Ordinaten der nächſtfolgenden Linie bejaht ſind. Dieſe Schlüſſe gehen alſo durch alle Linien bis zur Hauptlinie fort, und rechter Hand des bejahten y das dem angenommenen x zugehört, müſſen bejahte Ordinaten ohne Ende fort wachſen.

195. Lehrſ. Weil die m — 1 te Differentiallinie eine gerade Linie iſt, und die Exponenten von x in den Differentiallinien abwechſelnd gerade und ungerade werden, ſo folgt, daß die m — 1te, m — 3te, m — 5te, u. ſ. w. Differentiallinien, von ungeraden Graden, und eben ſo die m — 2te, m — 4te, m — 6te, u. ſ. w. von geraden ſind. Jene

alſo

also kommen zur linken Hand gewiß unter die Axe, und diese über die Axe, (163) daher ist ein x möglich, dem in der m — 1ten, m — 3ten, m — 5ten, m — 2n + 1ten Differentiallinie verneinte, in der m — 2ten, m — 4ten, m — 6ten, m — 2nten bejahte Ordinaten zugehören, in der Hauptlinie aber eine bejahte oder verneinte Ordinate zugehört, nachdem m gerade oder ungerade ist. Ich sage, wenn einmahl ein solches x ist gefunden worden; so sind alle Ordinaten linker Hand der ihm zugehörigen, in der m — 1ten, m — 3ten, m — 5ten, u. s. w. Differentiallinie verneint, nachdem m gerade oder ungerade ist.

Beweis. Wenn einmahl eine Ordinate der geraden Linie verneint ist, so sind alle ihre Ordinaten linker Hand der angenommenen, wachsende verneinte. Sie stellen die Differentialien der Ordinaten der m — 2ten Differentiallinie vor: aus dem aber, was von den Differentiallinien allgemein gesagt worden (120.) erhellt, daß angenommen wird, daß die Ordinate jeder Differentiallinie, die Differenz vorstellt, die herauskömmt, wenn man der Linie, welcher die gegebene Differentiallinie zugehört, ihre Ordinate zur linken von der nächsten zur rechten abzieht. Wenn also die Ordinaten einer Differentiallinie verneint sind, so bedeutet dieses, daß der Linie, der sie als Differentiallinie zugehört, ihre Ordinaten linker Hand

von

von denen rechter Hand abgezogen, was verneintes geben.

Gehört also zu einerley Abscisse in der m — 1ten Differentiallinie eine verneinte, und in der m — 2ten eine bejahte Ordinate, und sind die Ordinaten der m — 1ten linker Hand derselben alle verneint, so giebt linker Hand der Ordinate, die dem angenommenen x in der m — 2ten Differentiallinie zugehört, jede linke Ordinate von der nächsten abgezogen was verneintes, d. i. sie ist eine grössere bejahte, und die bejahten Ordinaten wachsen linker Hand ohne Ende.

Weil nun eben diesem x in der m — 3ten Differentiallinie eine verneinte Ordinate zugehört, und der m — 2ten Ordinaten, dieser m — 3ten Differentiale vorstellen, so giebt linker Hand der angenommenen verneinten Ordinate, jede linke Ordinate von der nächsten rechten abgezogen was bejahtes, d. i. sie ist ein grösseres verneintes, und die verneinten Ordinaten wachsen linker Hand ohne Ende fort.

Jede m — 2n + 1te Differentiallinie verhält sich gegen die ihr nächste m — 2nte wie die m — 1te gegen die m — 2te; Und jede m — 2nte gegen die m — 2n — 1te, wie die m — 2te gegen die m — 3te. Also geht dieser Beweis durch alle Differentiallinien eben so fort.

Wenn m gerade ist, so ist die erste Differentiallinie von einem ungeraden Grade; und hat vermöge

vermöge des Beweiſes von dem angenommenen x an, linker Hand lauter wachſende verneinte Ordinaten; dieſem x aber gehört in der Hauptlinie eine bejahte Ordinate zu, und ſie hat wegen der verneinten Ordinaten ihrer Differentiallinie, wie im Beweiſe iſt dargethan worden, linker Hand lauter wachſende bejahte Ordinaten.

Wenn m ungerade iſt, ſo iſt die erſte Differentiallinie von einem geraden Grade, und hat linker Hand des angenommenen x lauter wachſende bejahte Ordinaten, Differentiale der Ordinaten der Hauptlinie, die für das angenommene x eine verneinte Ordinate, und folglich linker Hand derſelben lauter wachſende verneinte hat.

196. Aufg. I. **Eine bejahte oder verneinte Zahl zu finden, die gröſſer als die gröſſte bejahte Wurzel einer Gleichung, oder kleiner als die kleinſte verneinte iſt, wenn die Gleichung keine bejahten Wurzeln hat.**

II. **Eine verneinte oder bejahte Zahl zu finden, die gröſſer als die gröſſte verneinte Wurzel, oder kleiner als die kleinſte bejahte iſt, wenn die Gleichung keine verneinten Wurzeln hat.**

Aufl. Man ſetze die Gleichung $= y$, und mache alle Differentialformeln an der Zahl $m-1$. Man ſuche ein x das y und alle Differentialien bejaht macht. Dieſes thut der Foderung I genug (194). Man ſuche ein x das die $m-1$te Differen-

ferentialformel verneint, die m — 2te bejaht, und so alle abwechselnd verneint und bejaht macht, da denn y bejaht oder verneint werden wird, nachdem m gerade oder ungerade ist. Dieses thut der Foderung II genug (195).

197. Ex. Bey nachstehender Gleichung habe ich, die Rechnung zu verkürzen, in den Differentialformeln, wo sich mit einer Zahl durchgängig dividiren liesse, dividirt.

$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = y$$

$$5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 = \frac{dy}{dx}$$

$$5x^3 - 6x^2 - 15x + 15 = \frac{ddy}{4.dx^2}$$

$$5x^2 - 4x - 5 = \frac{d^3y}{3.4.dx^3}$$

$$5x - 2 = \frac{d^4y}{2.3.4.dx^3}.$$

Setzt man hier + 2 statt x so werden die Werthe aller Formeln, von unten hinauf: + 8; 7; 1; 79; 46; also ist 2 grösser als die grösste bejahte Wurzel. Eben so giebt x = — 3 von unten hinauf

$$-15 - 2 = -17$$
$$+45 + 12 - 5 = +52$$
$$-135 - 54 + 45 + 15 = -129$$
$$+405 + 216 - 270 - 180 + 63 = +234$$
$$-243 - 162 + 270 + 270 - 189 - 120 = -74$$

Also ist — 3 die Zahl, die der Foderung II genug

genug thut, und die Gränzen der Wurzeln sind -3 und $+2$.

198. Zus. Will man also wissen, ob diese Gleichung ganze Zahlen zu Wurzeln hat, so darf man aus allen Divisoren von 120, nur -2; -1; und $+1$ versuchen, (Alg. 294.) auch sieht man, was für Zahlen man für die ersten Näherungen annehmen kann, wenn man die Irrationalwurzeln durch Näherung suchen will. (Alg. 317.)

199. Anm. In der Gleichung (197) gehören zu
$x = -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ +1;\ +2$
$y = -74;\ -110;\ -146;\ -120;\ -38+46;$
woraus sich schliessen lässt, daß sie nur eine mögliche Wurzel zwischen $+1$ und $+2$ hat.

200. Anm. Newton trägt diese Regel (196) ohne Beweis vor. Ar. vn. art. de limitib. aequat. p. 195. Statt des zweyten Theils, verwandelt er die verneinten Wurzeln in bejahte durch Veränderung der Zeichen. (192) Es hat mir aber natürlicher geschienen, zu zeigen, wie man sich ohne eine solche Verwandelung zu helfen hat.

Der Rechnungen des Unendlichen

zweyter Theil.

Die Integralrechnung.

201. Erkl. Das Integral oder die Summe einer Differentialgröſſe, heiſſt die Gröſſe, aus deren Differentiirung die Differentialgröſſe entſtanden iſt. Und aus einer gegebenen Differentialgröſſe, die finden, durch deren Differentiation ſie entſtanden iſt, heiſſt ſie integriren oder ſummiren. In der Fluxionenrechnung, die flieſſende Gröſſe aus der Fluxion finden (ex fluxione inuenire fluentem).

202. Willk. Satz. Man bezeichnet die Summe mit dem Buchſtaben $\int$ vor das Differential geſetzt.

203. Zuſ. So iſt

I) Wenn $dx + dy = 0$; $\int(dx + dy) = x + y = a$ (23)

II) $\int(ydx + xdy) = xy$ (24)

III)

III) $\int\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{yy}\right) = \frac{x}{y}$ (26)

IIII) $\int n x^{n-1}\,dx = x^n$ (30)

V) $\int b x^{m-1}\,dx = \int b.\frac{1}{m}\cdot m x^{m-1}\,dx =$

$\frac{1}{m} b \int m x^{m-1}\,dx = \frac{1}{m}\cdot b.x^m$

204. Zuſ. Weil jede veränderliche Gröſſe eben das Differential behält, wenn eine beſtändige zu ihr addirt oder von ihr abgezogen wird; ſo ſind von dieſen Integralen, die drey II; III; IIII eigentlich $xy +$ Conſt; $\frac{x}{y} +$ Conſt; $x^n +$ Conſt; Wo Conſt. eine unveränderliche bejahte oder verneinte Gröſſe bedeutet, die aus den Umſtänden der Aufgabe muß beſtimmt werden.

Von der Quadratur der krummen Linien.

205. Aufg. Das Differential der Fläche einer krummen Linie CPM 1 Fig. zu finden.

Aufl. Die Abſciſſe wachſe um das endliche Stücke PQ und die Ordinate werde QN. So wächſt die Fläche um das Stück PMNQ. Man ziehe NB mit der Axe parallel, bis ſie der verlängerten Ordinate in B begegnet. So iſt das Stück, um welches die Fläche gewachſen iſt = PMSQ + MNS der letzte Theil iſt gröſſer als

das geradelinichte Dreyeck MNS; und kleiner als das Rechteck MBNS. Man heisse also die Fläche Z und ihr endliches Wachsthum ΔZ; so ist

$\Delta Z < PM.PQ + NS.PQ$

$\Delta Z > PM.PQ + \frac{1}{2} NS.PQ$ oder

$$\frac{\Delta Z}{PM.PQ} < 1 + \frac{NS}{PM} \text{ und } > 1 + \frac{NS}{2.PM}$$

Weil aber die Ordinate NQ der MP so nahe rücken kann als man will, so können $\frac{NS}{PM}$ und $\frac{NS}{2PM}$ unendlich abnehmen. Wollte man annehmen $\frac{\Delta Z}{PQ.PM} = 1 + R$ so daß R eine angebliche Grösse bedeutete, und der Quotient $\frac{\Delta Z}{PQ.PM}$ der Einheit nicht näher als um diese Grösse kommen könnte, so wäre $1 + R < 1 + \frac{NS}{PM}$ oder $R < \frac{NS}{PM}$ aber $\frac{NS}{PM}$ kann unendlich abnehmen, und also kann R keine Grösse bedeuten, die sich allemahl angeben liesse.

Der Quotient $\frac{\Delta Z}{PQ.PM}$ kann also durch unendliche Näherung der Ordinaten, der Einheit unendlich nahe kommen, daß man ihn also, wenn es verstattet ist, die Ordinaten so nahe als man will anzu-

anzunehmen, der Einheit gleich seßen muß. In diesem Falle, wenn sich die Ordinaten einander unendlich nähern, verwandelt sich PQ in dx und

ΔZ in dZ; also ist $\frac{dZ}{ydx} = 1$ oder $dZ = ydx$.

206. Anm. Wenn man MPpm für das Differenzial der Fläche, und Mm für eine gerade Linie annimmt, so ist $MPpm = ydx + \frac{1}{2}dxdy$ welches letztere in Vergleichung des ersten verschwindet. So trägt man den Beweis insgemein vor, und stellt sich die Fläche krummer Linien in lauter solche kleine Theilchen wie MmPp getheilt vor. Die ganze Fläche finden, heißt alsdenn alle diese Theilchen zusammen addiren, daher man sich hier das Integriren, welches dieses verrichtet, als ein wirkliches Summiren vorstellt.

207. Aufg. **Eine krumme Linie zu quadriren, oder ihre Fläche durch x und y auszudrücken.**

Aufl. Weil die Fläche jeder krummen Linie zu ihrem Differenziale $dZ = ydx$ hat, (205) so drücke man aus der Natur der krummen Linie, y durch x, oder dx durch y und dy aus, und suche die Größe, aus deren Differenziation dieses ydx entstanden seyn kann, oder man integrire. (201) Diese Größe wird Z seyn. Z muß nähmlich eine solche Function von x und y, seyn, deren Differential für jede Abscisse und die ihr zugehörige Ordinate ydx ist, und folglich findet man Z wenn man diese Function findet.

208. Aufg. Die Parabel CMP zu quadriren, wo CP. = x; der Parameter = b; die Gleichung bx = yy.

Aufl. I. Hie ist $dz = y.dx = b^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}}.dx$ setzt man also in (203; V) statt

dorten	b	n — 1	m
hie	$b^{1:2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

so kömmt $\int y.dx = Z = b^{1:2}.\frac{2}{3}.x^{3:2} +$ Const $= \frac{2}{3}.x.\sqrt{b.x} +$ Const.

II. Wo die Fläche Z anfangen soll, giebt sich aus der beständigen Grösse, die dann für alle Abscissen einerley bleibt.

III. Man setze die Fläche soll in C anfangen oder: man verstehe unter Z die Fläche CMP; so verschwindet Z zugleich mit der Abscisse, also ist o = o + Const und Const = o; und $Z = \frac{2}{3}.x.\sqrt{b.x} = \frac{2}{3}x.y$. Diese Fläche, zwey Drittheile des Rechtecks unter Abscisse und Ordinate.

IV. Man setze Z sollte von der Ordinate durch den Brennpunct anfangen, also wenn in An. endl. Gr. I. Taf. 11. Fig. AMN eine Parabel ist, und F derselben Brennpunct, soll Z die Fläche FTMP bedeuten.

Weil $AF = \frac{1}{4}$ b, so verschwindet hie Z wenn x diese Grösse bekömmt, also ist in (I) $o = \frac{2}{3}.\frac{1}{4}.b.\sqrt{\frac{1}{4}.b.b} +$ Const giebt $Z = FTMP = \frac{2}{3}.x.\sqrt{(b.x)} - \frac{1}{12}.b.b$.

V. Nähmlich aus (III) ist die Fläche AFT $= \frac{2}{3}.AF.FT = \frac{1}{12}.b.b$. So betragen diese Fläche, und die (IV) zusammen die (III).

VI.

VI. In die Formel (IV) setze man eine Abscisse kleiner als $\frac{1}{4}$ b so kömmt ein verneinter Werth von z. Der bedeutet also eine Fläche zwischen FT, und einer Ordinate linker Hand der nur genannten. Diese Fläche bekömmt einen verneinten Werth, weil sie von FT an gerechnet wird, aber nicht nach der Seite zu liegt, nach welcher FTMP liegt.

VII. Da der Abscisse auch eine gleiche Ordinate auf der entgegengesetzten Seite der Abscissenlinie gehört, so ist klar daß die Fläche APm so groß als APM3 verneint heissen würde in so fern man darauf sieht daß sie an einer verneinten Ordinate liegt, auserdem aber, mit der Fläche APM zusammen das Doppelte jeder einzelnen ausmacht. Man kann also auch sagen die Fläche MAm betrage zwey Drittheile eines Rechtecks, dessen Grundlinie GM = AP.

VIII. Weil die Schenkel der Parabel auf beyden Seiten der Axe gleich und ähnlich sind, so giebt die Integration in (II) eine Fläche der die andre gleich ist.

IX. Gehören zu jeder Abstisse mehr Ordinaten, jede von einer andern Grösse, also mehr Schenkel einer krummen Linie (An. endl. Gr. 491.) so muß man in y. dx die Ordinate für jeden Schenkel besonders ausdrucken, und diesem Ausdrucke gemäß integriren. Für Schenkel die verneinten Abscissen gehören, würde man die Integration

am besten auch besonders vornhmen. Diese Erinnerungen mache ich hie nur vorläufig, damit man an sie denkt wenn sie brauchbar werden.

209. I. Unter Archimeds Schriften findet sich eine eigne von der Parabelvierung, wie Joh. Christoph Sturm in s. Uebersetzung: Archimedis Kunstbücher Nürnb. 1670. den Titel deutsch gegeben hat. Arch. zeigt darinn, ein gleichseitiges Dreyeck, das seine Spitze im Scheitel der Parabel hat, zur Grundlinie eine Sehne welche auf die Axe senkrecht ist, verhalte sich zur Fläche der Parabel welche von dieser Sehne begränzt wird = 3 : 4. Er leitet dieses anfangs aus Lehren vom Gleichgewichte ebener Flächen her, nachdem aus blos geometrischen Betrachtungen. Man hat keine ältere Quadratur einer krummen Linie.

II. Man giebt also hie die Verhältniß der paraboliſchen Fläche, zu einem Dreyecke, oder Rechtecke, in ganzen, selbst kleinen Zahlen, vermöge der Abscisse und Ordinate, finden sich nach der Elementargeometrie, Seiten eines Rechtecks oder Dreyecks, das der Fläche genau gleich ist.

III. Das Dreyeck, dessen Fläche genau des Kreises seiner gleich wäre, (Geom. 41. S. 4. Zus.), hätte zur Grundlinie eine gerade Linie, so lang als der Umfang des Kreises. Aber diese gerade Linie können wir durch Elementargeometrie aus dem Durchmesser nicht finden. So ist die Quadratur des ganzen Kreises genau, nicht

in der Bedeutung geometrisch in welcher es die Quadratur der Parabel ist, eines Stücks dessen Abscisse man hat. Nähern kann man sich der Fläche des Kreises durch die Elementargeometrie. (Geom. 43. S.)

IIII. Der Abscisse x, gehört die Fläche $Z = \frac{2}{3} x. \sqrt{(b. x)}$ also ist $\frac{Z^2}{b} = \frac{4}{9}. x^3$ eine algebraische Gleichung zwischen Fläche und Abscisse. Das nennt man: unbestimmte algebraische Quadratur. Zwischen Abscisse des Kreises und ihr gehöriger Fläche findet man keine algebraische Gleichung, wie man sich da verhalten muß wird unten (275) gewiesen.

210. Aufg. Eine krumme Linie zu quadriren, deren Gleichung $y^n = x + a$, wo n eine ganze bejahte Zahl ist.

Aufl. I. Es versteht sich daß man, die Dimensionen zu ergänzen, $x + a$ mit einer unveränderlichen Grösse von $n - 1$ Dimensionen multiplicirt hat, diesen Factor nachdem $= 1$ setzt.

II. Ich nehme $x + a$ bejaht. Da gehören jeder Abscisse ein paar entgegengesetzte sonst gleiche Ordinaten, wenn n gerade ist, nur eine bejahte, wenn n ungerade ist. (An. endl. 237.)

III. Man setze $x + a = u$; also $dx = du$. Nun ist $y = (x+a)^{1:m}$; also $dZ = u^{1:m}. du$; folglich $Z = \frac{m}{m+1} \cdot u^{(m+1):m} + \text{Const}$

$= \frac{m}{m+1} \cdot (x+a)^{(m+1):m} +$ Conſt. Soll nun $Z = o$ für $x = o$ ſeyn, ſo iſt $o = \frac{m}{m+1} \cdot a^{(m+1):m} +$ Conſt. alſo $Z = \frac{m}{m+1} \cdot \left((x+a)^{(m+1):m} - a^{(m+1):m}\right)$

IV. Wenn m gerade iſt, giebt dieſes die Fläche für die bejahte Ordinate und auch für die verneinte. Wenn m ungerade iſt, die Fläche für die einzige bejahte.

V. Für verneinte Abſciſſe findet man leicht die Fläche nach dieſer Anleitung.

211. Aufg. Die Hyperbel, der die Gleichung $y = \frac{a^3}{x^2}$ zugehört, wo AP 14 F. $= x$; hat zwo Aſymptoten AF für $x = o$; AE für $x = \infty$; und zieht ſich, weil $+$ und $-$ x einerley y, und allemahl ein bejahtes, geben, mit zwo gleichen und ähnlichen Hälften BCD, bcd; an beyden Seiten der Aſymptote AF, aber an einer der Aſymptote eAE hin. Man verlangt ihre Quadratur.

I. Die krumme Linie iſt (115) betrachtet worden. Hie iſt für ſie $dZ = a^3 . x^{-2} . dx$.

II. Man nehme $AG = a$; welches auch $CG = a$ giebt ſo kann dZ auch Differential der Fläche CGPM, bedeuten, eigentlich Differential jeder Fläche

Fläche die von irgend einer bestimmten Ordinate an gerechnet wird, die gewählte giebt den einfachsten Ausdruck. Ich verstehe also unter Z die Fläche CGPM.

III. Nun ist $Z = -\frac{a^2}{x} + \text{Const.}$ Soll $=$ o seyn wenn $x = a$ also ist $o = -a^2 + \text{Const.}$ Folglich $Z = a^2 . \left(1 - \frac{a}{x}\right)$

IV. Die Fläche CGPM ist also immer kleiner als a^2, kömmt aber diesem Quadrate immer näher je gröſſer x ist. Die Fläche welche sich von CG an, zwischen Asymptote und Hyperbel ins Unendliche erstreckt ist $= a^2$.

V. Man hätte jede andre bestimmte Ordinate, auch näher bey A als G ist zum Anfange der Fläche wählen können, da wäre Z für die ihr zugehörige Abscisse verschwunden, und von dieser Ordinate an, bis an CG eine bejahte Gröſſe gewesen. Also wird ein Z von CG an rückwärts bis an jene Ordinate, einen Verneinten Werth bekommen, der Umstand des verneinten wird nur diese Lage der Fläche, linker Hand an CG andeuten.

VI. So erhellt was Z bedeutet wenn in (III) x kleiner als a ist.

Für $x = \frac{1}{2}a$ kömmt, r. s $= -a^2$, zwischen der Ordinate welche dieser Abscisse gehört und CG, liegt eine Fläche dem Quadrate von a gleich.

Wenn

Wenn die Abscisse die kleiner als a ist abnimmt, wird Z immer eine grössere verneinte Grösse, und wächst so ins Unendliche wenn $x = o$ wird. Die hyperbolische Fläche zwischen CG und der Asymptote AF, ist unendlich.

VI. Da die Hälfte der Hyperbel innerhalb des Winkels cAf der andern ähnlich ist, werden ihre Räume eben so gefunden.

VII. Eine allgemeinere Gleichung für Hyperbeln ist $m + y = \frac{a^{m+1}}{x^m}$ wo $dZ = a^{m+1}$. $x^{-m} dx$. Auch da giebt es für eine Abscisse $= a$ eine Ordinate eben so groß; bestimmt man also in $Z = \frac{-a^{m+1}}{(m+1).\, x^{m-1}} + C$ die Const. so daß die Fläche sich von nur genannter Ordinate anfängt, so kömmt die Fläche $z = \frac{a^2}{m-1} \cdot \left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{m-1}\right)$, welche sich für wachsende Abscissen grösser als a; dem Werthe $\frac{a^2}{m-1}$ ins Unendliche nähert, für Abscissen kleiner als a verneint ist, und für verschwindende unendlich wird.

VIII. Das ist deutlich die Fläche bey einer solchen Hyperbel in dem Theile von ihr wo bejahten Abscis-

Abſciſſen bejahte Ordinaten zugehören. Wenn m ungerade iſt gehören verneinten Abſciſſen verneinte Ordinaten, entwirft man ſich die Figur für dieſen Theil ſo ſieht man leicht wie es da mit der Fläche beſchaffen iſt.

IX. Wenn man in (III) die Conſt = o ſetzt, ſo kömmt $Z = -\frac{a^3}{x}$. Das kann gewiß keine Fläche bedeuten, die von irgend einer Ordinate wie CG, nach der rechten Hand gerechnet würde, wenn auch CG nicht die Ordinate für $x = a$ (II) bedeutete. Denn jede ſolche Fläche wächſt mit x; aber gegenwärtiger Werth von Z verſchwindet für ein unendliches x, und wird eine gröſſere verneinte Gröſſe, je kleiner x wird, verwandelt ſich in $-a^2$ wenn $x = a$; und wird ein verneintes Unendliche wenn $x = o$ wird.

X. Was dieſer Werth bedeutet erhellt aus (IV). Wenn man ſich vorſtellt DE ſey eine Ordinate der Hyperbel, die ins Unendliche hinausrückt, ſo iſt die Fläche $CGED = a^2$. Aber eben dieſe Fläche $= CGPM + PMDE$; und $CGPM = a^2 - \frac{a^3}{x}$, folglich $PMDE = -\frac{a^3}{x}$

Der verneinte Werth des Ausdrucks zeigt an daß man ſich die Fläche nicht vorſtellen muß wie ſie ſich von PM rechter Hand ins Unendliche hinaus erſtreckt, ſondern, wie ſie aus dem Unend-

lichen

lichen rechter Hand, ſich nach der linken Hand bis PM ſtreckt, und ſo von der unendlich langen Fläche CGED die $= a^2$ iſt, weggenommen wird.

XI. So wäre DEPM eine verneinte Fläche, unendlich lang, aber von endlicher Gröſſe.

XII. Uebergang wachſender bejahter Gröſſen durchs Unendliche, bringt auf verneinte Gröſſen (Geom. 12 S. 15 Zuſ.). Man könnte verneinte Gröſſen, die ſo entſtehn, gröſſer als unendlich nennen, wie man diejenigen, die aus bejahten Gröſſen, durch beſtändiges Abnehmen, nach dem Uebergange durch o entſtehn, kleiner als Nichts nennt.

XIII. Walliſius kömmt auf verneinte Ausdrückungen ſolcher Flächen, die nach einer Richtung genommen werden, welche der bejahten entgegengeſetzt iſt, und nennt: rationen pluſquam infinitam, qualem nempe habere ſupponatur numerus poſitiuus ad numerum negatiuum, ſiue minorem nihilo. Arithmetica infinitorum Prop. 104. Op. T. I. p. 409. Varignon Mém. de l'Ac. des Sc. 1706. p. 15; hat die Begriffe gehörig aus einander geſetzt. Leibniz, quod rationes ſiue proportiones non habeant locum circa quantitates nihilo minores, et de vero ſenſu methodi infiniteſimalis Act. Erud. 1712. p. 167. erkennt ſolche Ausdrückungen von hyperboliſchen Räumen, über die Varignon Walliſen beſtritt, nicht in der Schärfe für wahr, aber in einer gewiſſen Bedeutung für erträglich.

Zu

Zu dieſer Unterſuchung gehört De infinitis infinitorum et infinite paruorum ordinibus aut. D. Guidone Grandi. Piſis 1710. und Petri Varignonii reſponſio ad P. Grandini librum de infinitis infinitorum. Act. Erud. M. April. 1712; p. 154.

Anwendung der Rechnung des Unendlichen auf die Logarithmen.

213. Erkl. I. Für eine krumme Linie wo ſich die Abſciſſen verhalten ſollten, wie Logarithmen der Ordinaten, lieſſen ſich Puncte folgendergeſtalt finden. V. Taf. 42 Fig.

Auf die Abſciſſenlinie ziehe man ſenkrecht durch der Abſciſſen Anfang AB = i; eine beſtimmte gerade Linie, die man in der Folge für Einheit der geraden Linien annimmt, alſo i = 1 ſetzt.

Man nehme auf der Abſciſſenlinie AP = AB, und ziehe das Perpendikel PC von einer willkührlichen Gröſſe = c. Das iſt die Ordinate welcher die Abſciſſe = i = 1 gehört.

II. Man nehme eine Abſciſſe AQ = x; Sie hat zu AP = i die Verhältniß x : i oder x : 1 da x eine Zahl iſt, eine ganze oder gebrochne.

Dieſer Abſciſſe gehöre die Ordinate QD = y deren Gröſſe man ſo beſtimmt: So oft AP in AQ

AQ enthalten ist, so oft ist die Verhältniß AB: PC in der AB:QD enthalten, oder es ist

$$AB:QD = \frac{AQ}{AP}\ (AB:PC)$$

$$i:y = \frac{x}{i}\cdot (i:c)$$

Aber die Verhältniß i:c mit $\frac{x}{i}$ multiplicirt ren, ist so viel als den Quotienten $\frac{c}{i}$ auf eine Potenz erheben deren Exponent $\frac{x}{i}$ ist, wie aus (Ar. VI Cap.) leicht hergeleitet wird, also ist $\frac{y}{i} = \left(\frac{c}{i}\right)^{\frac{x}{i}}$ oder, wenn man $i = 1$ setzt $y = c^x$.

III. Wenn $x = 2; 3$; u. s. w. ist deutlich, daß $y = c^2; c^3 \ldots$ Wenn aber AQ nicht ein Vielfaches von AP durch eine ganze Zahl ist, so theilt man AP in Theile, und druckt AQ durch solche Theile aus.

Wäre $AQ = \frac{2}{2}.\ AP$; so wäre die Verhältniß $AB:QD = \frac{3}{2}.\ (AP:PC)$

IV. Man stelle sich also AP in r Theile getheilt vor, die Menge dieser Theile ist eine ganze Zahl, der erste von ihnen sey $A\alpha = m$; also $AP = r.\ m$, und $m = \frac{1}{r}$ wenn man 1 statt i schreibt.

V.

V. Soll $\alpha\beta$ die Ordinate seyn, welche dem Puncte α gehört, so ist die Verhältniß AB:PC oder $i : c = r. (i : \alpha\beta)$ also $\frac{c}{i} = \left(\frac{\alpha\beta}{i}\right)^r$. Man nenne $\alpha\beta = i + q = 1 + q$, so ist $c = (1 + q)^r$ und $1 + q = \sqrt[r]{c} = c^{\frac{1}{r}} = c^m$ (IV) Immer ist gestattet gerade Linien wie Zahlen zu betrachten, weil sie sich alle auf die angenommene Einheit (I) beziehen.

VI. Man nehme QR = m (IV) der Abscisse $AR = x + m$ gehöre die Ordinate $RE = y + n$, ich ziehe DD* mit QR parallel daß $D^*E = n$. So ist (II) $y + n = c^{x+m}$ also $\frac{y+n}{y}$ oder

$$1 + \frac{n}{y} = c^m, \frac{n}{y} = c^m - 1$$

V. Wenn also ein Paar Ordinaten um den Theil der Abscisse = m von einander abstehn, so giebt beyder Unterschied mit der kleinern dividirt den Quotienten $c^m - 1$, welcher ungeändert bleibt, wenn m so bleibt. Aber sein Dividendus und sein Divisor sind beyde veränderlich.

VII. Den Abscissen AV, und $AW = AV + m$, gehören die Ordinaten VF, WG, so ist VF eine Potenz von c deren Exponent AV; WG eine Potenz von c deren Exponent $AV + m$, also $WG = VF. c^m$, also $WG - VF = VF. (c^m - 1)$, wiederum dieser beyden Ordinaten

Unterschied mit der kleinsten dividirt $= c^m - 1 = \frac{n}{y}$ (VI)

VIII. Wenn das zweyte Paar Ordinaten (VII) eben den Abstand hat, welchen das erste Paar (VI) und AB, $\alpha\beta$, (V) haben, so gehören diese Paare in eine geometrische Reihe, deren beyde erste Glieder die Verhältniß $1 : 1 + q$ haben. Die Unterschiede der Glieder einer geometrischen, sind auch in einer geometrischen Reihe welche eben die Verhältniß hat (An. endl. 114)

Hätte aber das Paar (VII) nicht eben den Abstand, welche das Paar (VI) hat, so passte es nicht in eben die Reihe.

IX. Trägt man auf der Abscissenlinie von A aus Theile, jeden $= m$, so kann man durch den Endpunct jedes solchen Theiles, eine Ordinate $= y$ ziehen deren Grösse durch c und ihre Abscisse bestimmt wird (II)

X. Abscissen linker Hand des Anfangs der Abscissen, werden als verneint betrachtet, einer solchen Abscisse gehört eine Ordinate welche durch eine Potenz von c angegeben wird, deren Exponent verneint ist: Aber c ist grösser als 1, mit einem verneinten Exponenten bedeutet es also einen Bruch dessen Zähler $= 1$, der Nenner eine Zahl grösser als 1, auf eine Potenz erhoben deren Exponent bejaht ist; dieser Bruch wird immer kleiner je grösser der verneinte Exponent von c ist,

kann

ann dieſer Exponent gröſſer werden, als jede Gröſſe die ſich angeben läſſt, ſo wird der Bruch kleiner als jede Gröſſe die ſich angeben läſſt. Für verneinte ins Unendliche wachſende Abſciſſen, nehmen alſo die Ordinaten ins Unendliche ab, aber nie wird eine völlig $= o$.

Der Ordinaten Endpuncte ziehen ſich alſo für verneinte Abſciſſen, immer näher und näher nach der Abſciſſenlinie wie nach einer Aſymptote.

Daß ſie ſich für bejahte Abſciſſen immer mehr ins Unendliche erheben, iſt offenbahr.

XI. Ohne Zweifel kann man durch jeden Punct, wie Q, eine Ordinate ſo groß als QD unter die Abſciſſenlinie ſetzen, die wäre alſo $= -$ QD $= -y$

XII. Macht man Alles unter der Abſciſſenlinie wie über ihr, ſo bekömmt man auch durch A, α, P Ordinaten $= -$ AB, $-$ $\alpha\beta$, $-$ PC; und dieſe Ordinaten haben mit denen über der Abſciſſenlinie, einerley Abſciſſen, o, Aα; AP, AQ.

XIII. Da iſt nun die Verhältniß zwiſchen $-i$ und $-c$ in der zwiſchen $-i$ und $-y$ ſo oft enthalten, ſo oft AP in AQ enthalten iſt, oder es iſt $-i:-y=\frac{x}{i}\cdot$ $(-i:-c)$ Man bemerke daß i, als Diviſor bey x nicht verneint iſt denn da bedeutet es AP, einen Theil der Abſciſſenlinie, der für PC und die entgegengeſetzte Ordinate einerley

 iſt,

ist, eben wie $x = AQ$ für QD und die entgegengesetzte Ordinate.

So ist $\frac{-y}{-i} = \left(\frac{-c}{-i}\right)^{\frac{x}{i}}$ und diese Gleichung ist völlig einerley mit der am Ende von (II)

XIV. Allerdings gehört von den Abscissen o, AP, AQ, jede einer bejahten Ordinate und einer entgegengesetzten sonst gleichen, aber die Verhältnisse zwischen den verneinten Ordinaten, die man vermittelst der Abscissen vergleicht, sind völlig einerley mit den Verhältnissen zwischen den bejahten Ordinaten die eben den Abscissen gehören.

XV. Ordinaten lassen sich also angeben soviel als man will. Aber jede muß von der nächsten um m abstehn. So sind ein Paar nächster Ordinaten Endpuncte wie B, β; D, E; F, G; von einander abgesondert, um Entfernungen noch gröſſer als m.

XVI. Man kann aber m kleiner erhalten wenn man r gröſſer nimmt (IV) Nun kann r gröſſer werden als jede Zahl die sich angeben läſſt, also m kleiner als jede gerade Linie die sich angeben läſſt. So rücken der Ordinaten Gränzpuncte näher zusammen als daß sich ihre Abstände angeben lieſſen, und geben eine zusammenhängende krumme Linie.

XVII. Nimmt man eine Verhältniß 1 : c als Maaß jeder andern Verhältnisse 1 : y an, versteht sich die 1 : c wo nöthig in gleiche Theile getheilt, und

und zeigt eine Zahl x an, wie oft die Verhältniß 1 : c in der 1 : y enthalten ist, so nennt man x, der Zahl y Logarithmen in diesem Systeme. (Ar. V. C. 17) Da nun bey den Grössen die die 1; c; x; y; sind genannt worden dieses statt findet, so stellt die krumme Linie (XVI) ein logarithmisches System vor, wo, von c, der Logarithme = 1 ist, und die Abscissen x; Logarithmen der Ordinaten y sind. Man nennt sie daher die logarithmische Linie.

XVIII. Hugenius erinnert, dieser Linie die schon von andern betrachtet worden, habe er zuerst den Nahmen logarithmique oder logistique gegeben. De la cause de la pésanteur, p. 169 der Ausgabe Leid. 1690.

XIX. Man kann sie sicher eben so unter der Asymptote verzeichnen als über derselben. (XII) Die verneinten Ordinaten des untern Theils und die bejahten des obern, haben einerley Abscissen.

Eine solche Abscisse hat man gesagt ist Logarithme der verneinten untern Ordinate, wie der bejahten obern. Folglich haben verneinte Grössen auch Logarithmen.

Aber die Abscisse ist Logarithme, nicht der Ordinate, sondern der Verhältniß der Ordinate zu derjenigen welche für Einheit angenommen wird; und bey der Ordinate unter der Asymptote, liegt die Einheit auch unter der Asymptote, und die Verhältniß zwischen verneinter Ordinate

und verneinter Einheit, ist völlig einerley mit der Verhältniß zwischen bejahter Ordinate und bejahter Einheit. (XIV)

XX. Daß verneinte Grössen keine Logarithmen haben, oder: welches eben das ist: Daß eine Frage deren Beantwortung auf einen verneinten Logarithmen führt, was unmögliches fragt, fand ich bey meinem ersten mathematischen Fleisse in Eulers Mechanica angenommen, und bewies es mir damals so: Ist $1 - a^2$ möglich so ist auch $\frac{1}{2} \log - a^2$ möglich; aber $\frac{1}{2} \log a^2 = \log (a\sqrt{-1})$, und einer unmöglichen Grösse Logarithme ist wohl nicht möglich.

Dieser Schluß lässt noch die Frage übrig wenn $1 - c$ unmöglich ist; wie kann $2.1 - c = \log + c^2$ möglich seyn? Darauf müsste man antworten daß $+ c^2$ nicht als das Quadrat von $- c$ sondern als das von $+$ angesehen werden muß, wenn von Logarithmen die Rede ist, also $\log c^2$ nicht $2. \log - c$ ist, sondern $2. \log + c$

Leibnitii et Io. Bernoullii commercium epistolicum Lausann. et Genev. 1745. enthält im II. B. die Streitigkeit über Logarithmen verneinter Grössen. Leibnitz läugnete sie, Bernoulli vertheidigte sie. Euler Mém. de l'Ac. de Prusse 1749; p. 139 entscheidet für Leibnizen.

Frid. Mallet de logarithmis numeror. negatiuor. Noua Acta R. S. S. Vpsalienſis Vol. IV. Vpsal. 1784. p. 205.

Gian-

Gianfrancesco Malfatti Sulla famosa questione de' logarithmi de' numeri negativi in Memorie della reale Accademia delle scienze .... in Mantova 1795. p. 3.

Bernh. Friedr. Thibaut dissertatio: historiam controversiae circa numerorum negativorum et impossibilium logarithmos sistens. Gott. 1797.

Logarithmen gehören eigentlich nicht Zahlen, sondern Verhältnissen, und die sind einerley zwischen verneinten und zwischen bejahten Zahlen.

Daß es keine Logarithmen verneinter Grössen giebt, zeige ich im Leipziger Magazin für Mathematik, 1786. 4 Heft. aus den ersten arithmetischen Begriffen.

214; I. Man behalte AP = AB, setze aber durch P eine Ordinate = f; und nehme nun die Verhältniß 1 : f zum Masse der Verhältnisse zwischen AB und den Ordinaten. So gehört jeder Abscisse x eine andre Ordinate als vorhin, nun nähmlich f^x

II. Diese Linie stellt also ein andres System dar. Beyde unterscheiden sich durch die Ordinate welcher die Abscisse = 1 gehört, das ist im arithmetischen Ausdrucke durch die Zahl deren Logarithme = 1. (213; XVII)

III. Nachdem f grösser oder kleiner ist als e, ist die Ordinate für x einerley bejahte Abscisse in gegenwärtiger Linie grösser als in voriger und für einerley verneinte kleiner.

IV. So schneiden beyde Linien einander in B; die für welche der Abscisse = 1 eine grössre Ordinate gehört, erhebt sich rechter Hand schneller über die Asymptote, und nähert sich ihr schneller linker Hand.

V. Man kann sich leicht zur Erläuterung, Puncte für ein Paar solche Linien verzeichnen. Wenn in der ersten 2, in der andern 3 als Ordinate der Abscisse 1 gehört so gehören zusammen

Abscisse	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3
Ordinate I	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
II	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

VI. Man nenne eine Abscisse der zweyten logarithmischen Linie = w, die ihr gehörige Ordinate = z; so ist $z = f^w$ (I)

VII. Die Ordinate welche dieser zunächst folgt stehe auch um m von ihr ab, so ist sie $= f^{w+m} = z.f^m$ beyder Unterschied $= z.(f^m - 1)$, dieser Unterschied mit der kleinsten dividirt, auch eine unveränderliche Grösse, wie (213; VI) nur hie f statt c.

215. Aufg. Die Lage einer Tangente der logarithmischen Linie (213) zu finden.

Aufl. I. Durch die Endpuncte von ein Paar nach einander folgenden Ordinaten, ziehe man die gerade Linie ED, welche verlängert der Asymptote in T begegne; so ist (213)

$ED^* : D^*D = DQ : QT$

$$n : m = y : \frac{m}{c^m - 1}$$

Die

Die vierte Proportionale ist immer von einer Grösse, wie sich auch x und das zugehörige y ändern (213; VIII)

II. Läßt man m unendlich abnehmen (213; XVI), so wird $n : m = dy : dx$; und $QT = \frac{y.m}{n}$ verwandelt sich in die Subtangente $\frac{y.dx}{dy}$. Diese Subtangente ist also für eine Stelle der logarithmischen Linie so groß als für die andere. Setzt man ihre unveränderliche Grösse $= a$, so hat man $\frac{y.dx}{dy} = a$ eine Gleichung für die logarithmische Linie, zwischen einer unveränderlichen Grösse, der Ordinate, und der Coordinaten Differentialen.

III. Wenn man in (I) m klein setzt, so kömmt der dasige Werth von QT, der Subtangente nahe, noch näher wenn man m noch kleiner setzt so könnte man sich der Subtangente immer nähern.

IV. Das zeigt wie die Grössen a, c; zusammenhängen; durch die letztere wird eine gewisse logarithmische Linie bestimmt und aus c die Subtangente. Die logarithmische Linie (214) hätte eine andre Subtangente, der man sich vermittelst $\frac{m}{e^m - 1}$ näherte.

V. Einen Begriff von solcher Näherung durch die gemeine Arithmetik zu bekommen, darf

man nur m nach einander $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$ .... setzen.

Als Exempel diene das briggische System. Da ist $c = 10$; also $QT = \frac{m}{10^m - 1}$

Man setze $m = 0,5$; so ist $QT = \frac{0,5}{\sqrt{10} - 1}$ $= \frac{0,5}{2,1622777}$. Für $m = 0,25$ käme $QT = \frac{0,25}{\sqrt[4]{10} - 1}$ und so könnte man durch wiederhohlte Ausziehung der Quadratwurzeln aus 10; der Subtangente des briggischen Systems immer näher kommen.

VI. Eine krumme Linie deren Subtangente an allen Stellen gleich ist, kann für diese Subtangente weder 0, noch eine unendliche Grösse haben. Jede dieser Voraussetzungen gäbe eine gerade Linie, die erste senkrecht auf die Abscissenlinie die zweyte der Abscissenlinie parallel.

216. I. Aus (215; II) folgt $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{y}$. Das Integral linker Hand ist deutlich $= \frac{x}{a}$; das muß also eine Function von y, seyn, deren Differential durch y allein ausgedruckt $= \frac{dy}{y}$ ist.

II.

Von y^δ wäre das Differential $\delta . y^\delta - 1 . dy$. Sollte das nun $= \frac{dy}{y}$ seyn, so müsste $\delta = 0$ seyn aber $y^0 = 1$ giebt kein Differential.

Man kann also $\frac{dy}{y}$ nicht als Differential einer Potenz ansehn, deren Exponent unveränderlich wäre, folglich nicht nach (203) integriren, denn da käme $\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{0} y^0 +$ Const, dabey sich nichts denken lässt.

217. Man weiß aber daß $y = c^x$ (213; II) folglich $\log y = x . \log c$ (Ar. VI. E. 21) das heisst: x ist der Logarithme von y; in einem Systeme wo 1 der Logarithme von c ist. (213; II) In eben dem Systeme wo die Subtangente $= a$ ist, der man sich, wenn c gegeben ist immer mehr und mehr nähern kann; (215; II. III)

218. I. Also das bestimmte logarithmische System verstanden, kann man sagen $x = \log y$; $dx = d \log y$, folglich (216; I) $\frac{dy}{y} = \frac{d \log y}{a}$ wo a eben das System bestimmt, und $\frac{x}{a} = \log y = \int \frac{dy}{y}$ Weil $\log 1 = 0$; so muß das Integral so genommen werden daß es für $x = 0$ verschwindet.

II.

II. Die Gleichung $dx = \frac{a.dy}{y}$ zu integriren soll man also in einer logarithmischen Linie deren Subtangente $= a$; zusammengehörige x und y finden, da wird x in dieser Linie, der Logarithme von y seyn.

219. Man kann wenigstens zum Anfange versuchen, ob sich so was für Abscissen und Ordinaten unter gewissen Einschränkungen bewerkstelligen lasse.

Wenn man $y = 1 + u$ setzt, also $dy = du$; So kömmt $\frac{dy}{y} = \frac{du}{1+u}$ und $\frac{1}{1+u}$ giebt eine Reihe von Potenzen von u mit bejahten steigenden Exponenten, (An. endl. Gr. 13) In der kann man jedes Glied mit du multipliciren, und das Product nach 203; integriren, so giebt sich $\int\frac{dy}{y}$ durch diese Reihe von Integralen.

Soll aber jede Reihe des Quotienten, und der Integrale sich nähern, so muß u kleiner als 1 seyn, folglich die Ordinate y kleiner als 2. Je näher die Ordinate an 2 kömmt desto langsamer nähert sich die Reihe.

Das giebt also ein Mittel, für eine Ordinate welche kleiner als 2 ist, die Abscisse zu finden, vorausgesetzt daß man die Subtangente wüsste. Weiß man diese nicht, so findet man doch etwas, das mit ihr multiplicirt, die Abscisse gäbe.

Weil

Weil nun die Abſciſſe Logarithme der Ordinate iſt, ſo druckt man die Sache folgendergeſtalt aus.

220. Aufg. Den Logarithmen einer Zahl die zwiſchen 1 und 2 fällt durch eine unendliche Reihe zu finden.

Aufl. Man hat vermöge (219) und (An. endl. 13.) $dx = a.\frac{du}{(1+u)} =$

$a.(du - u.du + u^2.du - u^3.du \ldots)$

alſo

$x = a.(u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 \ldots)$

Das Geſetz des Fortgangs ſieht man ſehr leicht und überzeugend.

Weil x für $u = 0$ verſchwinden ſoll (218 I) ſo iſt die Conſt $= 0$, und die Reihe wie ſie da ſteht giebt die Abſciſſe welche der Ordinate $1+u$ gehört.

Wenn $u = 1$; gäbe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots$ die Abſciſſe welche der Ordinate 2 gehört. Dieſe Reihe nähert ſich aber ſehr langſam, und wäre nicht brauchbar.

221. Aufg. Umgekehrt, u durch x vermittelſt einer unendlichen Reihe auszudrucken.

Aufl. I. Weil $dx + udx = adu$, ſo iſt $\frac{dx}{a} = du - \frac{udx}{a}$. Man verfahre mit dieſer Gleichung nach Alg. 694.

du =

$$du = \frac{dx}{a} + \frac{x\,dx}{a^2} + \frac{x^2\,dx}{2a^3} + \frac{x^3\,dx}{3.2.a^4} + \frac{x^4\,dx}{4.3.2.a^5}$$

$$\frac{-u\,dx}{s} = \frac{-x\,dx}{a^2} \quad \frac{-x^2\,dx}{2a^3} \quad \frac{-x^3\,dx}{3.2.a^4} \quad \frac{-x^4\,dx}{4.3.2.a^5}$$

$$u = \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3.2.a^3} + \frac{x^4}{4.3.2.a^4} + \frac{x^5}{5.4.3.2.a^5}$$

II. Nähmlich aus $du = \frac{dx}{a}$ findet man das erste Glied von $u = \frac{x}{a}$. Dieses in $\frac{udx}{a}$ gebraucht, giebt dieser Reihe erstes Glied $\frac{-xdx}{a^2}$ welches mit dem entgegengesetzten bejahten Zeichen der Reihe du zweytes Glied giebt, daraus die Integration der Reihe u zweytes Glied $\frac{+x^2}{2a^2}$ findet. Dieses zweyte Glied von u giebt der Reihe $\frac{-udx}{a}$ zweytes Glied $\frac{-x^2dx}{2a^3}$ und eben das bejaht wird der Reihe du drittes Glied, und integrirt das dritte Glied der Reihe u u. s. w. Es erhellt, daß alle Glieder der Reihe u bejaht werden, wenn das erste bejaht ist, weil jedes bejahte Glied der Reihe u, in $\frac{-udx}{a}$ ein verneintes und folglich in du ein bejahtes giebt. Ferner wenn irgend ein Glied der Reihe u; $= \frac{x^n}{n.(n-1)\ldots 2a^n}$ ist, so giebt dieses in $\frac{-udx}{a}$ das Glied $\frac{-x^ndx}{n.(n-1)\ldots 2a^{n+1}}$ und eben das Glied bejaht in der Reihe du; und durch die Integration das folgende Glied der Reihe u;

$+x$

$\frac{+x^{n+1}}{(n+1).n\ldots 2n+1}$ woraus die Allgemeinheit des Gesetzes, nach dem die Glieder fortgehen, erhellt.

III. Weil $x = o$ für $u = o$ (219) so wird keine beständige Grösse zu der gefundenen Reihe gesetzt.

IV. Man setze $\log(1+u)$ statt x, so giebt die Reihe, u durch Potenzen von $\log(1+u)$.

Und weil $1+u=y$ so giebt sich y wenn man zu 1 eben die Reihe addirt, überall in ihr $\log y$ statt x geschrieben.

222. Wenn die logarithmische Linie aus c bestimmt ist, so ist zwar die Subtangente gegeben, aber niemand würde die Arbeit übernehmen sie der Wahrheit nahe nach (215; IV) anzugeben. Dazu müssen andre Kunstgriffe gelehrt werden. Eine Vorbereitung dazu ist nächstfolgendes.

Man suche die Ordinate, deren Abscisse der Subtangente gleich ist.

Aufl. In 221; $x=z$ gesetzt findet man $u = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4.} + \frac{1}{2.3.4.5.}$ wo man nur das erste Glied 1; mit 2; das zweyte $\frac{1}{2}$ mit 3; das dritte $\frac{1}{2.3}$ mit 4; und so jedes Glied mit der Zahl welche anzeiget das wievielte das nächstfolgende ist, dividiren darf, um dieses nächst-

nächstfolgende zu finden. Dieses u und folglich $1+u$, ist jedes eine gegebene Zahl, die nicht nur für alle Stellen einer gegebenen logarithmischen Linie, sondern für alle logarithmische Linien einerley bleibt, weil sie durch die Grösse von a, und folglich c gar nicht bestimmt wird, und nur durch diese Grössen unterscheidet sich eine logarithmische Linie von der andern (214) Diese Zahl ist beynah

2, 718 281 828 459 045 235 360 28.

Eul. Introd. in Analys. inf. L. 1. §. 122. Man nennt sie der Kürze wegen e; Sie ist bey den Logarithmen so etwas wie P beym Kreise (Geom. 44. S.)

Ist also eine logarithmische Linie BD .. gegeben so nehme man auf der verlängerten AB, die Grösse $AH=e$, und ziehe durch H eine Parallele mit der Asymptote. Sie wird die krumme Linie irgendwo schneiden. Es geschehe in F, so ist die Ordinate $FV=e$; und die Tangente an F, geht durch den Anfang der Abscisse, daß hie die Abscisse AV der Subtangente gleich ist.

223. Aufg. Eine Reihe für Logarithmen zu finden, die sich schneller nähert als die in 220.

Aufl. I. Der Kürze wegen, bedeute S die Reihe welche in dem Werthe von x (220) in a multiplicirt ist.

II. Der Ordinate $1-u$ gehöre die Abscisse $=x^*$. Diese Abscisse wird verneint seyn, weil

die Ordinate kleiner als 1 ist (213 X.) Man findet diese Abscisse, wenn man in der Reihe S, u als verneint ansieht, da werden die Potenzen von u welche ungerade Exponenten haben alle verneint, und die welche gerade haben, bleiben es, wie sie schon sind, weil bejahtes und verneintes u gleiche Potenzen gerader Exponenten geben.

III. Also kömmt

$x^* = a.\ (-u - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 \ldots)$

Dieß nenne ich $= a.\ S^*$

Man fände eben diese Reihe, wenn man $y = 1 - u$ setzte und $dx^* = \frac{-a.du}{1-u}$ integrirte.

IV. So gehören nun zusammen

Ordinate	$1+u$	$1-u$
Abscisse	$a.S$	$a.S^*$

Man setze v gehöre als Abscisse der Ordinate $\frac{1+u}{1-u}$

Aus 213; II; ist $1+u = c^{a.s}$

$1-u = c^{a.S^*}$, $\frac{1+u}{1-u} = c^v$

Nun ist $\frac{1+u}{1-u} = c^{a.(S-S^*)}$ also die gesuchte Abscisse $v = a.(S-S^*)$

V. Diese Abscisse, ist in dem Systeme wo c der Abscisse $= 1$ gehört, und a die Subtangente ist, Logarithme ihrer Ordinate, folglich

V.

V. $\log \frac{1+u}{1-u} = a.2.u.\,(1 + \frac{1}{3}u^2 + \frac{1}{5}u^4 + \frac{1}{7}u^6 \ldots)$ welche Reihe für eben das u sich schneller nähert als a. S, weil die Potenzen von u um Paare von Graden steigen.

224. I. N sey eine willkührliche ganze Zahl; und man setze $\frac{1+u}{1-u} = N$ so ist $u = \frac{N-1}{N+1}$ allesmahl ein eigentlicher Bruch, nur desto grösser je grösser N ist. Für $N = 1001$ würde $u = \frac{1000}{1002}$. Also nähert sich die Reihe in 223; allemahl was auch N ist, nur langsamer für ein grosses N; und so kann man, wenn a bekannt ist, den Logarithmen jeder ganzen Zahl unmittelbar finden. Dieß zeigt in der Kürze die Möglichkeit jeder ganzen Zahl Logarithmen zu finden; in der Ausübung wird man die Logarithmen kleiner Zahlen lieber durch Reihen, die sich schneller nähern, berechnen, und aus diesen Logarithmen nachgehends durch Addiren u. s. w. die Logarithmen grösserer Zahlen finden.

II. Exempel. Man suche, wie groß a seyn muß, damit $10 = 1$ wird. So ist $\frac{1+u}{1-u} = 10$ oder $1 + u = 10 - 10u$ oder $u = \frac{9}{11}$ und

$$1 = a.2.\left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3.11^3} + \frac{9^5}{5.11^5} \ldots\right)$$

Weil $\frac{9}{11} = 0{,}8181\ldots$ so nehmen die Potenzen davon nur langsam ab, und man müsste viel Glieder der Reihe berechnen, ihren Werth mit einiger Genauigkeit zu finden; Meine Absicht war hie nur das Verfahren für ein angenommenes N anzuzeigen. Wird die Reihe berechnet, und 1 mit ihrem Doppelten dividirt, so findet sich die Subtangente der logarithmischen Linie für das briggische System. Sie ist also merklich kleiner als $\frac{11}{18}$

III. Soll 1 der Logarithme von c seyn, so ist $u = \frac{c-1}{c+1}$ und $1 = a.2.\left(\frac{c-1}{c+1}\right).\left(1+\frac{1}{3}.\left(\frac{c-1}{c+1}\right)^2\ldots.\right)$ woraus sich die Subtangente der Linie findet die einem willkührlich angenommenen Systeme (Ar. VI. C. 19) gehört. Hat man die Subtangente berechnet, so giebt die Reihe (223; V) in diesem Systeme den Logarithmen jeder Zahl.

IV. Das zeigt die Möglichkeit, blos aus (223; V) aller Zahlen Logarithmen zu berechnen.

V. Wenn also für irgend eine logarithmische Linie $dx = a.\frac{dy}{y}$; so setze man $y = \frac{1+u}{1-u}$ daraus

daraus $u = \frac{y-1}{y+1}$ und berechne 2. u. $(1 + \frac{1}{3}u^2 \ldots) = S - S^*$ (223. V.) da ist dann $x = a.(S - S^*)$ oder $x = a.\log y$, die Abscisse für jede Ordinate gegeben.

225. Wenn man der logarithmischen Linie Subtangente $= 1$ setzt, also $dx = \frac{dy}{y}$ so ist aus (224; V) $x = \log y = S - S^*$

Diesen Werth der Abscisse für eine gegebene Ordinate, heisst man der Ordinate natürlichen Logarithmen.

Die Linie der natürlichen Logarithmen heisst: wenn Subtangente $= AB = 1$ ist.

Jeder Zahl natürlichen Logarithmen findet man vermöge der Reihe $S - S^*$ (224; V); Unmittelbar, oder aus Logarithmen welche man vermöge dieser Reihe berechnet hat.

226. Aufg. Die natürlichen Logarithmen der ersten 10 Zahlen vermittelst der Reihe 223. zu finden.

Aufl. Man setze

$$u = \tfrac{1}{3};\ \tfrac{1}{7};\ \tfrac{1}{9}:\ \tfrac{1}{99}$$

So ist $\frac{1+u}{1-u} = \frac{2}{1};\ \frac{4}{3};\ \frac{5}{4};\ \frac{10}{9}$

So findet man die Logarithmen von $\frac{2}{1};\ \frac{4}{3};\ \frac{5}{4};\ \frac{10}{9}$ sehr leicht, weil man für u kleine Brüche hat.

Nun $l\frac{3}{2} + l\frac{4}{3} = l2$; $l\frac{3}{2} + l2 = l3$; $2l2 = l4$; $l\frac{5}{4} + l4 = l5$; $l2 + l3 = l6$; $2l5 + l2 = l50$; $l50 - l\frac{50}{49} = l49$; $\frac{1}{2}l49 = l7$; $3l2 = l8$; $2l3 = l9$; $l2 + l5 = l10$. Die Logarithmen selbst stehen beym Euler Introd. in Analys. infinitor. P. I. §. 123. Ich will nur zum Exempel den l10 hersetzen. Er ist

2, 302585092994045684017991 4

Dieses Verfahren zeigt, wie man die Reihe 223 brauchen kann, Logarithmen von ganzen Zahlen zu finden.

Aus den natürlichen Logarithmen von $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{6}$; die der ganzen Zahlen 1 . . . 10 mit Darstellung der Rechnung in Hausen, El. Ar. Schol. Prop. XXVII. auf 21 Decimalstellen.

Weil man aus solchen Logarithmen durch Addiren und Subtrahiren andre herleitet, auch, wie sich in der Folge zeigen wird, durch multipliciren, briggische, so berechnet man sie auf viele Decimalstellen, damit was aus ihnen hergeleitet wird, auch noch auf soviel Decimalstellen richtig bleibt als die Schärfe der Rechnung erfodert.

227. Lehrs. Ich setze von den beyden logarithmischen (213; 214) hat die erste a zur Subtangente, die zweyte b; Sie sind durch B über einer Asymptote beschrieben (214; IV) In der Weite = y ziehe man eine Parallele mit der Asymptote. Die schneidet jede logarithmische Linie in einem andern Puncte und giebt so in jeder

eine

eine Ordinate = y; der gehöre als Abſciſſe in der erſten x; in der zweyten v; Ich ſage: die Abſciſſen werden ſich verhalten wie die Subtangenten;

Beww. I. Die Ordinate = e; gehört in der erſten der Abſciſſe a; in der zweyten der Abſciſſe b (222); Alſo iſt $e = c^a$ in der erſten, und $= f^b$ in der zweyten. Folglich $c = e^{1:a}$ und $f = e^{1:b}$; Daher y als Ordinate der erſten $= c^x = e^{x:a}$; und als Ordinate der zweyten $= f^v = e^{v:b}$.

Das giebt $\frac{x}{a} = \frac{v}{b}$ oder $x:v = a:b$.

II. Nun iſt jede Abſciſſe, in ihrem Syſteme, Logarithme der Ordinate; der Satz ſagt alſo: Einer Zahl Logarithmen in zwey Syſtemen, verhalten ſich wie die Subtangenten der Syſteme.

228. Wenn $a = 1$ ſo iſt x der natürliche Logarithme, und v der künſtliche einer und derſelben Zahl. Ich will jenen durch nat. andeuten dieſen durch art. So iſt log art y = b. log nat y.

229. I. In 223; V. iſt log nat $\frac{1+u}{1-u} =$ (S − S*) und log art $\left(\frac{1+u}{1-u}\right) =$ b. (S − S*), wo $\frac{1+u}{1-u}$ jede Zahl = N bedeuten kann. So hat Hauſen den Satz in El. Ar. erwieſen, wo er keine logarithmiſche Linie brauchte. Auch iſt dieſer Beweis richtig. Aus log art (1 + u) = b. S, dürfte man nicht auf Zahlen gröſſer als 2 ſchlieſſen.

II. Wenn man also $y = \frac{1+u}{1-u}$ setzt und log nat $y = (S - S^*)$ versteht, so giebt die Differentialgleichung $dx = \frac{a.dy}{y}$; $x = a.$ log nat y

230. Die Subtangente der logarithmischen Linie zu finden, welche dem briggischen Systeme gehört, oder: wie groß b (227) seyn muß, daß die Ordinate $= 10$; der Abscisse $= 1$ gehört, also, wie man es ausdruckt: der Logarithme von 10, hie also log art 10; oder log brigg 10; $= 1$ ist.

Auflösung. Weil log brigg $10 = b.$ log nat 10; so ist $1 = b.$ log nat 10; $b = \frac{1}{\log \text{nat } 10}$. Der Divisor steht in (226) den Quotienten hat man berechnet.

0, 434 294 480 903 251 827 651 128 9
(Eul. Intr. in An. inf. L. I. §. 124).

231. Für das briggische System, berechrechnet man jeden künstlichen Logarithmen, wenn man den natürlichen, eben der Zahl, mit 0, 434 ... (230) multiplicirt. So würden sich die briggischen Logarithmen, viel leichter finden lassen, als man sie wirklich gefunden hat (Ar. VI. 29).

232. I. Die Zahl, deren natürlicher Logarithme $= 1$ ist das e (222). Nimmt man also AP =

AP = AB = 1; und PC = e; so stellt die logarithmische Linie die natürlichen Logarithmen vor; und ihre Subtangente ist = AB.

II. So giebt sich die Gleichung $e^x = y$ wo x der natürliche Logarithme von y ist. Sie dient, eine Zahl aus ihrem natürlichen Logarithmen zu finden, weil x. log nat e = log nat y, wo log nat e = 1

III. So, wenn x = 2; ist $y = (2{,}718\ldots)^2 = 7{,}389\ldots$ die Zahl deren natürlicher Logarithme = 2.

In Schulzens Sammlung logarithmischer u. a. Tafeln I. Th. 188 S. stehn neben den hyperbolischen (natürlichen) Logarithmen 1 ... 60, ihre Absolutzahlen, das sind Potenzen von e. Der Potenzen Exponenten, gehn nicht durch alle Einheiten.

IV. In 221; fand man Zahl aus Logarithmen, aber $\frac{x}{a}$ durfte nicht grösser seyn als 1, folglich, bey dem natürlichen Logarithmen, auch x nicht grösser als 1. Aber in (II) mag x so groß seyn als es will, wenn man nur die zugehörige Potenz von e macht, welches freylich in der Anwendung oft sehr mühsam seyn würde.

V. Die Ordinaten können bey der logarithmischen Linie, wie bey jeder andern, schiefe Win-

kel mit den Abscissen machen. Nach diesem Unterschiede, nennt Joh. Bernoulli, logarithmicas acutangulas, rectangulas, obtusangulas. Op. T. II. n. 125. Dahin gehört eine krumme Linie die Florimond de Beaune dem Carteſius zu construiren vorgelegt hatte, Carteſius aber durch seine Kunstgriffe nicht darstellen konnte, sie wird curua Beauniana genannt. Die Analysis des Unendlichen lehrte ihre Construction Io. Bern. Op. T. I. n. IX; n. XI. Joh. Bern. zeigt merkwürdige Eigenschaften von ihr.

233. Aufg. BCD ist eine gleichseitige Hyperbel (An. endl. Gr. 417) zwischen ihren Asymptoten AF, AE; Man nimmt auf der letzten eine willkührliche Länge AG, welche sich nicht ändert, imgleichen eine veränderliche AP; durch G, P, zieht man bis an die Hyperbel, der ersten Asymptote Parallelen CG, PM,

Ich suche den Raum GCMP, zwischen Hyperbel, beyden Ordinaten, und dem Stücke der Abscisse auf der Asymptote. Er heisse Z.

Aufl. I. Was in An. endl. 411; CQ, QM, waren, sind hie AP, PM, die dortigen beyden Axen hie gleich, jede $=a$; also wird a. a. O. hie AP. PM $= \frac{1}{8}. a^2$. Es sey Pp das Differential von AP oder GP (22) so ist der Fläche GCMP Differential $PMmp = PM. Pp = \frac{1}{8}. a^2.$
$\frac{dAP}{AP} = dZ.$

II.

II. Man setze, senkrecht auf die zweyte Asymptote gehe durch P unter die Asymptote hinunter eine gerade Linie $= q = \frac{Z}{a}$ So ist $dq = \frac{dZ}{a} = \frac{1}{8}. a. \frac{dAP}{AP}$. Man setze

in 228. II $\left|\frac{dy}{dx}\right| a \mid y$
hie $\left|dq\right| \frac{1}{8} a \left| AP\right.$
So ist $q = \frac{1}{8}$ a. log nat AP.

Weil $q = o$ wo $Z = o$, das ist wo $AP = AG$, so muß AP als eine Zahl angesehen werden, die sich auf AG als Einheit bezieht, und man kann die Gleichung auch so ausdrucken: $q = \frac{1}{8}$ a. log nat (AP:AG)

III. Die Gleichung gehört also einer logarithmischen Linie, deren Abscisse $= q$, Ordinate $=$ AP, die Subtangente $= \frac{1}{8}$ a. Man verzeichnet sie folgendergestalt:

Auf der verlängerten Asymptote FA, von Mittelpuncte niederwärts, nehme man Abscisse $w = \frac{1}{8}$ a. log nat (AP:AG), ziehe in dieser Weite, mit der Asymptote AC eine Parallele $=$ AP; die gehört als Ordinate zur Abscisse.

Abscissen und Ordinaten wachsen beyde ins Unendliche. Für Abscisse $= o$; ist die Ordinate $=$ AG. Nimmt man auf der Asymptote AF, vom Mittelpuncte Abscissen aufwärts, die also verneint sind, so gehören ihnen Ordinaten kleiner

als

als AG, immer kleinere, je gröſſer die verneinten Abſciſſen werden. Die logarithmiſche Linie hat AF auch zu ihrer Aſymptote, an der ſie ſich ins Unendliche hinaufzieht.

IV. Dieſer Linie Abſciſſen w, verhalten ſich wie die hyperboliſchen Flächen GCMP. Verneinte Abſciſſen verhalten ſich wie die Flächen über Stücken der Aſymptote von G nach A zu genommen. Dieſe Flächen werden als verneint angeſehn, und wachſen ins Unendliche (211; V. VII.)

Daher ſagt man dieſe logarithmiſche Linie zeige die Quadratur der Hyperbel ſey Quadratrix hyperbolae. Hauſen El. ſect. conicar. Prop. L. handelt von ihr, da er die Quadratur der Hyperbel zwiſchen den Aſymptoten lehrt.

V. AG iſt willkührlich, nur nicht = o weil der Raum von der Aſymptote AF bis an GC unendlich groß iſt. Der Raum von GC an der Aſymptote AE iſt ebenfalls unendlich groß, anders als der Raum der Hyperbel (211; II)

VI. Man ſetze die gerade Linie AC halbire den Aſymptotenwinkel, ſey alſo zugleich halbe Axe, ſo iſt $AG = GC = \frac{AO}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2.\sqrt{2}}$. Weil dieſes nun = 1 geſetzt wird (II) ſo iſt die Axe der Hyperbel $= a = 2.\sqrt{2}$; Eigentlich dieſe Zahl mit AG = GC multiplicirt.

VII.

VII. Nun ist (II) $Z = a.q = \frac{1}{2} a^2$. log nat (AP:AG) also nach (VI) $Z =$ log nat AP.

VIII. Die natürlichen Logarithmen geben also den Raum zwischen Hyperbel und Asymptote, daher nennt man sie auch hyperbolische.

Logarithmotechnia, s. methodus construendi logarithmos, noua, accurata et facilis, scripto antehac communicata Anno Sc. 1667. nonis Augusti, cui nunc accedit vera quadratura hyperbolae et inuentio summae logarithmorum auct. Nicolao Mercatore Holsato, e Societate Regia. Huic etiam iungitur Michaelis Angeli Riccii exerc. geometrica, de maximis et minimis, hic ob argumenti praestantiam et exemplarium raritatem recusa. Londin. 1668; 4°. Newton ist auf Vergleichungen der Logarithmen mit der Fläche der Hyperbel auch für sich gerathen.

Mehr Betrachtungen über hyperbolische Flächen s. unten (317.)

IX. In der Rechnung des Unendlichen kömmt man häufig auf das Differential $\frac{dy}{y}$; dessen Integral der natürliche, oder wie man ihn auch nennt hyperbolische Logarithme von y ist. Dergleichen Logarithme wird also verlangt, nicht, wie man die briggischen gewöhnlich braucht, Multiplication und Division, in die beyden leichtern Rech-

Rechnungsarten zu verwandeln, sondern als eine Zahl mit der man selbst rechnet, wie mit andren Zahlen. Ein Beyspiel ist: Wieviel das Quecksilber im Barometer sinkt, wenn man um eine gegebene Höhe steigt; man s. die Abhandlung von Höhenmessungen mit dem Barometer, bey meinen Anmerkungen über die Markscheidekunst Gött. 1775. In der höhern Mechanik kommen besonders Integrale sehr häufig vor, die man durch natürliche Logarithmen angeben muß.

X. Briggische Logarithmen auf mehr Decimalstellen als geschehen ist zu berechnen, oder für grössere Zahlen anzugeben als man in den vorhandenen Tafeln findet geschieht leichter, wenn man natürliche berechnet, und sie vermöge (230) auf briggische bringt.

XI. So hatten Mathematiker die sich mit höhern Rechnungen beschäfftigten, oft Veranlassung, Tafeln natürlicher Logarithmen zu wünschen. Und doch war von dergleichen Tafeln nicht viel bekannt.

Joh. Heinr. Lambert, Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen Berlin 1770; meldet im 59 §. der Einleitung er habe sich schon vor mehr Jahren dergleichen Tafel bis auf sieben Decimalstellen für die ersten hundert Zahlen berechnet.

So was ist mehrmahl, und vollkommner von Liebhabern der Mathematik wiederhohlt worden.

Der

Der Hr. Gen. v. Stamford, sandte mir schon 1774; für die ersten 100 Zahlen, hyperbolische Logarithmen auf 20 Decimalstellen.

In erwähnten Zusätzen ist die XV. Tafel Simpsons, für 1,01 bis 10 durch alle Hundertheile hyperbolische Logarithmen. Man kann diese Tafel, mit gehöriger Zubereitung von 100 bis 1000 brauchen.

Eben diese Tafel findet sich bey: Tables de Logarithmes ... publiées cidevant en Angleterre par M. Gardiner Avignon 1770.

Schärfre, und für grössere Zahlen berechnete hyperbolische Logarithmen machte zuerst Joh. Carl Schulze bekannt, Er starb zu Berlin 13 Jun. 1790 in einem Alter von 41 Jahren als K. Pr. geheimer Oberbaurath und Mitgl. d. K. Ak. d. Wissenschaften.

Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer, und a. zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln; 2 Bände 8. Berl. 1778.

Im ersten Bande befinden sich natürliche oder hyperbolische Logarithmen, auf 48 Decimalstellen. Hr. Wolfram, damaliger Artillerielieutenant in holländischen Diensten hat sie berechnet. Die Zahlen gehn von 1 ... 2200 durch alle Einheiten, von da bis 10009 durch Primzahlen. Bey einigen Zahlen ist leerer Raum gelassen.

H. W.

Hr. W. konnte die Logarithmen wegen Krankheit nicht berechnen. Diese hat Hr. M. Lüdike ergänzt Wittenbergisches Wochenblatt 1781; 245 S. und versichert zugleich die Richtigkeit mehrerer Wolframischen Logarithmen.

Hr. Ritter Georg Vega; Logarithmische, trigonometrische u. a. Tafeln... Wien 1783; liefert natürliche Logarithmen in acht Decimalstellen, für 1 .. 1000 durch alle ganze Zahlen, von da an bis 9973 durch Primzahlen.

Ge. Vega, Thesaurus logarithmorum, Vollständige Sammlung grösserer logarithmischtrigonometrischer Tafeln Leipz. 1794. fol. enthält am Ende des zweyten Bandes Wolframs Tafel der natürlichen Logarithmen, die welche in der schulzischen Ausgabe fehlten beygefügt.

Ge. Vega, logarithmischtrigonometrische Tafeln Leipz. 1797; 2 Quartbände, enthalten natürliche Logarithmen, wie die Ausgabe 1783.

Lambert, Schulz, Vega, geben auch Formeln und Hülfszahlen zu Berechnung der natürlichen Logarithmen, Verwandlung derselben in briggische, und umgekehrt.

235. I. Die neperischen Logarithmen sind die ersten welche in Gebrauch gekommen sind, es ist also dienlich derselben Zusammenhang mit dem bisherigen zu zeigen.

In

In dem (44; XIX) angeführten Buche def. 6. sagt Neper: Logarithmus cuiuscunque sinus, est numerus, quam proxime definiens lineam, quae aequaliter creuit, interea dum sinus totius linea proportionaliter in sinum illum decreuit, existente vtroque motu synchrono, atque initio aequiueloce. Das läßt sich folgendergestalt darstellen:

Der Sinustotus heisse = r; in irgend einem angeblichen Zeittheile nehme er um g ab, so entsteht der Sinus r − g; Nun soll der Sinustotus in gleichen Zeittheilen, proportionirlich abnehmen, also entsteht am Ende des zweyten Zeittheils der Sinus $\frac{(r-g)^2}{r}$; am Ende des dritten, $\frac{r-g)^3}{r^2}$ u. s. f. Mit dem abnehmenden Sinustotus, soll eine Linie wachsen, in gleichen Zeiten gleichviel, und ihr wachsen soll im Anfange so geschwind seyn, als jenes abnehmen, also ist sie = g; 2. g; ... am Ende des ersten, zweyten .. Zeittheils. So gehören zusammen

Sinus	r	r − g	$\frac{(r-g)^2}{r}$	....	$\frac{(r-g)^{n-1}}{r^{n-2}}$	$\frac{(r-g)^n}{r^{n-1}}$
Logarithme nach Neper	o	g	2. g	....	(n − 1). g	n. g

Hie ist jeder folgende Sinus kleiner als der nächstvorhergehende, und des folgenden Logarithme um g grösser als des vorhergehenden. Stellt

man sich also die Sinus von o bis zum Sinus totus wachsend vor so zieht man in der dargestellten Reihe den folgenden vom vorhergehenden ab, der Unterschied $= g.\left(\frac{r-g}{r}\right)^{n-1}$ ist der Ueberschuß des grössern über den kleinern, und indem sich der kleinere in den grössern verwandelt nimmt des kleinern Logarithme um g ab.

Auch giebt, der Ueberschuß mit dem kleinern dividirt den Quotienten $\frac{g}{r-g}$. In diesem Quotienten, ist der Dividend, das Gegentheil von dem um was sich der neperische Logarithme ändert indem sich der kleinere Sinus in den nächstgrössern verwandelt, denn da nimmt der Logarithme um g ab.

II. Man setze also die Aenderungen der Sinus und Logarithmen gehn durch unendlich kleine Stufen der kleinere Sinus heisse w; ihm gehöre der neperische Logarithme v; so gehören zusammen, $w+dw$ und $v-dv$; und es ist $dv = g$; So, verwandelt sich der Quotient (I) in $\frac{-dv}{r}$

$$= \frac{+dw}{w}$$

III. Das giebt Const $-\frac{v}{r} = \log$ nat w. Nun kann der kleinere Sinus wachsen bis an r hat

hat er dieſen Werth erreicht, ſo iſt er freylich nicht mehr kleinerer, ſondern Sinustotus. Mit ſeinem Wachſen nimmt v ab und wird = o wenn er = r wird. Alſo iſt Conſt = log nat r, folglich log nat $\frac{r}{w} = \frac{v}{r}$ und $v = -r. \log nat \frac{w}{r}$

IV. Es ſey $\frac{w}{r} = \sin \varphi$ für den Sinustotus = 1; Da nun v neperiſcher Logarithme iſt, ſo kömmt: log nep ſin $\varphi = -$ r. log nat ſin φ Eben ſo: log nep cof $\varphi = -$ r. log nat cof φ Folglich

$$\left.\begin{array}{l}\log nep \sin \varphi \\ -\log nep \cos \varphi\end{array}\right\} = +r. \left\{\begin{array}{l}\log nat \cos \varphi \\ -\log nat \sin \varphi\end{array}\right\}$$

das iſt

log nep tang $\varphi = +$ r. log nat cot φ

V. Dieſes zeigt wie neperiſche Logarithmen mit den natürlichen zuſammenhängen, auch daß der neperiſche Logarithme einer Tangente, Differenz zwiſchen Logarithmen des Sinus und Coſinus iſt.

VI. Wenn man den Sinustotus = 1 ſetzt ſo iſt der natürliche Logarithme jedes Sinus verneint, weil der nun mit — r multiplicirt wird, ſo kömmt jeder neperiſche Logarithme des Sinus bejaht.

VII. Die neperiſchen Logarithmen der Sinus nehmen ab, indem die Winkel wachſen, der ne-

perische Logarithme der Tangente eines Winkels unter 45 Grad ist also bejaht, und eben dieser Logarithme mit dem Zeichen — genommen, giebt den Logarithmen der Cotangente dieses Winkels. So machen die Logarithmen der Tangenten und Cotangenten nur eine Columne aus. Jedes Glied von ihr mit + giebt Tangente eines Winkels unter 45 Grad, und mit — eben desselben Cotangente, also das Glied mit —, Tangente eines Winkels über 45 Gr. und mit + darunter. So erfodern die neperischen trigonometrischen Logarithmen weniger Raum als die briggischen.

VII. Nepers (I) angezeigter Canon, enthält Bogen des Quadranten durch alle Minuten, Ergänzungen neben einander auf einer Blattseite, auf einer solchen Seite fünf Columnen, die Ueberschriften sind: Sinus, (unter 45 Grad) Logarithmi (diesen gehörig) differentiae (Logarithmen der Tangente über den rechter Hand + linker Hand — steht) Logarithmi (über 45 Gr.) Sinus (über 45 Grad). Die Minuten der Bogen in Spalten, und beyden Seiten angegeben. Der Sinustotus ist zehn Millionen.

VIII. Wie Neper seine Logarithmen berechnet hat findet sich in angeführter Ausgabe nicht, auch nicht in einer Lugduni 1620; die nur ein Abdruck der 1614; ist. Karsten Lehrbegr. der Mathem. II. Th. (Greifsw. 1768) Allgemeine Rechenk. 145 §. erwähnt eine Ausgabe 1619, nach

nach Nepers Tode von deſſen Sohne, wo die Gründe vollſtändiger aus einander geſetzt ſind.

Für 30 Grad iſt $\frac{w}{r} = \frac{1}{2}$;

Nun $-\log \text{nat } 2 = -0{,}693147180$
Alſo $r = 10000000$ geſetzt,

$-r.\log \text{nat } \frac{w}{r} = +6931471{,}80$

Beym Neper ſteht 6931469 um zwey Zehnmillliontheilchen zu wenig welches von ſeiner Berechnung herrühren muß.

Für $\varphi = 45$ iſt $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, davon der natürliche Logarithme $= -\frac{1}{2}.\log \text{nat } 2 =$
$-0{,}346\,573\,590\,279\,972$
Nepers Logarithme iſt $+3465735$.

IX. Beni. Vrſini Math. El. Brandenb. Trigonometria cum magno logarithmorum canone. Coloniae (an der Spree) 1625; 2 Quartbände. Der erſte, Trigonometrie, auch etwas von Berechnung der Logarithmen, der zweyte den Canon, durch den Quadranten, von zehn zu zehn Secunden. Die Columnen, wie beym Neper (VII) zwiſchen ihnen noch Spalten, für Aenderungen der Zahlen, bey Proportionaltheilen zu brauchen. Der Sinustotus $= 100000000$; die Logarithmen der Sinuſſe von
30 Gr; $= 69314718$
45 Gr; $= 34657359$.

Beni. Vrſini Sprott. Sileſ. Curſus Mathematico Practici Volumen I. Colon. 1618; 8°; enthält Nepers Canon (VII) von jeder Zahl die beyden niedrigſten Zifern weggelaſſen. Ich rede davon, in meiner Aſtronomiſchen Abhandlungen II. Samml. (1774)

IV. Abh. Von gröſſern, oder ſonſt merkwürdigen logarithmiſchen Tafeln, 62 §.

X. Neper hatte bey ſeinen Logarithmen anfangs blos an Erleichterung der ſphäriſchen Trigonometrie gedacht. Das zeigt ſich daraus, weil er blos Logarithmen für Sinus und Tangenten berechnete, mit denen man bey dieſer Trigonometrie auskömmt.

Seine Logarithmen auch für andre Zahlen zu brauchen, ſchlägt er vor, wenn ein Logarithme gegeben iſt, den Sinus aufzuſuchen der dieſem Logarithmen am nächſten kömmt, oder umgekehrt eine Zahl unter den Sinuſſen aufzuſuchen, und dann den ihr gehörigen Logarithmen.

Das Verfahren iſt auch bey den briggiſchen trigonometriſchen Logarithmen vorgeſchlagen worden. Meine Anmerkungen über die Markſcheidekunſt, 20. Anm. Es wird beſchwerlich, weil die trigonometriſchen Logarithmen nicht Zahlen gehören die immer gleichviel wachſen.

XI. Kepler berechnete neperiſche Logarithmen für Sinus die immer gleich viel wachſen, und dieſe

dieſe Logarithmen ſind alſo als Logarithmen gemeiner Zahlen bequem zu brauchen, aber die Bogen die ihnen zugehören wachſen durch ungleiche Unterſchiede. Kepleri Chilias Logarithmorum Marp. 1624. Supplementum Chil. log. Marp. 1625. Ich beſchreibe ſie: Geometriſche Abhandlungen, I. Sammlung (1790) 495 S.

XII. In (III) bedeutet v den neperiſchen Logarithmen einer Zahl = w; in welche ſich r durch Abnehmen verändert hat, während der Logarithme o der r gehörte, durch Wachſen ſich in v geändert hat. Daß $\frac{w}{r}$ Sinus eines Winkels für den Sinustotus = 1 iſt, braucht nicht in Betrachtung gezogen zu werden. So bleibt noch die Gleichung am Ende von III, die man ſo ausdrucken kann

$v = r.\ (\log \text{nat}\ r - \log \text{nat}\ w)$

Und da iſt v der neperiſche Logarithme von w, wenn von r der neperiſche Logarithme = o geſetzt wird.

XIII. Hie könnte auch w gröſſer als r werden, nur mit der Vorausſetzung, daß die Gröſſe über r eben ſo proportionirlich wüchſe, wie ſie unter r abnahm. Da wäre in (I) g verneint, der Logarithme dieſes w würde auch verneint, wie der Werth von v in (XII) anzeigt.

XIV. Der Unterſchied der natürlichen Logarithmen in (XII) wird in Decimaltheilen ohne Ende

fortgehen. Wäre nun r eine Potenz der 10 z. E. 10000; so betrüge erwähnter Unterschied mit 10000 multiplicirt, Ganze, Zehntheile ... Da könnte man nun den Werth von v, nur in Ganzen ausdrucken, und die Decimaltheile weglassen. Es ist aber auch gestattet ihn mit Zehntheilen, Hunderttheilen u. s. w. anzugeben. So stehn die briggischen Logarithmen in den gewöhnlichen Tafeln nur bis auf Zehnmillionstheile, in Vlacqs grössern die Vega im Thesaurus wiederum herausgegeben hat (233; XI) auf drey Stellen weiter. Nur, wenn man eine Tafel für v giebt, muß jedes Glied derselben bis auf die Decimalstelle angegeben seyn, bis auf welche das andre angegeben ist, z. E. aller bis auf Zehntheile, nicht eins bis auf Zehntheile das andre bis auf Hunderttheile.

XV. Man setze r = 10000 und suche v für jedes w kleiner als 10000. So ist v = 10000. (log nat 10000 — log nat w)

Exempel: w = 1, davon der natürliche Logarithme = 0; Nun ist
log nat 10000 = 9,21030340371976;
also v = 92130,34 .....
giebt man also jedes v bis auf Zehntheile an, so setzt man gegenwärtiges = 921303.

Es sey w = 7351 so ist
log nat w = 8,902591637374
von log nat 10000 abgezogen

bleibt

bleibt 0,3077487346 02; das zugehörige v bis auf Zehntheile angegeben ist 30774.

XVI. Praxis trigonometriae logarithmicae, a M. Petro Crugero Reip. Dantiscanae mathematico, Dantisci 1634; enthält unter den Tafeln zuerst neperische Logarithmen für gemeine Zahlen von 1 ... 10000, sind die v bis auf Zehntheile ausgedruckt, die beyden Exempel (XV) finden sich in dieser Tafel.

Dann neperische trigonometrische Logarithmen, wie die im Canon mirificus, nur bey jedem die niedrigsten beyden Zifern weggelassen, also für den Sinustotus 100000; natürliche Sinus nicht dabey. Noch einige Tafeln zur Bequemlichkeit der Rechnung mit neperischen Logarithmen.

Diese Tafeln sind also für die Rechnung mit neperischen Logarithmen, so was wie unsre gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln für die briggischen, und verdienen als die einzigen ihrer Art Erwähnung.

Damahls waren schon briggische Logarithmen bekannt. Krüger behielt aber die ältern, weil sie bey den Rudolphinischen Tafeln gebraucht wurden.

XVII. Schulze hat bey seinen trigonometrischen Tafeln (233; XI) Columnen, mit den Ueberschriften: Loghyp; Sin. Tang. Cos. Es sind: neperische Logarithmen, aus Ursins grossem Canon, (IX) aber so ausgedruckt daß jeder Loga-

rithme wie Ursin ihn angiebt, mit 100000000 dividirt ist. Nun ist was in (IV) r heisst beym Ursin hundert Millionen, Schulze bringt durch seine Division dieses auf 1; und so ist bey Schulzen

$$\log \text{hyp sin } \varphi = - \log \text{nat sin } \varphi$$
$$\log \text{hyp tang } \varphi = + \log \text{nat cot } \varphi$$

Man braucht auch zuweilen natürliche Logarithmen der trigonometrischen Linien, und da sind diese Schulzischen sehr bequem. Wer die seltenen grössern neperischen besitzt findet solche Logarithmen von 10 zu 10 Secunden, wenn er jeden neperischen mit hundert Millionen dividirt.

XVIII. Ich habe von den Logarithmen historische Nachrichten gegeben so weit solche in Verbindung mit der Rechnung des Unendlichen stehn. Noch gehört hieher eine Disputation: Historiae logarithmorum naturalium primordia . . . M. Io. Sam. Traugott Gehler, Lipſ. 1776. Der Verf. der nachdem durch physikalische Schriften, besonders das physikalische Wörterbuch bekannt geworden ist, geb. zu Görlitz 1751 starb als Oberhofger. Assess. u. Senator zu Leipzig 16 Oct. 1795.

Wegen Beschreibungen von logarithmischen Tafeln, verweise ich auf die vierte astronom. Abh. in der zweyten Sammlung, und die 60 geometrische Abh. in der ersten Sammlung, auch meine Fortsetzung der Rechenkunst (1786) 79 u. f. S. wo ich von Byrgs Logarithmen rede.

Scripto-

Scriptores logarithmici, or a collection of several curious tracts on the nature and construction of logarithms. Lond. 1791. 2 Bände groß Quart, der Herausgeber nennt sich Francis Maseres. der 3. Band Lond. 1796.

Sammlung von Büchern und einzelnen Aufsätzen, welche Logarithmen, auch binomischen Lehrsatz und Reihe, betreffen.

Vlus logarithmorum infinitinomii in theoria aequationum, auct. Mauricio de Prasse Lipſ. 1796. eine wichtige Anwendung von Hr. Pr. Hindenburg combinatorischer Analytik.

Von der Exponentialrechnung.

235. Erkl. Eine Exponentialgrösse heisst, deren Exponent eine veränderliche Grösse ist z. E. z^x. Die Wurzel mag veränderlich oder unveränderlich seyn.

Logarithmen verstehe ich hie natürliche, und zeige den natürlichen Logarithmen von z durch lz an.

236. Aufg. Eine Exponentialgrösse zu differentiiren.

Aufl. Sie sey $z^x = y$; Man sucht dy.

Nun ist $x.lz = ly$ (Ar. VI. C. 21) also $dx.lz + \frac{x.dz}{z} = \frac{dy}{y}$ (218) folglich das gesuchte $dy = z^x.lz.dx + x.z^{x-1}dz$.

Wäre

Wäre z unveränderlich $= a$; so käme von a^x das Differential $a^x . la . dx$.

237. Aufg. Das Differential einer Exponentialgröſſe $x^x dx$ zu integriren.

Aufl. Man ſetze $x = 1 + y$ alſo das Differential $(1+y)^{1+y} dy$. Man ſetze ferner $(1+y)^{1+y} = 1 + v$ alſo $(1+y).l(1+y) = l(1+v)$ oder (220) $(1+y).(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 \ldots) = v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 \ldots)$ Die Reihe linker Hand wird $y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 \ldots$ Um nun v durch y auszudrucken verfahre man nach Alg. (694.)

$$
\begin{array}{rl}
v = & y + \frac{1}{2}\Big| y^2 - \frac{1}{6}\Big| y^3 \\
 & + \frac{1}{2}\Big| \quad + \frac{2}{3}\Big| \\
-\frac{1}{2}v^2 = & - \frac{1}{2} y^2 - 1\Big| \\
+\frac{1}{3}v^3 = & \quad + \frac{1}{3}\Big| \\
\hline
v = & y + y^2 + \frac{1}{2}y^3 \ldots . \\
v^2 = & \quad y^2 + 2y^3 \ldots . \\
v^3 = & \quad y^3 \ldots .
\end{array}
$$

Man nimmt nähmlich y für das erſte Glied von v an; dieſes giebt $-\frac{1}{2}yy$ für das erſte Glied von $-\frac{1}{2}vv$ dieſes erſte Glied von $-\frac{1}{2}vv$ mit entgegengeſetzten Zeichen zu $+\frac{1}{2}yy$ welches ſchon v gegenüberſtund, addirt, giebt $+yy$ für das zweyte Glied von v. Daraus findet ſich $-y^3$ für das zweyte Glied von $-\frac{1}{2}vv$; imgleichen aus dem erſten Gliede von v; $+\frac{1}{3}y^3$ für das erſte Glied von $+\frac{1}{3}v^3$; dieſe beyden Gröſſen zuſammen machen $-\frac{2}{3}.y^3$ welches mit entgegen-

gengesetzten Zeichen zu $-\frac{1}{6}y^3$ das schon v gegenüberstehet, addirt, $+\frac{1}{2}y^3$ zum dritten Gliede von v giebt. Und so findet man $1+v=1+y+y^2+\frac{1}{2}y^3+\frac{1}{3}y^4+\frac{1}{12}y^5\ldots$. Diese Reihe nun, weil sie $=(1+y)^{1+y}$ ist, muß mit dy multiplicirt, und was herauskömmt, integrirt werden, so findet man $\int(1+y)^{1+y}.dy = y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{8}y^4+\frac{1}{15}y^5+\frac{1}{72}y^6\ldots$ wo man statt y; $x-1$ setzen müsste, wenn man das dieser Reihe gleiche Integral $\int x^x\,dx$ unmittelbar durch x ausdrucken wollte. Es würde dieses aber nicht bequem seyn, weil jedes Glied, das eine Potenz von y enthält, verschiedene geben würde, wenn man $x-1$ statt y setzte, da man denn die Glieder, die einerley Potenzen von x enthalten, wieder zusammen rechnen müsste.

238. Anm. Von der Exponentialrechnung hat Joh. Bernoulli zuerst Regeln und Exempel bekannt gemacht, Act. Erud. Lipſ. 1697. Menſ. Mart. Op. T. I. n. 36. Das Integral (237) hat er besonders betrachtet, und besondere Eigenschaften daran bemerkt. Op. T. III. n. 148.

239. Aufg. Die Grösse e^x (232) durch eine Reihe, die nach x forrgeht, auszudrücken.

Aufl. Es sey $x=l(1+u)$ so ist auch $x\,l\,e = l(1+u)$ (232) oder $l\,e^x = l(1+u)$ oder $e^x = 1+u = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\ldots$ (221).

240. Zus. Man setze $a^y = e^x$ so ist $y\,l\,a = x$ also $a^y = 1+y\,l\,a+\frac{yy.(la)^2}{2}+\frac{y^3.(la)^3}{6}\ldots$

So

So läßt sich jede Exponentialgröße vermittelst der hyperbolischen Logarithmen durch eine unendliche Reihe ausdrücken.

241. Aufg. e^{mx} zu differentiiren.

Aufl. Es sey $e^{mx} = u$ so ist $mx = lu$ (232) und $m\,dx = \frac{du}{u}$ also du oder $de^{mx} = m\,e^{mx}\,dx$

242. Aufg. Das Differential $e^{mx}\,x^s\,dx$ zu integriren, wenn s eine ganze bejahte Zahl ist.

Aufl. Man setze $\int e^{mx}\,x^s\,dx = \frac{e^{mx}\,x^s}{m} - p$ auf beyden Seiten differentiirt, kömmt nach (241.)

$e^{mx}.\,x^s.\,dx = e^{mx}.\,x^s.\,dx + \frac{s}{m}\,x^{s-1}.\,e^{mx}.\,dx - dp$; Also $dp = \frac{s}{m}\,x^{s-1}.\,e^{mx}.\,dx.$

Man setze die erste Ergänzung

$p = \frac{s.\,x^{s-1}.\,e^{mx}}{m^2} - q$; so ist

$dp = \frac{s.\,x^{s-1}.\,e^{m}.\,dx}{m} + \frac{s.(s-1).\,x^{s-2}.\,e^{mx}.\,dx}{m^2} - dq$; oder $dq = \frac{s.(s-1).\,x^{s-2}.\,e^{mx}.\,dx}{m^2}$

So setze man die zweyte Ergänzung $q = \frac{s.(s-1).\,x^{m-2}.\,e^{mx}-1}{m^3}$

und

und es ist $dq = \frac{s.(s-1).x^{s-2}.e^{mx}dx}{m^2}$

$+ \frac{s.(s-1)(s-2)x^{s-3}.e^{mx}dx}{m^3} - dr$ oder

$dr = \frac{s.(s-)(s-2)x^{s-3}.e^{mx}dx}{m^3}$

Ueberhaupt setze man unter den Ergänzungen p; q; r; u. s. w. sey man auf eine dt gekommen, so daß

$dt = \frac{s.(s-1)....(s-n)x^{s-n-1}.e^{mx}dx}{m^{n+1}}$

so setze man die $n+1$te Ergänzung

$t = \frac{s.(s-1)...(s-n)x^{s-n-1}.e^{mx}}{m^{n+2}} - u$

da ist $dt = \frac{s.(s-1)...(s-n)}{m^{n+1}} x^{s-n-1}e^{mx}dx$

$+ \frac{s.(s-1)...(s-n-1)}{m^{n+2}} x^{s-n-2}.e^{mx}dx - du$

oder $du = \frac{s.(s-1)...(s-n-1)}{m^{n+2}} x^{s-n-2}e^{mx}.dx$

wo man wieder für u einen solchen Ausdruck wie für t annehmen kann, ist aber $n = s$ so wird $t = o$ und die Reihe bricht da ab: die nte Ergänzung überhaupt ist $\frac{s.(s-1)....(s-n+1)}{m^{n+1}} x^{s-n}e^{mx}$

— t sie wird also die letzte für $n = s$ und da ist sie $\frac{s(s-1)\ldots 1}{m^{s+1}} x^0 e^{mx}$. Folglich ist, alle Ergänzungen zusammengerechnet, das gesuchte Integral, $= e^{mx}.\left(\frac{x^s}{m} - \frac{s x^{s-1}}{m^2}. - \frac{s.(s-1)}{m^3}.\right.$

$\left. x^{s-2} - \frac{s.(s-1)\ldots 1)}{m^{s+1}}\right)$ wozu keine beständige Grösse addirt zu werden braucht, wenn es für $x = 0$ auch der Reihe letztes Glied seyn soll. Der Kunstgriff bey diesem Verfahren, welcher auch anderswo oft angebracht wird, kömmt darauf an: Wenn man das Differential einer Grösse wie z. E. dp in voriger Rechnung hat, so nimmt man für das Integral davon zweene Theile an; erstlich eine Grösse, deren Differential zwey Stücken hat, von welchen eines dem vorgegebenen Differential wie dp, gleich ist; so bleibt also beym Differentiiren das andere Stück übrig, welches einem neuen Differentiale, nähmlich dem Differentiale des andern Theils des angenommen Integrals muß gleich gesetzt werden. So nähme man an $\frac{p = s x^{s-1} e^{mx}}{m^m} - q$ wo beym Differentiiren das erste Stück des Differentials des ersten Theils des angenommenen Werthes von p, dem vorhin gefundenen dp gleich ist, und also für den

den Werth von dq das zweyte Stück übrig bleibt. Wenn man nun mit q auch so verfährt, u. s. w. so gibt sich für das gesuchte Integral eine Reihe, die unter den gehörigen Umständen abbricht. Folgendes Exempel ist von eben der Art.

243. Aufg. $x^s (lx)^n dx$ zu integriren, wenn n eine ganze bejahte Zahl ist.

Aufl. Man muß sich erstlich erinnern, daß

$$d(lx)^n = n.(lx)^{n-1}.\, dlx = \frac{n.(lx)^{n-1}.\, dx}{x}$$

Nun setze man das gesuchte Integral

$= \frac{x^{s+1}.(lx)^n}{s+1} - p$. So ist auf beyden Seiten differentiirt

$$x^s (lx)^n dx = x^s (lx)^n dx + \frac{n.x^s (lx)^{n-1} dx}{s+1} - dp.$$

Man begreift, warum für des gesuchten Integrals ersten Theil eben die Grösse angenommen worden: damit sich nähmlich der erste Theil von ihrem Differentiale mit dem Differentiale, dessen Integral man sucht, aufhübe.

Nun hat man $dp = \frac{n.x^s (lx)^{n-1} dx}{s+1}$. Man setze

$p = \frac{n.x^{s+1}.(lx)^{n-1}}{(s+1)^2} - q$ so wird $dp =$

$$\frac{n.x^s.(lx)^{n-1} dx}{s+1} + \frac{n.(n-1).x^s.(lx)^{n-2}}{(s+1)^2} - dq$$

— dq von den drey Differentialen rechter Hand hebt sich das erste mit dp auf. Wegen des andern, das = dq ist, setze man

$$q = \frac{n.(n-1)x^{s+1}.(lx)^{n-2}}{(s+1)^3} - r \text{ so ist}$$

$$dq = \frac{n.(n-1).xs.(lx)^{n-2}\,dx}{(s+1)^2}$$

$$+ \frac{n.(n-1).(n-2)\,x^s.(lx)^{n-3}\,dx}{(s+1)^3} - dr$$

wo sich wiederum das erste der drey Differentiale linker Hand mit dp aufhebt. Ueberhaupt, wenn man für die Ergänzung t deren Zahl x ist, dergleichen p die erste, q die zweyte ist, folgende Gleichung annimmt:

$$t = \frac{n.(n-1)\ldots.(n-x+1)}{(s+1)^{x+1}}.\ x^{s+1}.$$

$(lx)^{n-x}$ so ist

$$dt = \frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{(s+1)^x}.\ x^s.(lx)^{n-x}dx$$

$$+ \frac{n.(n-1)\ldots.(n-x+1).(n-x)}{(s+1)^{x+1}}.\ x^s.$$

$(lx)^{n-x-1}.\,dx = du$

wo sich von den drey Gliedern rechter Hand das erste mit dt aufhebt und

$$du = \frac{n.(n-1)\ldots(n-x)}{(s+1)^{x+1}}\,(lx)^{n-x-1}\,dx$$

wieder-

wiederum $u = \frac{n.(n-1)....(n-\varkappa.)}{(s+1)^{\varkappa+2}} \cdot x^{s+1}$.
$(lx)^{n-\varkappa-1} - w$ giebt. Hieraus folgt, daß die Ergänzung u, deren Zahl $\varkappa + 1$ ist, $= o$ seyn wird, wenn $\varkappa = n$; da bricht also die Reihe ab, und wenn also die $(n+1)$te Ergänzung $= o$ ist, so ist die nächstvorhergehende nte, die letzte. Sie wird also, wenn man in t, $\varkappa = n$ setzt, $\frac{n.(n-1)....1}{(s+1)^{n+1}} \cdot x^{s+1}$. Folglich ist das gesuchte Integral, wenn man p; q, u. s. w. zusammen rechnet

$$x^{s+1}.\left(\frac{(lx)^n}{s+1} - \frac{n.(lx)^{n-1}}{(s+1)^2} - \frac{n.(n-1)}{(s+1)^3}.(lx)^{n-2} .... - \frac{n.(n-1)...1}{(s+1)^{n+1}}\right)$$

$+$ Const Diese Reihe wird nicht $= o$ wenn $x = o$ weil alsdenn lx unendlich wird, und daher kann das Integral nicht $= o$ für $x = o$ werden. Aber für $x = 1$ wo $lx = o$ wird die Reihe $1. - \frac{n.(n-1)...1}{(s+1)^{n+1}}$. Gesetzt also, das gesuchte Integral solle $= m$ für $x = 1$ werden, so hat man folgende Gleichung $m = -n.\frac{(n-1)...1}{(s+1)^{n+1}}$ $+$ Const oder Const $= m + \frac{n.(n-1)...1}{(s+1)^{n+1}}$.

Oder es ist vollständig

$$\int x^s (lx)^n dx = x^{s+1}.\left[\frac{(lx)^n}{s+1} \ldots - \frac{n.(n-1)..1}{(s+1)^{n+1}}\right]$$

$$+ \frac{n.(n-1)....1}{(s+1)^{n+1}} + m.$$

244. Anm. Wenn x unendlich wird, so wird zwar lx auch unendlich, aber von einem niedrigern Grade, so daß man setzen muß $l\infty$ sey eine unendliche Grösse, auf eine Potenz erhoben deren Exponent ein bejahter eigentlicher Bruch ist; Dieses erhellt daraus, weil die Zahlen in der geometrischen Verhältniß, die Logarithmen aber in der arithmetischen wachsen, und bekanntermassen die Glieder in einer steigenden geometrischen Reihe viel schneller zunehmen als in einer steigenden arithmetischen. So gehört in den gewöhnlichen Tafeln der kleine Logarithme 6 schon der grossen Zahl 1000000 zu. Eben so verhält es sich mit dem verneinten Logarithmen einer unendlich kleinen Grösse. Es ist nähmlich $l\frac{1}{\omega} = l1 - l\infty = -(\infty^{m:n})$.

So ist unter den briggischen Logarithmen, der verneinte Logarithme $-\rho - 6$, der $\frac{1}{1000000}$ zugehört, welcher bey weitem nicht so groß ist, daß seine Grösse mit der Kleinigkeit der ihm zugehörigen Zahl in Vergleichung käme, oder daß man etwas dieser Zahl nahe kommendes herausbringen würde, wenn man x durch den Logarithmen dividirte.

Einige allgemeine Formeln zusammengesetzte Differentiale zu integriren.

245. Aufg. Wenn X eine Function von x ist, $cdX.(a+X)^p$ zu integriren.

Aufl. Weil $a+X$ eine veränderliche Grösse, deren Differential dX, so ist das Integral

$= c.$

$= c. \frac{(a+X)^{p+1}}{p+1}$ (201. V.). Wer dieſes nicht ſo überſehen kann, kann ſich durch folgende Verwandelung (Transformatio differentialis, quae fit ſubſtituendo aliam incognitam) helfen: Er ſetze $a+X=z$ alſo $dX=dz$ und das Differential verwandelt ſich in $cz^p dz$ deſſen Integral $\frac{cz^{p+1}}{p+1}$ eben das vorige giebt, wenn man ſtatt z ſeinen Werth ſetzt. Ich nehme hier und in dem Folgenden überall an, daß die beſtändige Gröſſe, ſo wie es die beſondern Umſtände erfodern, gehörig addiret wird.

246. Ex. Wenn das vorgegebene Differential $\frac{-x\,dx}{\sqrt{(aa-xx)}} \cdot (a+\sqrt{(aa-xx)})^2$ wäre, alſo $X=\sqrt{(aa-xx)}$ ſo muß man aus den Regeln des Differentiirens wiſſen, daß $\frac{-x\,dx}{\sqrt{(aa-xx)}} = dX$ alſo das Integral $= \frac{1}{3}(a+\sqrt{(aa-xx)})^3$

247. Anm. Es iſt ein Vortheil, wenn man verſchiedene endliche Formeln, die man nach Gefallen annimmt, beſonders Wurzelgröſſen, differentiirt, weil man in ſolchen Fällen wie gegenwärtig vorkommen, die Kenntniß ſolcher Differentiale mit Nutzen brauchen kann. Beym Differentiiren ſelbſt ſind ſolche Verwandelungen, da man eine Gröſſe ſtatt einer andern ſetzt, oft brauchbar. Wenn man z. E. nicht gleich überſehen könnte, wie das Differential von $\sqrt{(aa-xx)}$

xx) ausfähe, so dürfte man diese Grösse nur $= y$ setzen, da $aa - xx = yy - xdx = ydy$; und $\frac{-xdx}{\sqrt{(aa-xx)}} = dy$ wäre.

248. Aufg. Umstände anzugeben, unter denen sich $x^m . (a + bx^n)^p . dx$ durch eine endliche Reihe integriren lässt.

Aufl. I. Wenn p eine ganze bejahte Zahl ist, so giebt sich die Potenz von $a + bx^n$ durch eine endliche Reihe; Jedes Glied dieser Reihe mit $x^m dx$ multiplicirt giebt ein Differential das sich nach 203 V; integriren lässt, und diese Integrale zusammen gerechnet geben das Gesuchte. Da also diese Voraussetzung, gar keine neuen Kunstgriffe brauchte, so nehme man an, p sey entweder ein Bruch (auch wohl ein uneigentlicher) oder eine verneinte ganze oder gebrochne Zahl.

II. Man setze $a + bx^n = z$, also $x = \frac{(z-a)^{\frac{1}{n}}}{b}$ und $nbx^{n-1} dx = dz$. Druckt man nun alles durch z aus, so verwandelt sich das vorgegebene Differential in $\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} . z^P . \frac{dz}{n.b}$

III. Ist nun hier $\frac{m+1}{n}$ eine bejahte ganze Zahl zum wenigsten $= 1$, so giebt sich die Potenz von $\frac{z-a}{b}$ durch eine endliche Reihe und solcherge-

dergestalt auch das Integral (wie in I). Will man dieses Integral wieder durch x ausdrucken, so setzt man statt z seinen Werth aus (II).

IIII. Hier mögen also m, n, p, was man will seyn, wenn nur die (III) angenommene Bedingung statt findet. Diese Bedingung läßt sich so ausdrucken $\frac{m+1}{n} = r + 1$ wo r eine ganze bejahte Zahl, oder $= o$ seyn muß. Das giebt $m = rn + n - 1$; also muß sich das vorgegebene Differential so ausdrucken lassen: $x^{rn}. x^{n-1}. (a + bx^n)^p. dx$; wo r eine ganze bejahte Zahl oder $= o$ seyn muß.

V. Indessen hat man gegenwärtigen Kunstgriff für $r = o$ nicht nöthig sondern es wäre in 245 hier $\left|\begin{matrix} X \\ bx^n \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} dX \\ nbx^{n-1}dx \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} c \\ \frac{1}{nb} \end{matrix}\right.$ also das Integral $\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb.(p+1)}$; wie auch aus gegenwärtiger Methode gefunden wird, wenn man das Differential in (II) für diesen Fall integrirt.

VI. Ist nicht $r = o$ so wird in II. $\frac{m+1}{n} - 1 = r$ und $(z-a)^r = z^r - r.az^{r-1} + r.\frac{(r-1)}{1.2}a^2z^{r-2} \ldots - a^r$

Dieſe Reihe hat $r+1$ Glieder, und weil die deren Zahl gerade iſt das Zeichen — vor ſich haben, ſo hat das letzte Glied — oder + nachdem 1 ungerade oder gerade iſt.

VII. Dieſe Reihe nun multiplicire man mit $z^p\,dz$ und integrire ſie. Das Integral iſt

$$\frac{z^{p+r+1}}{p+r+1} - \frac{r.a z^{p+r}}{p+r} + \frac{r.(r-1).a^2 z^{p+r+1}}{1.2.(p+r-1)} - \frac{\pm a^r z^{p+1}}{p+1} \ldots\ldots \frac{\pm a^r z^{p+1}}{p+1}$$

VIII. Wenn man die Reihe (VII) mit $n b^r + 1$ dividirt, ſo hat man das verlangte Integral.

VIIII. Man kann die Reihe (VII) auch ſo ausdrucken

$$z^{p+1}.\left(\frac{z^r}{p+r+1} - \frac{r a z^{r-1}}{p+r} + \frac{r(r-1)a^2.z^{r-2}}{1.2.p+r-1} - \ldots\ldots \frac{\pm a^r}{p+1}\right)$$

Dieſer Ausdruck hat die Bequemlichkeit, daß nur der Factor z^{p+1} irrational ſeyn kann, der andere rational iſt.

X. Nun kann man auch z wegſchaffen, und ſtatt deſſelben überall $a + b x^n$ ſetzen.

XI. Noch iſt die Ergänzung des Integrals (204) übrig. Soll es für $x = o$ verſchwinden, und

und ist n keine verneinte Zahl, so muß in (VIII) $z = a$ gesetzt werden und es ist

$$a^{p+1}.a^{r}.\left(\frac{1}{p+r+1}-\frac{r}{p+r}+\frac{r.(r-1)}{p+r-1}\cdots\frac{\pm 1}{p+1}\right)+\text{Const}=0, \text{ oder}$$

$$\text{Const}=-a^{p+r+1}.\left(\frac{1}{p+r+1}\cdots\frac{\pm 1}{p+1}\right)$$

XII. Die Reihe VIII; und der Werth der Const; XI; zusammen mit nb^{r+1} dividirt (VIII) geben das gesuchte Integral.

XIII. Wenn p eine verneinte ganze Zahl nicht grösser als $-r-1$ ist, so daß $p+r+1$ bejaht ist, so bekömmt die Reihe (VI) mit z^p multiplicirt ein Glied darinnen $\frac{dz}{z}$ befindlich ist, dessen Integral ist $\log z$. Alsdenn läßt sich der Ausdruck (VIII) nicht brauchen.

Ex. $\frac{x^3\,dx}{(1+x)^2}$ giebt $m=3$; $n=1$; $p=-2$; $r=3$; $a=1$; $b=1$ und die Reihe VI; nach VII mit $z^{-2}dz$ multiplicirt $z\,dz-3\,dz+\frac{3\,dz}{z}+\frac{dz}{z^2}$ Davon ist das Integral

$$\tfrac{1}{2}z^2-3z+3\log z-\frac{1}{z}+\text{Const}=0$$

Soll es für $x = o$ oder $z = 1$ verschwinden, so ist $\frac{1}{2} - 3 - 1 + \text{Const} = o$ oder $\text{Const} = \frac{7}{2}$ also $1 + x$ statt z gesetzt und nach VIIII mit 2 dividirt, kömmt $\int \frac{x^3 dx}{(1+x)^2} =$

$$\frac{(1+x)^2}{4} - \frac{3(1+x)}{2} + \frac{3}{2} \log (1+x) - \frac{1}{2(1+x)} + \frac{7}{4}$$

249. Für $n = 1$ findet allemahl 248; II statt, wenn m eine ganze bejahte Zahl oder auch $= o$ ist; alsdenn ist $r = m$; und man hat das Integral von $x^m . (a + bx)^p dx$

250. Ist in (249) ferner $p = + \frac{1}{2}$ oder $= - \frac{1}{2}$ so hat man die Integrale von

I) $x^m dx . \sqrt{(a+bx)}$; II. $\frac{x^m dx}{\sqrt{(a+bx)}}$

251. Zus. Wenn m in (249) gerade ist so setze man es $= 2c$; und $x^2 = u$; also $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$ so verwandelt sich (249) in $\frac{1}{2} u^{c-\frac{1}{2}} . (a+bu)^p . du$ welches sich also auch integriren läßt, c mag welche ganze bejahte Zahl man will seyn, oder auch $= o$

252. Wenn $n = 2$ so folgt aus (248) das Integral von $x^{2r+1} . (a + bx^2)^p dx$

253.

253. Nachdem man in (252), $p = +\frac{1}{2}$ oder $= -\frac{1}{2}$ ſetzt, hat man die Integrale von

I) $x^{2r+1}.\sqrt{(a+bx^2)}\,dx$; II. $\frac{x^{2r+1}\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)}}$

wo $2r+1$ jede ungerade Zahl ſeyn kann. Beyde ſind durch endliche Reihen ohne Logarithmen gegeben (249 VIII)

Ex. Für $x^3.\sqrt{(a+bx^2)}\,dx$ iſt $r = 1$; $p + r = \frac{3}{2}$ alſo wird die Reihe in 248; VIII';
$(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}.(\frac{2}{7}.(a+bx^2) - \frac{2}{3}a)$
$= \frac{2}{105}.(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}.(3bx^2 - 2a) = M$
Ferner aus 249; XI Conſt $=$
$-a^{\frac{5}{2}}.(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}) = +\frac{2}{15}.2a^{\frac{5}{2}}$ Dies zu M geſetzt giebt $\frac{2}{105}.((a+bx^2)^{\frac{3}{2}}.(3bx^2 - 2a) + 2a^{\frac{5}{2}})$ und dieſes nach 248 VIII; mit $2b^2$ dividirt giebt das verlangte Integral ſo daß es für $x + o$ verſchwindet.

II. Ex. Eben ſo iſt für $\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)}}$ nur $p = -\frac{1}{2}$; $p + r = +\frac{1}{2}$ und das verbeſſerte Integral $\frac{\sqrt{(a+bx^2)}.(bx^2 - 2a) + 2a\sqrt{a}}{3bb}$

254. $(ax^q + bx^s)^p.\,dx = x^{pq}.(a+bx^{s-q})^p.\,dx$; da iſt aus (248) $m = pq$; $n = s - q$, und das Differential läſſt nach 248; III; ſich integriren wenn $\frac{pq+1}{s-q}$ eine ganze be-

jahte

jahre Zahl ist, die man $= r + 1$ setzen kann. Es ist $z = a + bx^{s-q}$

255. Wenn $p = \frac{1}{2}$; $s = q + 1$, so lässt sich $\int (ax^q + bx^{q+1}) \cdot dx$ allemahl integriren wenn q gerade ist. Es ist alsdenn $r = \frac{1}{2} q$

Ex. Für $\int (ax^2 + bx^3) \cdot dx$ ist $q = 2$; $r = 1$; $z = a + bx$ und das verbesserte Integral

$$2. \left(\frac{(a+bx)^{\frac{3}{2}} \cdot (3bx - 2a) + 2a^{\frac{5}{2}}}{15b^2} \right)$$

256. Anm. Wenn man die gefundenen Integrale differentiirt, und daraus die angenommenen Differentiale herausbringt, so versichert man sich von der Richtigkeit der gefundenen Integrale, nicht in Absicht auf die Gewißheit der Regeln, von denen man durch die Beweise überzeugt seyn muß, sondern ob man solche richtig angebracht und gehörig gerechnet hat.

Andere Verwandlungen.

257. Aufg. $\frac{aadx}{x\sqrt{(ax+xx)}}$ zu integriren.

Aufl. Man setze $\sqrt{(ax+xx)} = \frac{zx}{b}$ also $a + x = \frac{zzx}{b^2}$ und $x = \frac{ab^2}{z^2 - b^2}$ folglich $\frac{zx}{b} = \frac{abz}{zz-bb}$ und $dx = \frac{abb. - 2zdz}{(zz-bb)^2}$ also

$$\frac{aadx}{x\sqrt{(ax+xx)}} = \frac{-2.a-2abbzdz}{(zz-bb)^2} \cdot \frac{zz-bb}{abb}$$

zz—

$\frac{zz-bb}{abz} = \frac{-2adz}{b}$ davon das Integral

$\frac{-2az}{b} = \frac{-2a\sqrt{(ax+xx)}}{x}$

258. Anm. Die Absicht bey diesem Verfahren ist die Irrationalgrösse wegzuschaffen; daher man sich hier solcher Kunstgriffe gebraucht wie bey den unbestimmten Aufgaben (Alg. 183.). Dergleichen lehrt auch Eul. Intr. in analys. inf. L. I. c. 3.

259. Die Differentiale die nur eine veränderliche Grösse enthalten, werden folgendergestalt abgetheilt. Wenn eine Grösse unterschiedene Glieder enthält, in deren einem oder mehrern die veränderliche Grösse befindlich ist, und aus dieser zusammengesetzten Grösse, eine Wurzel gezogen wird, so heisst man das hier eine Irrationalgrösse; und wenn dergleichen in einem Differentiale vorkommt, ist es ein irrationales Differential.

Wie in 248; wenn p ein Bruch ist, und in den folgenden Absätzen.

Enthält das Differential keine solche zusammengesetzte Irrationalgrösse, so heisst es rational.

Wie das (248) wenn p eine ganze Zahl, bejaht oder verneint wäre.

Hiebey hindert nichts, daß in einem Differentiale Theile vorkommen, wo aus der veränderlichen Grösse eine Wurzel gezogen ist, wenn solche

solche Theile nur keine zusammengesetzten Grössen sind. So ist in (208) das Element der Fläche der Parabel ein rationales Differential, denn das Verfahren nach 203. V; ist einerley, $m - 1$ mag eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn.

260. Wenn eine rationale Function ein Quotient ist, wo sich die veränderliche Grösse im Divisor befindet, so heisst sie eine gebrochne. Ist die veränderliche Grösse nicht im Divisor, eine ganze.

So wäre $\frac{a+bx}{c+fx^2}$ eine gebrochne Function, aber $\frac{m+nx}{g}$ eine ganze.

Wenn die ganze Function mit dx multiplicirt ist, so hat die Integration keine Schwürigkeit. Bey einer gebrochnen Function aber sind Kunstgriffe nöthig die unten (347 u. f.) vorkommen werden.

261. Irrationale Differentiale, sucht man in rationale zu verwandeln (wie 248) und wenn alsdenn gebrochne Functionen vorkommen bedient man sich der nur erwähnten Kunstgriffe.

Von der verkehrten Methode der Tangenten.

262. Erkl. Man heisst die verkehrte Methode der Tangenten das Verfahren, da man aus gegebenen Eigenschaften der Tangenten oder

Normal-

Normallinien u. s. w. einer krummen Linie, die Gleichung für die krumme Linie findet.

263. Aufg. Eine krumme Linie zu finden, deren Subtangente $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{r+x}$ ist.

Aufl. Also ist $(r+x)\,dx = ydy$ oder $rx + \frac{1}{2}xx = \frac{1}{2}y^2 +$ Const. Sollen x und y zugleich $= o$ seyn, so ist Const $= o$ und $2rx + xx = yy$ und die krumme Linie ist eine gleichseitige Hyperbel (Alg. 417.) wo (Alg. 389.) $b = a = 2r$.

264. Aufg. Eine krumme Linie zu finden, deren Subnormallinie unveränderlich ist.

Aufl. Weil $\frac{ydy}{dx} = a$ so ist $ydy = adx$ folglich $\frac{1}{2}yy = ax +$ Const. Gesetzt nun, es soll $y = cc$ für $x = o$ seyn: So ist $\frac{1}{2}cc = o +$ Const; oder Const $= \frac{1}{2}cc$; und $yy = 2ax + cc$. Man setze $x = u + e$ also $yy = 2au + 2ae + cc$; und nehme $e = -\frac{cc}{2a}$ so ist $yy = 2au$. Man kann also die allgemeinste Gleichung, die aus der Integration gefunden ward, $yy = 2au + 2ae + cc$, allemahl auf $yy = 2au$ eine Gleichung für eine Parabel, deren Parameter $2a$ wäre, bringen. Folglich hat blos die Parabel diese Eigenschaft.

265.

265. Anm. Daß die Parabel diese Eigenschaft hat, ist schon (93) dargethan worden. Hier zeigt sich, daß diese Eigenschaft keiner andern krummen Linie zukömmt. Und so kann man vermittelst dieser Methode versuchen, welche von den Sätzen, die durch die vorhin (77; 92) gelehrte Methode: (methodus directa tangentium) gefunden worden sind, sich umkehren lassen.

Von der Rectification der krummen Linien.

266. Aufg. Das Differential des Bogens CM 1 F. einer gegebenen krummen Linie zu finden.

Aufl. Der Bogen CM heisse s, und wachse um das endliche Stück $MN = \Delta s$ indem die Abscisse AP um das endliche Stück $PQ = MS$ wächst. Nun ist Δs allemahl grösser als die Sehne MN oder $\frac{\Delta s}{\sqrt{(MS^2 + NS^2)}} = 1 + p$ daß p eine bejahte Grösse bedeutet. Aber p kann unendlich abnehmen, weil die Sehne MN ihrem Bogen so nahe kommen kann als man will, wenn man die Ordinate NQ unendlich nahe an PM rücken läßt.

(68) Die Gränze des Quotienten $\frac{\Delta s}{\sqrt{(MS^2 + NS^2)}}$ bey dieser unendlichen Näherung ist $\frac{ds}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ welches $= 1$ seyn muß, weil p kleiner als jede angebliche Grösse werden kann. Wäre diese Gränze $= 1 + q$ daß q eine angebliche Grösse bedeu-

bedeutete, so könnte p nicht kleiner als q werden. Daß die Gränze nicht kleiner als 1 ist, erhellt, weil $\frac{\Delta s}{\sqrt{(MS^2+NS^2)}}$ nicht kleiner als 1 werden kann. Also ist s eine solche Function von x und y, daß $ds = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Wenn man Mm für eine gerade Linie annimmt, wo $MR = dx$; $Rm = dy$ ist, so ist $Mm = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$. So trägt man den Beweis insgemein vor.

267. Aufg. Die Länge s einer gegebenen krummen Linie zu finden.

Auflage. Aus der Gleichung drucke man $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ durch x, dx, oder durch y, dy, allein, wo möglich, aus, und integrire solches. Das Integral muß s seyn (266).

268. Aufg. Eine Parabel für die $y^3 = axx$ ist, zu rectificiren.

Aufl. Weil $x = \frac{y^{3:2}}{\sqrt{a}}$ so ist $dx = \frac{3}{2}.dy\sqrt{\frac{y}{a}}$; also $ds^2 = dy^2.\left(\frac{1+9.y}{4.a}\right) = dy^2.\left(\frac{4a+9.y}{4a}\right)$: Daher $2.\sqrt{a}.ds = \sqrt{(4.a+9.y)}.dy$

Man vergleiche das Differential das rechter Hand steht, mit (245) und setze

	p	X	a	dX	c
dorten	$\frac{1}{2}$	9y	4a	9.dy	$\frac{1}{9}$
hie					

so kömmt das Integral $= \frac{2}{27}.(4a+gy)^{3:2}$ + Const

Soll nun die Länge der krummen Linie anfangen wo $y = 0$; so ist das gefundene Integral auch $= 0$ für die Ordinate $= 0$; folglich Const $= \frac{-2.8.a\sqrt{a}}{27}$ also $s = \frac{1}{27}.\left((4a+9.y).\sqrt{\left(\frac{4a+9y}{a}\right)}-8.a\right)$

269. Weil $y = \sqrt[3]{ax^2}$; so gehört jeder Abscisse nur eine mögliche Ordinate; Alle Ordinaten sind bejaht, Einer verneinten Abscisse gehört eine Ordinate, so groß als der entgegengesetzten bejahten ihre. So streckt sich die krumme Linie vom Anfange der Abscisse, auf einer Seite der Abscissenlinie, über bejahte und verneinte Abscissen ins Unendliche.

Die gefundne Länge, s, geht also vom Anfange der Abscissen, bis an die angenommene Ordinate, in einem der beyden Schenkel, dem welcher den bejahten, oder dem welcher den verneinten Abscissen gehört. Will man die Länge für ein gegebenes x haben, so darf man nur die Ordinate berechnen welche dieser Abscisse gehört.

270. Anm. Man heißt diese Parabel die neilische. Wilhelm Neil hat ihre Rectification gefunden und 1657 bekannt gemacht. Es ist, so viel man weiß die erste krumme Linie, die rectificirt worden ist. S. Wallisens Brief an Hugen, der sich bey Wallisens Schrift von

von der Cycloide befindet. Wallis. Op. Math. Vol. I. p. 551. Unter den Erläuterungen über Carteſens Geometrie 517. S. findet ſich Heinrich v. Hevraet Schreiben von Verwandelung krummer Linien in gerade, an Franz v. Schooten, 1659 aufgeſetzt, wo Hevraet eben dieſe Parabel zum Exempel ſeiner Methode anführt. Neils Erfindung iſt ihm vermuthlich unbekannt geweſen. S. unten 559.

271. I. Einer Apolloniſchen Parabel Parameter ſey $= b$, Abſciſſe vom Scheitel auf der Axe $= u$; Ordinate $= z$, alſo $z^2 = b.u$, der Parabel Fläche $= \frac{2}{3}.u.\sqrt{(b.u)}$

II. Ich ſuche eine krumme Linie, deren Coordinaten x; y; ſind und deren Länge s ſich wie die Fläche der Parabel verhalten ſoll, alſo, wenn g eine unveränderliche Gröſſe bedeutet $g.ds = du.\sqrt{bu}$. III. Daher $g^2.(dx^2 + dy^2) = b.u.du^2$;

IV. Ich ſetze $y = u - e$, $dy = du$, alſo $g^2.dx^2 = (b.y + b.e - g^2).dy^2$

V. Hie ſetze ich $b.e = g^2$ So kömmt $g.dx = b^{\frac{1}{2}}.y^{\frac{1}{2}}.dy$ und wenn der geſuchten Linie Coordinaten beyde zugleich verſchwinden ſollen $g.x = \frac{2}{3}.y.\sqrt{b.y} = \frac{2}{3}.\left(u - \frac{g^2}{b}\right).\sqrt{\left(\left(u - \frac{g^2}{b}\right).b\right)}$

VI. Stellt man ſich alſo die halbe Parabel über ihrer Axe vor, ſo nehme man von ihrem Scheitel, auf der Axe $\frac{g^2}{b}$, da iſt die krumme Linie in der Axe; Nimmt man von dieſem Puncte auf der

Axe als Abscisse der krummen Linie y; so gehört derselben als Ordinate $x = \frac{2.y}{3.g} \sqrt{b.y}$.

Diese Ordinate über die Abscisse genommen giebt den Schenkel der krummen Linie, dessen Länge sich wie die Fläche der obern Hälfte der Parabel verhält, und wenn man die Ordinate unter die Axe nimmt, giebt sich der Schenkel für der Parabel untere Hälfte.

VII. Als Probe der Rechnung hat man (V) $g.dx = \left(u - \frac{g^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{b.du}$ daraus $g^2.(dx^2 + du^2) = u.b.du^2$; Folglich $g.s = \frac{2}{3}.u.\sqrt{(b.u)} = \frac{2}{3}.\left(y + \frac{g^2}{b}\right).\sqrt{\left(b.\left(y + \frac{g^2}{b}\right)\right)}$

VIII. Aus (VI) ist $\frac{9.g^2}{4.b}.x^2 = y^3$ Soll der Coefficient linker Hand $= g$ seyn (II) so ist $\frac{9}{4}.b = g$. Das giebt bey diesem angenommenen Verhalten der unveränderlichen Grössen eine durch die andre.

IX. Setzt man $g = a$ so kömmt die Gleichung (271)

272. I. Man findet also die Länge der neilischen Parabel, für jede ihre Ordinate y, weil man

man die Fläche der koniſchen Parabel für jede ihre Abſciſſe $u = y + \frac{g^2}{b}$ weiß.

II) In (271; VII) hat man $g^2 . s^2 = \frac{4}{3} . b . \left(y + \frac{g^2}{b}\right)^3$ eine algebraiſche Gleichung zwiſchen unbeſtimmter Abſciſſe, und Länge der krummen Linie.

So was nennt man unbeſtimmte algebraiſche Rectification einer krummen Linie, wie in (209; IV) Quadratur.

III) Hat man einer krummen Linie algebraiſche Quadratur, eine algebraiſche Gleichung zwiſchen ihrer unbeſtimmten Abſciſſe $= u$; und der zugehörigen Fläche $= Q$; ſo dividire man die Fläche, durch eine willkührliche unveränderliche gerade Linie $\frac{Q}{g}$, der Quotient iſt dann auch algebraiſch durch u gegeben.

Dieſer Quotient kann alſo Länge einer krummen Linie bedeuten. Dieſe Länge iſt gewiß durch u algebraiſch gegeben, und es kömmt darauf an, der geſuchten krummen Linie zu u gehörige Coordinate anzugeben.

IV. Wie man es bey der Parabel macht, wenn man (267) brauchen will zeigt (271), Neil,

mußte anders verfahren. Hevrael verzeichnete eine krumme Linie, und wies was ihre Rectification für eine Quadratur erfoderte.

Quadraturen und Rectificationen, die zum Kreise gehören.

273. Aufg. Das Stück der Kreisfläche CDMP 17 F. zu quadriren, wo CP = x, PM = y; CD = CA = 1.

Aufl. Weil $y = \sqrt{(1 - xx)}$ also $ydx = dx\sqrt{(1 - xx)}$ so mache man die Reihe $\sqrt{(1 - xx)} = (1 - xx)^{\frac{1}{2}}$. Ein allgemeines Gesetz dieser Reihe findet man aus 51 wenn dort $n = 2$ gesetzt wird. Da sind die Coefficienten von $(1 + y)^{\frac{1}{2}}$; folgende, die erste 1 nicht mitgerechnet,

$$\frac{1}{2}; -\frac{1}{8}; -\frac{1}{8} - \frac{3}{3.2} = +\frac{1}{16}; +\frac{1}{16} \cdot -\frac{5}{4.2} = -\frac{5}{128}; -\frac{5}{128} \cdot \frac{7}{5.2}$$

$$= \frac{+7}{256}$$ und so der $r$te Coefficient

$$\frac{1. - 1. - 3. \ldots\ldots - (2r-3)}{1. \quad 2. \quad 3. \ldots\ldots r. \, 2^r}$$ Es ist aber $2r-3$ die $r-1$te ungerade Zahl, (wie man aus Alg. 38 findet, wenn man das dortige $2m+1$ hier

hier $= 2r - 3$ ſetzt); und der rte Coefficient iſt bejaht oder verneint, nachdem die Zahl ſeiner verneinten Factoren, d. i. nachdem $r - 1$ gerade oder ungerade iſt. Um alſo was beſtimmtes zu haben, ſo ſetze man, er ſoll bejaht, alſo $r - 1 = 2t$ und $r = 2t + 1$ ſeyn, ſo iſt $2r - 3 = 4t + 2 - 3 = 4t - 1$ und der rte oder $2t + 1$ te Coefficient $=$

$$+ \frac{1.1.3.5.\ldots\ldots(4t-1)}{1.2.3.4.\ldots\ldots(2t+1)2^{2t+1}} = P;$$

Alſo der folgende $(2t+2)$ te $= Q =$

$$\frac{P.-(2r-1)}{2.(r-1)}(51) = P.\frac{-(4t+1)}{2.(2t+2)} =$$

$$-\frac{P.(4t+1)}{2.(2t+2)}$$

Wenn man nun $(1 - xx)^{\frac{1}{2}}$ macht, ſo wird der erſte Coefficient in $- xx$; der zweyte in $+ x^4$; der dritte in $- x^6$; und ſo der rte in $(- x^2)^r$. oder der $(2t + 1)$ te in $(- x^2)^{2t+1}$ d. i. in $- x^{4t+2}$ multiplicirt, der $r + 1$ te oder $(2t + 2)$ te in $(- x^2).^{2t+2} = + x^{4t+4}$. Alſo wird jeder Coefficient, der in $(1 + y)^{\frac{1}{2}}$ bejaht iſt, in eine verneinte Gröſſe, und jeder verneinte in eine bejahte multiplicirt. Die Producte werden alſo alle verneint, und es iſt

$$\sqrt{(1 - xx)} = 1 - \tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{16}x^6 - \tfrac{5}{128}x^8 - \tfrac{7}{256}x^{10} \ldots$$

$$- \frac{1.1.3.5.\ldots\ldots(4t-1).x^{4t+2}}{1.2.3.4.\ldots\ldots(2t+1)2^{2t+1}}$$

$$-\frac{P.(4t+1)}{2.(2t+2)}.x^{4t+4}....$$

Wenn man nun hier jedes Glied mit dx multiplicirt und integrirt, so erhält man:

$$\int dx\sqrt{(1-xx)} = x - \frac{x^3}{2.3} - \frac{x^5}{8.5} - \frac{x^7}{16.7}$$

$$- \frac{5x^9}{128.9} - \frac{7x^{11}}{256.11}....$$

$$- \frac{1.1.3.5.....(4t-1).x^{4t+3}}{1.2.3.4.....(2t+1).2^{2t+1}.(4t+3)}$$

$$- \frac{P.(4t+1).x^{4t+5}}{2.(2t+2).(4t+5)}.....$$

Wo die allgemeinen Glieder wegen des Gesetzes des Fortganges zu merken sind. Die Const ist hier und in der Folge = o weil das Integral mit den Grössen, nach denen die Reihen fortgehen, wie hier x, in (275) u ist, verschwinden. Diese Reihe gibt ein Stück DCPM bald ziemlich genau, wenn x klein ist.

Wenn man in ihr x = 1 setzt, so bekömmt man den Innhalt des Quadranten DCA = $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112}.....$

274. Das Stück CDMP besteht aus dem Ausschnitte MCD und dem Dreyecke CMP; Es ist also $\frac{1}{2}$ Bog DM + $\frac{x\sqrt{(1-x^2)}}{2}$; des Bo-

gens

gens DM Sinus für den Halbmesser = 1, ist x; dieser Bogen heisse δ; So ist CDMP = ½δ + ¼. sin 2δ (Trig. 19. S. 5. Zus.) Folglich $\int \sqrt{(1-x^2)}\, dx = \int \cos\delta . d\sin\delta = \frac{1}{4}.(2\delta + \sin 2\delta)$

275. Aufg. Den Abschnitt APM zu quadriren, wo AP = u = 1 − x (273.)

Aufl. Hier ist $y = \sqrt{(2u - uu)}$ also das Element des Abschnitts $= du\sqrt{(2u-uu)}$. Dieses zu integriren muß die Irrationalgrösse in eine unendliche Reihe verwandelt, und denn wie in (273) verfahren werden. Diese Verwandelung bequem zu verrichten, erwege man, daß die Irrationalgrösse $= \sqrt{2u}.\sqrt{(1 - \frac{1}{2}u)}$. Man suche also nur die unendliche Reihe für den letzten Factor; diese hat man aus (273), wenn man statt des dortigen xx, hier ½ u schreibt. Sie wird also

$$1 - \frac{1}{4}u - \frac{1}{8.4}.u.u - \frac{1}{16.8}.u^3 - \frac{5}{128.16}.$$

$$u^4 - \frac{7}{256.32}.u^5 ..... - P.(\tfrac{1}{2}u)^{2.t+1}$$

$$- Q.(\tfrac{1}{2}.u)^{2.t+2} ....$$

Folglich ist $\sqrt{(2.u - u - u)} = \sqrt{2}.\sqrt{(u - \frac{1}{2}.u^2)} = \sqrt{2}.(u^{1:2} - \frac{1}{4}.u^{3:2} - \frac{1}{8.4}u^{5:2} - \frac{1}{16.8}u^{7:2} - \frac{5}{128.16}.$

$$u^{9:2} ..... - \frac{P}{2^{2.t+1}}.u^{(4t+3):2} - \frac{Q}{2^{2.t+2}}.u^{(4t+5):2} ....)$$

Jedes Glied dieser Reihe

mit du multiplicirt und integrirt giebt die Fläche

$$APM = \sqrt{2}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{7}\cdot u^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{8.4}\cdot\frac{2}{9}\cdot u^{\frac{9}{2}}\right.$$

$$- \frac{1}{16.8}\cdot\frac{2}{9}\cdot u^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{128.16}\cdot\frac{2}{11}\cdot u^{11:2}\ldots.$$

$$- \frac{P}{2^{2t+1}}\cdot\frac{2}{4^t+5}\cdot u^{(4t+5):2} - \frac{Q}{2^{2t+2}}\cdot$$

$$\left.\frac{2}{4^t+7}\cdot u^{(4t+7):2}\ldots.\right)$$ Man sieht gleich, daß sich jede zwey folgende Glieder der Reihe so ausdrücken lassen, wenn P einen Coefficienten, für den r ungerade ist, (273) bedeutet:

$$-\frac{P}{2^{2t}}\cdot\frac{u^{(4t+5):2}}{4t+5} - \frac{Q}{2^{2t+1}}\cdot\frac{u^{(4t+7):2}}{4t+7}$$ Daher denn auch für diese Reihe ein allgemeines Gesetz dargethan ist.

276. Man kann sie auch so ausdrücken:

$$2\sqrt{2}\,u.\left(\frac{1}{3}u - \frac{1}{4.5}u^2 - \frac{1}{8.4.7.}u^3\right.$$

$$- \frac{1}{16.8.9}u^4 - \frac{5}{128.16.11}u^5\ldots.$$

$$\left.\ldots. - \frac{P.u^{2t+2}}{2^{2t+2}.(4t+5)} - \frac{Qu^{2t+3}}{2^{2t+2}.(4t+7)}\cdots\right).$$

277. Wenn z; v; als Ordinate und Abscisse eines Kreises, dessen Halbmesser r ist, einem Bogen

Bogen zugehören, der dem Bogen AM 17 F. ähnlich ist; so ist $z = ry$; $v = ru$; $dv = rdu$ (Trig. 1. S.) also das Element des ähnlichen Abschnittes in diesem Kreise $= zdv = ry.rdu = rr.ydu$; und folglich der Abschnitt der in diesem Kreise einem Bogen zugehört, der dem Bogen AM ähnlich ist; $= rr\int ydu$; Man findet ihn also, wenn man $\frac{v}{r}$ statt u setzt, aus 276 folgendergestalt:

$$2rr.\sqrt{\frac{2v}{r}}.\left(\frac{1}{3}.\frac{v}{r}-\frac{1}{4.5}.\frac{vv}{rr}-\frac{1}{8.4.7}.\left(\frac{v}{r}\right)^3-\frac{1}{16.8.9}.\left(\frac{v}{r}\right)^4-\frac{5}{128.16\,11}.\left(\frac{v}{r}\right)^5\ldots.-\frac{P}{2^{2t+1}.(4t+5)}.\left(\frac{v}{r}\right)^{2t+2}-\frac{Q}{2^{2t+2}.(4t+7)}.\left(\frac{v}{r}\right)^{2t+3}\ldots.\right)$$

278. Man setze nun den Durchmesser $= 1$ also $r = \frac{1}{2}$; so ist $2rr\sqrt{\frac{2v}{r}} = \frac{1}{2}\sqrt{4v} = \sqrt{v}$; und die Fläche wird

$$\sqrt{v}.\left(\frac{2}{3}v-\frac{1}{5}vv-\frac{1}{4.7}.v^3.-\frac{1}{8.9}.v^4-\frac{1}{64.11}.v^5\ldots..-\frac{2P}{4t+5}.v^{2t+2}-\frac{2Q}{4t+7}.v^{2t+3}\ldots.\right)$$

279.

279. Man kann in der Reihe (273) jedes Glied durch das vorhergehende ausdrucken, das wo $4t+3$ der Exponent von x ist sey $= \zeta$; und das folgende $= \vartheta$; so ist $P = \frac{-(4t+3)\zeta}{x^{4t+3}}$ welcher Werth von P im folgenden Gliede gebraucht $S = \frac{(4t+3).(4t+1)}{2.(2t+2).(4t+5)} \cdot \zeta x^2$ giebt; welches verneint ist, weil ζ verneint ist.

Exempel. Wenn $4t+3 = 7$ also $t = 1$ und $\zeta = \frac{-x^7}{16.7}$ so ist $\vartheta = \frac{7.5}{2.4.9} \cdot \frac{-x^7}{16.7} \cdot xx = -\frac{5}{128.9} x^9$. Dieses dient, daß man nicht jedes Glied von neuem berechnen darf, sondern aus jedem berechneten das nächstfolgende finden kann.

280. Eben so in 277; wenn in der Reihe, die in $2rr\sqrt{\frac{v}{r}}$ multiplicirt wird; das Glied, dessen Exponent $2t+2$ ist ζ; das folgende ϑ heisst; so ist $P = 2^{t+1}.(4t+5).\left(\frac{v}{r}\right)^{-2t-2}.\zeta$ und weil $Q = \frac{-P.(4t+1)}{2.(2t+2)}$ (293) so ist

$= \vartheta$

$$\vartheta = \frac{(4t+5).(4t+1)}{4.(2t+2).(4t+7)}\,\zeta.\frac{v}{r}.$$

Exempel. Wenn $\zeta = -\frac{1}{16.8.9}.\left(\frac{v}{r}\right)^4$

also $t = 1$ so ist $\vartheta = \frac{9.5}{4.4.11}.-\frac{1}{16.8.9}.$

$$\left(\frac{v}{r}\right)^4.\frac{v}{r} = \frac{-5}{128.16.11}.\left(\frac{v}{r}\right)^5.$$

281. Aufg. Es sey 17 F. CA $= r$; PM $= s$; AM $= a$ welches hier eine veränderliche Grösse bedeuten. Man soll den Bogen a aus seinem Sinus s finden.

Aufl. $AP = r - CP = r - \sqrt{(rr-ss)}$

also $dAP = Pp = MR = \frac{-s\,ds}{\sqrt{(rr-ss)}}$ und

(266) $da = \sqrt{\left(ds^2 + \frac{s.s.ds^2}{r^2-s^2}\right)} = \frac{r\,ds}{\sqrt{(rr-ss)}}$

oder das Differential eines Bogens ist ein Product aus dem Halbmesser in das Differential des Sinus, mit dem Cosinus dividirt; welche Formel von häufigem Gebrauche ist.

Also ist $da = \frac{r.ds}{r.\sqrt{\left(1-\frac{ss}{rr}\right)}}$

$= ds.\left(1-\frac{s.s}{r.r}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Die Irrationalgrösse

wird

wird aus (52) in eine Reihe verwandelt. Man setzt statt

dorten	y	e	r
hie	$\frac{-s.s}{r.r}$	2	n

Nun sind in (52) alle Coefficienten, die zu ungeraden Potenzen von y d. i. hier von $\frac{-ss}{rr}$ gehören, verneint, alle aber, die zu geraden von y oder hier von $\frac{-ss}{rr}$ gehören, bejaht. Das erhellt daraus, weil in 52 ist gewiesen worden, daß jeder folgende Coefficient dem vorhergehenden entgegengesetzt ist, zu y aber gehört ein verneinter. Da nun hier die ungeraden Potenzen von $\frac{-ss}{rr}$ verneint, die geraden bejaht sind, so ist jedes Glied der Reihe ein Product aus zwo verneinten, oder zwo bejahten Grössen, und folglich allemahl bejaht. Daher sieht die Reihe so aus

$$1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{ss}{rr} + \frac{1.3.}{1.2.4}\cdot\left(\frac{ss}{rr}\right)^2 + \frac{1.3.5}{1.2.3.8}\cdot\left(\frac{ss}{rr}\right)^3 + \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.16}\cdot\left(\frac{ss}{rr}\right)^4 \frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5.32}\cdot\left(\frac{ss}{rr}\right)^5 \ldots.$$

$$+\frac{1.3.5.\ldots\ldots 2n-1}{1.2.3.\ldots\ldots n.\,2^n}\cdot\left(\frac{ss}{rr}\right)^n$$

$$+\frac{P.(2n+1)}{(n+1).2}\cdot\left(\frac{ss}{rr}\right)^{n+1}+\ldots\ldots,$$

Wenn man hier jedes Glied mit ds multiplicirt, und integrirt; und Conſt = o ſetzt, weil a und s zugleich = o ſind, ſo erhält man

$$a=s+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{s^3}{r^2}+\frac{1.3}{1.2.4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{s^5}{r^4}$$

$$+\frac{1.3.5}{1.2.3.8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{s^7}{r^6}+\frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.16}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{s^9}{r^8}$$

$$+\frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5.32}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{s^{11}}{r^{10}}\cdot\ldots\ldots$$

$$+\frac{1.3.\ldots\ldots 2n-1}{1.2.\ldots\ldots n.2^n}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{s^{2n+1}}{r^{2n}}$$

$$+\frac{P.(2n+1)}{(n+1).2.(2n+3)}\cdot\frac{s^{2n+2}}{r^{2n+2}}\cdot\ldots\ldots$$

welche Reihe alſo wieder durch ein allgemeines Geſetz gegeben iſt.

Wenn das Glied, deſſen Exponent $2n+1$ iſt; ζ; und das folgende ϑ heiſſt; ſo iſt

$P=(2n+1).\left(\frac{s}{r}\right)^{-2n}\cdot\frac{\zeta}{s}$ daraus findet ſich

$$\vartheta=\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}\cdot\zeta.\left(\frac{s}{r}\right)^2$$

Exem-

Exempel. Wenn $2n - 1 = 9$ also $n = 4$; so ist

$$\vartheta = \frac{9.9}{10.11} \cdot \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.16} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{s^9}{r^8} \cdot \frac{ss}{rr}$$

$$= \frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5.32} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{s^{11}}{r^{10}}$$

282. Wenn das erste Glied der Reihe A, das zweyte B, das dritte C u. s. w. heisst, so ist für

$n = 0;\quad 1;\quad 2;\quad 3;$
$\zeta = A;\quad B;\quad C;\quad D;$

$$\vartheta = \frac{1.1}{2.3} \cdot \frac{A.ss}{rr};\ \frac{3.3}{4.5} \cdot \frac{B.ss}{rr};\ \frac{5.5}{6.7} \cdot \frac{C.ss}{rr};\ \ldots.$$ also die Reihe; wenn $r = 1$

$$a = s + \frac{1.1}{2.3};\ ss.A + \frac{3.3.ss}{4.5}B + \frac{5.5.ss}{6.7} \cdot C + \frac{7.7.ss}{8.9} \cdot D + \frac{9.9.ss}{10.11}E \ldots.$$

283. Für $r = 1$; ist $\frac{a}{s}$

$$= 1 + \frac{As}{6} + \frac{3.3.B.s}{4.5} \ldots.$$ Dieser Quotient wird am grössten, wenn die Reihe, die ihm gleich ist, am grössten wird. Weil aber dieser Reihe

Reihe Glieder alle bejaht sind, so ist sie am grössten, wenn s am grössten, oder = 1 ist; da denn a dem Bogen von 90 Gr. gleich wird. Also giebt der Bogen von 90 Gr. durch seinen Halbmesser dividirt, einen grössern Quotienten, als jeder andere Bogen, durch seinen Sinus dividirt.

Der grösste Sinus ist = 1 also ist der grösste Bogen den die Reihe giebt, der Quadrant = $1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{40} \ldots$ wo der Werth dem sich die Reihe unendlich nähert aus Ludolphs von Cöln Zahlen = 1,5707.... ist. (Geom. 44. Satz) Zugleich grösster Bogen, und grösster Quotient eines Bogens durch seinen Sinus.

Es versteht sich daß hie nur die Bogen betrachtet wreden die von 0 bis zum Quadranten wachsen. Begreiflich giebt der Bogen von 150 Graden mit seinem Sinus dividirt fünfmahl soviel als der Bogen von 30 Graden mit ebendem Sinus dividirt, und wenn die Bogen über den Quadranten bis zum Halbkreise wachsen, nehmen ihre Sinus bis an Nichts ab und die Quotienten wachsen ins Unendliche. Von solchen ist hie nicht die Rede.

284. Wenn man $a = \frac{1}{2} b$; $s = \frac{1}{2} c$ setzt, so giebt sich der Bogen b durch seine Sehne c; aus (281) folgendergestalt

$$b = c + \frac{c^3}{24} + \frac{3 \cdot c^5}{640} \ldots .$$

285. Aufg. Aus dem Bogen a; den Sinus s zu finden. Ich will dabey r = 1 setzen.

Aufl. Man könnte zu dieser Absicht nur die Reihe (281) umkehren. Sie ist nähmlich $a = s + hs^3 + is^5 \ldots$, wo h; i; u. s. w. die gegebenen Coefficienten sind, wenn man nun in Alg. 690. statt des dortigen x; y; λ; δ;

hier a; s; 1; 2;

setzet, so erhellt, daß die umgekehrte Reihe $s = Aa + Ba^3 \ldots$ ist wo man die Coefficienten A; B; ... bestimmen müsste. Dieses geschähe so, daß man statt s; s^3; u. s. w. die nur angenommene Reihe setzt; folgendergestalt

$$\left.\begin{array}{l} a = s = Aa + Ba^3 + C \\ + \frac{1}{6}s^3 = \quad + \frac{1}{6}A^3 + \frac{1}{6}.3AAB \\ + \frac{3}{40}s^5 \quad\quad = \frac{3}{40}A^5 \end{array}\right\} a^5$$

Also A = 1; und weil die folgenden Glieder alle = 0 seyn müssen, $B = -\frac{1}{6}$; $C = +\frac{1}{12} - \frac{3}{40} = +\frac{1}{120}$ u. s. w. also giebt dieses $s = a - \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{120}a^5 \ldots\ldots$

So pflegt man insgemein diese Aufgabe aus der vorhergehenden herzuleiten. Dazu nun muß man hohe Potenzen der Reihe $Aa + Ba^2 \ldots$ machen, wenn man viel Coefficienten derselben haben will; und ausserdem daß dieses eine sehr mühsame Rechnung erfodert, so sehe ich nicht, wie sich daraus ein allgemeines Gesetz für die Coefficienten A, B, ... zuverlässig bestimmen lässt, weil die höhern Glieder der Potenzen der

unend-

unendliche Reihen, aus denen man die folgenden Coefficienten bestimmen muß, gar zu sehr zusammengesetzt werden. Ich will also von diesem Verfahren hier nichts beybehalten als die Gestalt der Reihe, die man für s annehmen muß. Ich will nähmlich setzen

$$s = a + \alpha a^3 + \beta a^5 + \gamma a^7 \ldots + \pi a^{2n-1} + \varrho a^{2n+1} + \sigma a^{2n+3} \ldots .$$

Ich nehme da unveränderlich an, und finde

$$\frac{ds}{da} = 1 + 3\alpha a^2 + 5\beta a^4 + 7\gamma a^6 \ldots + (2n-1)\pi a^{2n-2} + (2n+1)\varrho a^{2n} + (2n+3)\sigma a^{2n+2}$$

und

$$\frac{dds}{da^2} = * + 3.2\alpha a + 5.4.\beta a^3 + 7.6.\gamma a^5 \ldots + (2n-1).(2n-2)\pi a^{2n-3} + (2n+1).2n.\varrho a^{2n-1} + (2n+3).(2n+2).\sigma a^{2n+1}$$

Nun ist (281) $\frac{ds^2}{da^2} = 1 - ss$; also $\frac{2dsdds}{da^2} = -2sds$ oder $\frac{dds}{da^2} = -s$

Folglich

$$3.2\alpha a + 5.4.\beta a^3 + 7.6.\gamma a^5 \ldots + (2n+1).2n.\varrho a^{2n-1} + (2n+3).(2n+2)\sigma a^{2n+1} =$$

$$= - a - \alpha a^3 - \beta a^5 \ldots - \pi a^{2n-1} - \varrho a^{2n+1} \ldots$$

Wenn man hier die Coefficienten bey einerley Potenz von a gleich setzt, so erhält man

$$\alpha = \frac{-1}{3.2}; \beta = \frac{-\alpha}{5.4}; \gamma = \frac{-\beta}{7.6} \ldots$$

$$\varrho = \frac{-\pi}{(2n+1).2n}; \sigma = \frac{-\varrho}{(2n+3).(2n+2)}$$

wo das Gesetz des Fortganges deutlich in die Augen fällt. Jeder Coefficient ist dem vorhergehenden entgegengesetzt, und also wechseln bejahte und verneinte ab. Also ist, wenn man jeden Coefficienten mit seinem Zeichen nimmt, daß $\alpha =$

$$-\frac{1}{3.2}; \beta = -\left(\frac{1}{3.2}\right); 5.4 = \frac{+1}{5.4.3.2}$$

u. s. w.

$$s = a - \frac{1}{3.2}a^3 - \frac{\alpha}{5.4}a^5 - \frac{\beta}{6.7}a^7 \ldots$$

$$\frac{-\pi}{(2n+1).2n}a^{2n+1} \frac{-\varrho}{(2n+3).(2n+2)}.a^{2n+3}$$

π gehört zum Exponenten $2n-1$;

So gehören zusammen

$$2n-1 = \left|\begin{matrix}3\\ +\frac{1}{3.2}\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}5\\ -\frac{1}{5.4.3.2}\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}7\\ +\frac{1}{7.6.5.4.3.2}\end{matrix}\right.$$

$$\pi =$$

Jeder

Jeder folgende Coefficient kömmt nähmlich heraus, wenn man den vorhergehenden durch ein Product, aus dem Exponenten, zu dem der folgende gehört, in die nächst kleinere Zahl dividirt. Da nun die Exponenten die ungeraden Zahlen nach der Reihe sind, so ist der Divisor jedes Coefficienten ein Product aus allen ganzen Zahlen nach der Reihe, von dem Exponenten an, dem er zugehört. Also ist überhaupt

$$\pi = \frac{\pm 1}{(2n-1).(2n-2).(2n-3)\ldots.2};$$

ob aber π bejaht oder verneint ist, erhellt daraus: Wenn $2n-1$ die zweyte ungerade Zahl; 3; bedeutet, so ist π verneint, und also auch weil die Zeichen der Coefficienten abwechseln, verneint, wenn π die vierte, sechste u. s. w. ungerade Zahl bedeutet: Folglich bejaht, wenn es die dritte, fünfte, u. s. w. ungerade Zahl bedeutet. Aber für die dritte, fünfte, u. s. w. ungerade Zahl, oder für eine Zahl, deren Stelle unter den ungeraden Zahlen durch eine ungerade Zahl angedeutet wird, ist n ungerade; weil $2n-1$ die nte ungerade Zahl bedeutet. Man setze also n = einer ungeraden Zahl $= 2t+1$ so ist $2n-1 = 4t+1$ und

$$\pi = \frac{+1}{(4t+1).4t.(4t-1)\ldots 2}$$ Folglich der Coefficient bey dem Exponenten $2n+1$ oder $4t+3$; oder

$$\varrho = \frac{\overset{\backsim}{\ } - 1}{(4t+3).\ (4t+2).\ 4t+1 \ldots . 2}$$

und die drey Glieder, welche die Exponenten $2n - 1$; $2n+1$; $2n+3$ oder $4t+1$; $4t+3$; $4t+5$; haben, sind

$$\frac{+ a^{4t+1}}{(4t+1).\ 4t.\ (4t-1).\ldots . 2}$$

$$\frac{- a^{4t+3}}{(4t+3).\ (4t+2).\ (4t+1).\ 4t.\ldots . 2}$$

$$\frac{+ a^{4t+5}}{(4t+5).\ (4t+4).\ldots . 2}$$

Wenn diese drey nur gefundenen Glieder ζ; ϑ; η; heissen so ist $\pi = \zeta . a^{-4t-1}$ folglich $\vartheta = -\frac{\zeta a a}{(4t+1).\ (4t+3)}$ auch $\varrho = \vartheta . a^{-4t-3}$ und $\eta = \frac{-\vartheta . a . a}{(4t+5).\ (4t+4)}$. Man kann, diese Formel zu gebrauchen, zuerst $\frac{-\alpha}{5.4} . a^5 = \zeta$ setzen, da $t = 1$ ist. Heisst man nun die völligen Glieder, nicht die Coefficienten der Reihe s, nach der Ordnung;

$$a = A;\ -\frac{1}{2.3} a^3 = B \text{ u. s. w. so ist}$$

$$s =$$

$$s = a - \frac{Aaa}{2.3} - \frac{Baa}{4.5} - \frac{Caa}{6.7} - \frac{Daa}{8.9} - \frac{Eaa}{10.11} \ldots\ldots$$

286. Zuſ. Aus 284; wird hier $c = b - \frac{b^3}{24} + \frac{b^5}{1920} \ldots\ldots$

287. Aufg. Aus dem Querſinus (Sinus verſus) AP; den Bogen AM = a; zu finden.

Auflöſ. Es ſey AP = u; CA = 1 wie in 275; ſo iſt (nach Geom. 44. S. 8. Z.) der Abſchnitt $APM = a. \frac{1}{2} - \frac{(1 - u). \sqrt{(2u - uu)}}{2}$ alſo

2. $APM + (1 - u). \sqrt{2u}. \sqrt{(1 - \frac{1}{2}u)} = a$

Nun iſt (275)

$$\sqrt{2u}. \sqrt{(1 - \tfrac{1}{2}u)} = \sqrt{2u}. \Big(1 - \tfrac{1}{4}u - \frac{1}{8.4}.u^2 - \frac{1}{16.8}.u^3 - \frac{5}{128.16}u^4 - \frac{7}{256.32}.u^5 \ldots - \frac{P.u^{2t+1}}{2^{2t+1}} - \frac{Q.u^{2t+2}}{2^{2t+2}} \ldots\ldots\Big)$$

Dieſes multiplicirt mit $1 - u$ giebt

$$\sqrt{2}\,u.\left(1-\frac{5}{4}u+\frac{7uu}{8.4}+\frac{9u^3}{16.8}+\right.$$

$$\frac{11}{128.16}u^4+\frac{13}{256.32}.u^5\ldots$$

$$\left.+\frac{2P-Q}{2^{2t+2}}u^{2t+2}+\frac{2Q-R}{2^{2t+3}}.u^{2t+3}\ldots\right)$$

wo aus 273. $P=\frac{1.1.3.5\ldots.(4t-1)}{1.2.3.4\ldots(2t+1).2^{2t+1}}$

und $Q=\frac{P.(4t+1)}{2.(2t+2)}$ und $R=\frac{Q.(4t+3)}{2.(2t+3)}$

und $2P-Q=\frac{(4t+7).P}{2(2t+2)}$

$$2Q-R=\frac{(4t+9).Q}{2.(2t+2)}$$

also die beyden Glieder deren Exponenten $2t+2$ und $2t+3$ sind

$$+\frac{(4t+7).P.u^{2t+2}}{2^{2t+3}.(2t+2)}+\frac{(4t+9).Q.u^{2t+3}}{2^{2t+4}.(2t+3)}$$

auf die Zeichen der Coefficienten wird hier nicht gesehen, sondern sie werden alle als bejaht angenommen, weil sich durch jedes Multiplication mit der zugehörigen Potenz von $-\frac{1}{2}u$ das Zeichen des Products giebt, (275; 273;)

Zu dieser Reihe nun muß man 2. APM addiren, um a zu haben. Ich nehme 2. APM aus 276.

wo

wo man $4\sqrt{2u}$ in die Reihe $\frac{1}{3}u\ldots$ zu multipliciren hat. Um nun den gemeinschaftlichen Factor $\sqrt{2u}$ in beyde unendliche Reihen in $\frac{1}{3}u\ldots$ und in $1-\frac{1}{4}u\ldots$ zu multipliciren, so multiplicire ich bey $2APM$ sogleich 4 in alle Glieder der Reihe $\frac{1}{3}u\ldots$ dieses giebt

$$2.APM = \sqrt{2.u}.\left(\frac{4}{3}u-\frac{1}{5}uu-\frac{1}{8.7}u^3\ldots\right.$$
$$\left.-\frac{4P.u^{2t+2}}{2^{2t+1}.(4t+5)}-\frac{4Qu^{2t+3}}{2^{2t+2}.(4t+7)}\ldots\right)$$

dazu addire man die nur jetzo gefundene Reihe $\sqrt{2u}.(1-\frac{1}{2}uu)$; so bekömmt man, die Glieder, die einerley Potenz von u haben, zusammengerechnet:

$$a = \sqrt{2u}.\left(1+\frac{u}{12}+\frac{5u^3}{16.8.7}\ldots\right.$$
$$+\frac{5.7.u^4}{64.32.9}+\frac{63u^5}{256.32.11}\ldots.$$
$$+\frac{16tt+16t+3}{(2t+2).(4t+5)}.\frac{1}{2^{2t+3}}.P.u^{2t+2}$$
$$\left.+\frac{16tt+32t+15}{(2t+3).(4t+7)}.\frac{1}{2^{2t+4}}.Qu^{2t+3}\right.$$

288. Wenn das Glied der Reihe, dessen Exponent $2t-2$ ist, ζ; das folgende ϑ heisst, so ist $P=\frac{(2t+2).(4t+5).2^{2t+3}}{16tt+16t+3}.\zeta u^{2t-2}$

woraus Q nach 287 gemacht, und mit den gehörigen Gröſſen multiplicirt $\vartheta =$

$$\frac{(16tt+32t+15).(4t+5).(4t+1)}{(16tt+16t+3).(2t+3).(4t+7)4}\zeta u$$

giebt.

Ex. Wenn $t+1$ so ist $\vartheta = \frac{63.9.5.}{35.5.11.4.}$

$$\frac{5.7u^4.u}{64.32.9} = \frac{63u^5}{256.32.11}$$

289. Zuſ. Zu ſehen, ob ſich $16tt+32t+15$ in Factoren zerfällen läſſt, ſetze man es $=(4t+\alpha).(4t+\beta) = 16tt+4.(\alpha+\beta)+\alpha\beta$. Dieſes giebt $\alpha+\beta=8$; $\alpha\beta=15$ oder $\beta=\frac{15}{\alpha}$ ſoglich $\alpha+\frac{15}{\alpha}=8$ oder $\alpha\alpha=8\alpha-15$ oder $\alpha=4\pm\sqrt{(16-15)}$ das iſt, $\alpha=5$ oder 3; da alsdenn $\beta=3$ oder 5 wird, alſo iſt dieſe Gröſſe $=(4t+5).(4t+3)$. Eben ſo findet man $16tt+16t+3=(4t+1).(4t+3)$ alſo $\vartheta=\frac{(4t+5)^2}{(4t+7).(4t+6).2}.\zeta$

290. Wenn S der Binomialcoefficient iſt, der nach R folgt, alſo $S=\frac{R.(4t+5)}{2.(2t+4)}$ ſo iſt der Reihe $\sqrt{(1-\frac{1}{2}uu)}$ (287) Glied das nach dem folgt, deſſen Exponent $2t+3$ iſt,

2R

$\frac{2R-S}{2^{2t+4}} u^{2t+4}$ und das Glied der Reihe (276) das eben den Exponenten hat

$-\frac{R.u^{2t+4}}{2^{2t+3}.(4t+9)}$. Es ist ferner

$2R-S=\left(2-\frac{(4t+5)}{2.(2t+4)}\right)R=\frac{4t+11}{2.(2t+4)}$.

R rechnet man also die beyden Glieder der Reihen (287); (276) die den Exponenten 2t 4 haben, zusammen, so bekömmt man nach gehöriger Rechnung die wie 287; 289; bewerkstelliget wird, das Glied der Reihe 287; das eben den Exponenten hat $\frac{(4t+7).(4t+5)}{(2t+4).(4t+9)}.\frac{R}{2^{2t+5}}u^{2t+4}$

291. Wenn dieses Glied η heisst, und

$R=\frac{Q.(4t+3)}{2.(2t+3)}$ gesetzt wird, so ist

$\vartheta=\frac{(4t+5).(4t+3)}{(2t+3).(4t+7).2^{2t+4}}Qu^{2t+3}$

daraus findet man $\eta=\frac{(4t+7)^2}{(4t+9).(4t+8).2}$.

ϑ u wie in (288).

292. Wenn man die drey Glieder ϑ, ζ, η; (289; 291) mit einander vergleicht, wo wenigstens $t=1$ also 4 der kleinste Werth von $2t+2$; seyn

seyn muß, so erhellt aus ihnen ein allgemeines Gesetz der Reihe, welches für die 4 ersten Glieder auch durch die Rechnung richtig gefunden wird, wenn nähmlich die Glieder nach der Reihe $1 = A$; $\frac{1}{12} = B$ u. s. w. heissen, so ist

$$a = \sqrt{2}u\left(1 + \frac{1}{2.3.2}Au + \frac{3.3}{4.5.2}Bu + \frac{5.5}{6.7.2}Cu + \frac{7.7}{8.9.2}Du + \frac{9.9}{10.11.2}Eu \ldots\ldots\right)$$

293. Aufg. Aus dem Bogen a; den Quersinus u zu finden.

Aufl. Weil $a = u\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{u^3.\sqrt{2}}{12}$. (287);

so ist, wenn man diese Reihe umkehren will (Alg. 690.) das dortige; x; y; λ; δ
hier ; a; u; $\frac{1}{2}$; 1;

also $\frac{1}{\lambda} = 2$; $(1+\delta) : \lambda = 2 : \frac{1}{2} = 4$; folglich die umgekehrte Reihe

$$u = \alpha aa + \beta a^4 + \gamma a^6 .. + \pi a^{2n} + \varrho a^{2n+2} + \sigma . a^{2n+4} + \tau . a^{2n+6}$$

und $\frac{du}{da} = 2\alpha a + 4\beta a^3 + 6\gamma a^5 \ldots$
$+ 2n\pi a^{2n-1} + (2n+2)\varrho a^{2n+1}$
$+ (2n+4)\sigma a^{2n+3} + (2n+6)\tau a^{2n+5}$

und,

und, wenn da beständig angenommen wird,

$$\frac{ddu}{da^2} = 2\alpha + 4.3\beta aa + 6.5.\gamma a^4 \ldots$$
$$+ 2n.(2n-1).\pi a^{2n-2} + (2n+2)$$
$$(2n+1)\varrho a^{2n}$$
$$+ (2n+4).(2n+3)\sigma a^{2n+2}$$
$$+ (2n+6).(2n+5).\tau a^{2n+4} \ldots$$

Nun ist $da = \frac{ds}{\sqrt{(1-ss)}}$ (281) und $ss = 2u - uu$ also $sds = (1-u)\,du$ und $ds = \frac{1-u}{s}\cdot du$ aber $1 - ss = 1 - 2u + uu = (1-)^2$ also $da = \frac{(1-u)\,du}{\sqrt{(2u-uu)}\,(1-u)}$

oder

$$(2u - uu)\,da^2 = du^2;\ \frac{ddu}{da^2} = 1 - u =$$
$$1 - \alpha aa - \beta a^4 - \gamma a^6 \ldots - \pi a^{2n} - \varrho a^{2n+2}$$
$$- \sigma a^{2n+4} \ldots$$

Die Glieder, welche einerley Exponenten haben, in beyden Reihen, die $\frac{ddu}{da^2}$ ausdrucken, gleich gesetzt, giebt sich $a = \frac{1}{2}$; $\beta = -\frac{\alpha}{4.3} = -\frac{1}{4.3.2}$; $\gamma = \frac{-\beta}{6.5} = +\frac{1}{6.5.4.3.2}$ . . . .

$\varrho =$

$$\varrho = -\frac{\pi}{(2n+2).(2n+1)};$$

$$\sigma = \frac{-\varrho}{(2n+4).(2n+3)} \quad \tau = \frac{-\sigma}{(2n+6).(2n+5)}$$

Die Zeichen der Coefficienten wechseln ab, und der erste α der in der Reihe $= \alpha a a \ldots$ zum Exponenten 2 gehört, ist bejaht, also sind alle bejaht, die zu Exponenten 2; 2. 3; 2. 5; ... 2. (2t+1) (numeris pariter imparibus) gehören, und alle verneint, die zu Exponenten 2. 2; 2. 4; 2. 6; 2. 8. . . 2. 2t; (numeris pariter paribus) gehören. Es sey also $n = 2t$ so ist π verneint, ϱ bejaht, σ verneint, τ bejaht, u. s. w.

Nun nehme man ferner an, π sey ein Bruch, dessen Zähler $= 1$; der Nenner ein Product aus allen ganzen Zahlen, vom Exponenten an, dem π zugehört, sey; oder es sey

$$\pi = \frac{-1}{2n.(2n-1).(2n-2)\ldots 2} \text{ so ist}$$

$$\varrho = +\frac{1}{(2n+2).2n.(2n+1)\ldots 2} \text{ und}$$

$$\sigma = \frac{-1}{(2n+4).(2n+3).(2n+2)\ldots 2}$$

u. s. w. oder alle folgende Coefficienten sind auch solche Brüche, nur daß die Zeichen der Zähler abwechseln. Das Angenommene aber ist wahr, wenn

wenn $\pi = \beta$ und also die Folge durchgängig wahr. Also ist, $2t$ statt n gesetzt

$$u = \frac{aa}{2} - \frac{a^4}{4.3.2} + \frac{a^6}{6.5.4.3.2} \ldots$$
$$- \frac{a^{4t}}{4t.(4t-1)\ldots 2} + \frac{a^{4t+2}}{(4t+2).(4t+1).2}$$
$$- \frac{a^{4t+4}}{(4t+4).(4t+3)\ldots 2} \ldots$$

295. Wenn das erste Glied $\frac{aa}{2} = A$ das zweyte B u. s. w. heißt; so ist

$$u = \frac{aa}{2} - \frac{Aaa}{3.4} - \frac{Baa}{5.6} - \frac{Caa}{7.8} - \frac{Daa}{9.10} \ldots$$

296. Aufg. Aus dem Bogen $AM = a$ den Cosinus $CP = x$ zu finden.

Auflö. $da = \frac{ds}{\sqrt{(1-ss)}}$ (281) aber $\sqrt{(1-ss)} = x$, also $\frac{-sds}{\sqrt{(1-ss)}} = dx$ und $da = -\frac{dx}{s}$ oder $-sda = dx$. Nun ist aus (285) $dx = -ada + \frac{1}{3.2}a^3da$
$$- \frac{1}{5.4.3.2}a^5da + \frac{2}{6.7.5.4.3.2}a^7da \ldots$$

$$- \frac{1}{(4t+1).4t.(4t-1)....2} a^{4t+1} da$$

$$+ \frac{1}{(4t+3).(4t+2)....2} a^{4t+3} da$$

$$- \frac{1}{(4t+5).(4t+4)....2} a^{4t+5} da ...$$

Folglich $x = \text{Conſt} +$ den Integralen der Glieder dieſer unendlichen Reihe. Nun verſchwinden dieſe Integrale alle, wenn $a = o$ und da wird $x = 1$ alſo iſt $\text{Conſt} = 1$ und

$$x = 1 - \tfrac{1}{2}aa + \frac{1}{4.3.2} a^4 - \frac{1}{6.5.4.3.2} a^6$$

$$+ \frac{1}{8.7.6.5.4.3.2} a^8 .....$$

$$- \frac{1}{(4t+2).(4t+1)....2} a^{4t+2}$$

$$+ \frac{1}{(4t+4).(4t+3)....2} a^{4t+4}$$

$$- \frac{1}{(4t+6).(4t+5).....2} a^{4t+6} ...$$

297. Wenn man $- \frac{1}{2} aa = A$;

$+ \frac{1}{4.3.2} a^4 = B$.... das Glied, deſſen Exponent $4t+2$ iſt, ζ; die folgenden beyden ϑ; η; nennt, ſo iſt $x = 1 - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{4.3} Aaa$

— 1

$$-\frac{1}{6.5}\,Baa-\frac{1}{8.7}\,Caa\ldots\ldots$$

$$-\frac{1}{(4t+4).(4t+3)}\,\zeta aa$$

$$-\frac{1}{(4t+6).(4t+5)}\,\vartheta aa\ldots.$$

298. Anm. Umgekehrt den Bogen aus dem Cosinus zu finden, berechne man nach (281) den Bogen dessen Sinus x ist, und ziehe ihn vom Quadranten ab.

299. Aufg. Aus der Tangente AT = t 18 F. den Bogen AM zu finden.

Auf. Weil $t=\frac{s}{\sqrt{(1-ss)}}$ (Trig. 4. Erkl. 3. Zus.) so ist $dt=\frac{ds}{(1-ss).\sqrt{(1-ss)}}$ $=\frac{da}{1-ss}$ (281). Aber $1:1-ss=1+tt:1$ (Trig. 4. Erkl. 5. Zus.) also $1+tt=\frac{1}{1-ss}$ und $dt=da.(1+tt)$ oder $\frac{dt}{1+tt}=da.$ oder das Differential des Bogens, ist das Differential der Tangente, mit dem Quadrate der Secante dividirt. Wenn At eine nächstgrössere Tangente, und CO = CT ist, so lasse man sich den Punct t dem Puncte T unendlich nähern; dadurch ver-

mindert sich zugleich der Winkel TCt unendlich, weil CT : Tt = sin CtA : sin TCt, und CtA endlich bleibt; Folglich vermindern sich die Bogen Mm, TO; als Maasse dieser Winkel unendlich, und nähern sich unendlich, geraden Linien die mit CMT; CmO, rechte Winkel machten. Ferner ist CTA = CtA + TCt; wenn also TCt unendlich abnimmt, so nähert sich CtA unendlich dem Winkel CTA. Die Gränzen also, welche man den Grössen, die sich durch diese unendlichen Abnahmen verändern, setzen kann, sind CtA = CTA; tOT = R also ΔCAT ∽ ΔTOt und CA : CT = OT : Tt;

oder $Tt = \frac{OT.\,CT}{CA}$ aber CM : Mm = CT : OT also $Tt = \frac{CT^2.\,Mm}{CM^2}$ und $Mm = \frac{CM^2.\,Tt}{CT^2}$. Nennt man also CM = 1; Mm = da; Tt = dt, so ist $da = \frac{dt}{1+tt}$ wie vorhin. Folglich $da = dt.\,(1 - t^2 + t^4 - t^6 \ldots + t^{4n} - t^{4n+2} \ldots)$ und

$$a = t - \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{5}t^5 - \tfrac{1}{7}t^7 \ldots + \frac{1.\,t^{4n+1}}{4n+1} - \frac{t^{4n+3}}{4n+3} \ldots$$

oder $a = t.\,(1 - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{5}t^4 \ldots - \frac{1}{}$

$$-\tfrac{1}{7}t^6 \ldots + \frac{1}{4n+1}\cdot t^{4n} - \frac{1}{4n+3}t^{4n+2}.$$

Euler Introd. in An. inf. L. I. c. 8. schreibt diese Reihe Leibnizen zu: Aber Maseres in s. Sammlung: Scriptores logarithmici Vol. 3. p. 169. erinnert Jacob Gregory habe sie im Anfange 1671 gefunden und Joh. Collins mitgetheilt. Maseres hat dahin gehörige Aufsätze im II. B. seiner Sammlung 18 u. 19. S. eingerückt. In 1671 hatte Leibniz sich noch nicht mit höherer Mathematik beschäfftigt. Collins machte Entdeckungen die er erfahren hatte, gern weiter bekannt. Er mag nun aber die Reihe Leibnizen angezeigt haben oder nicht, so ist doch Leibnizens dahin gehöriger Aufsatz erst in den leipziger Actis Erud. 1682 erschienen also die Reihe eigentlich Jacob Gregory zuzuschreiben.

Halleys Reihe für die Rectification durch eine Tangente, in eine verwandelt wo die Coefficienten nach Potenzen der 80 abnehmen also schneller, giebt John Hellins Philos. Transf. 1794; P. II. art. 16.

300. I. Wenn $a = 45°$ so ist $t = r$ also ist der achte Theil des Umkreises $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots$ woraus man also den ganzen Umkreis berechnen, und desselben Verhältniß zum Durchmesser finden könnte.

II. Diese Reihe giebt mir Anlaß zu analytischen Bemerkungen über unendliche Reihen.

In (224) kömmt u deſto näher an 1 je gröſſer N iſt. Soll alſo N unendlich werden, ſo ſetze man $u = 1$, da kömmt $N = \frac{2}{0}$ alſo unendlich.

III. Daß dieſer unendlichen Ordinate der logarithmiſchen Linie, eine unendliche Abſciſſe zugehört, der unendlichen Zahl ein unendlicher Logarithme, iſt offenbahr.

IV. Für Subtangente $a = 1$ wird dieſer Logarithme (223) $\log \frac{2}{0} = 2. (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \ldots.)$ Alſo, da des Unendlichen Hälfte ohne Zweifel auch unendlich iſt, iſt

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \ldots. = \infty$$

welches auch Schriftſteller von unendlichen Reihen ſchon längſt, aus andern Gründen gezeigt haben.

V. Die Reihe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \ldots$ convergirt alſo nicht; das iſt: Man darf nicht annehmen daß die Summe einiger ihrer erſten Glieder, beynahe die Summe aller ſey, und daß man ſich der Summe aller deſto mehr nähere, je mehr man von den erſten Gliedern zuſammenrechnet.

Denn die Summe aller iſt unendlich, und ſoviel man auch von den erſten Gliedern zuſammen rechnet bekömmt man immer was Endliches.

VI. Es giebt alſo Reihen von Brüchen, wo jedes folgende Glied kleiner iſt als das vorhergehende, und wo doch die Summe dieſer immer kleinern und kleinern folgenden Glieder, unendlich gröſſer

gröſſer werden kann als die Summe der erſten Gröſſern.

Wie das ſtatt findet, kann man ſich ſo vorſtellen: Weil die Reihe ohne Ende fortgeht, ſo läſſt ſich allemahl ſo eine groſſe Menge als man will von den kleinern folgenden Gliedern denken, und dieſe können zuſammen mehr austragen, als die Summe der gröſſern, aber wenigern vorhergehenden.

VII. Daraus alſo daß in einer Reihe die folgenden Glieder immer kleiner und kleiner werden, flieſſt nicht, daß die Reihe convergirt, ſondern man muß das nach der Formel woraus die Reihe iſt gefunden worden beurtheilen.

Z. E. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots$

Dieſe Reihe convergirt allemahl wenn x ein eigentlicher Bruch iſt, denn alle ihre Glieder zuſammen machen nicht mehr als die endliche Gröſſe $\frac{1}{1-x}$.

VIII. Bedeutet $1 : \pi$ die Verhältniß des Durchmeſſers zum Umkreiſe, ſo iſt (I)

$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \ldots\ldots$

Aber (VI) $\infty = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} \ldots\ldots$

Alſo

$$\infty + \tfrac{1}{4}\pi = 2.(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{13}\ldots$$
$$\infty - \tfrac{1}{4}\pi = 2.(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{15}\ldots$$

VIIII. Beyde dieſe Reihen ſind alſo unendlich; oder es iſt

$$\tfrac{1}{2}\infty + \tfrac{1}{8}\pi = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{13}\ldots.$$
Unendlich $= P$
$$\tfrac{1}{2}\infty - \tfrac{1}{8}\pi = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{15}\ldots.$$
Unendlich $= Q$.

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{15}\ldots$$
$$= P - Q$$

X. Nun iſt $P - Q = \frac{1}{4}\pi$ (VIII); Alſo iſt $\frac{1}{4}\pi$ der endliche Unterſchied, der beyden unendlichen Gröſſen.

XI. Es iſt ferner $\frac{P}{Q} - 1 = \frac{\pi}{4Q}$ alſo $\frac{P}{Q} = 1 + \frac{\pi}{4Q}$; der zweyte Theil rechter Hand, iſt Quotient einer endlichen Gröſſe durch eine unendliche dividirt, alſo läſſt ſich $\frac{P}{Q}$ von 1 nicht unterſcheiden. Jede dieſer Reihen iſt eine unendliche Gröſſe, ſie werden gleich geſchätzt weil ihr endlicher Unterſchied in Vergleichung mit jeder verſchwindet.

Sie werden aber nur gleich geſchätzt, wenn man ihre geometriſche Verhältniß betrachtet für die arithmetiſche iſt $P - Q = \frac{1}{4}\pi$.

XII.

XII. Jacob Bernoulli hat zu Basel seit 1689, einige Disputationen von unendlichen Reihen gehalten, sie finden sich unter der Gestalt auch mit den beygefügten Thesen, in der Sammlung seiner Werke. Mit Weglassung der Disputationstitel und Thesen sind sie als ein Tractatus de seriebus infinitis earumque summa finita seiner Arti Conjectandi beygefügt die als opus posthumum Basel 1713 herausgekommen ist. Es kommen da auch Reihen vor deren Summe unendlich ist. Die ersten Lehren von unendlichen Reihen die Jacob damahls vorgetragen hat, sind seitdem sehr vermehrt worden.

301. Wenn $1 : \pi$ die Verhältniß des Durchmessers zum Umfange (G. 44. S.) so ist 2π ein Kreis, dessen Durchmesser $= 2$ oder der Halbmesser $= 1$ ist, weil $1 : \pi = 2$: Umfange dieses Kreises. Also ist $\frac{2\pi}{8}$ oder $\frac{1}{4}\pi = (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots)$ oder $\pi = 4.(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots)$ Wenn nun ein Kreis, 1 zum Durchmesser, π zum Umfange hat, so ist seine Fläche $= \frac{1}{4}.\pi = (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots)$ So hat Leibniz diese Reihe für die Quadratur des Kreises bekannt gemacht. Act. Er. Lipsi. Febr. 1682. Aber diese Reihe nähert sich zu langsam, als daß sie die Peripherie bald auf viel Decimalbrüche genau zu finden diente. Wenn man nähmlich den Umkreis bis auf n Decimalstellen, oder bis auf die Ordnung $-n$ richtig will berechnet haben,

haben, so muß man bis auf die Glieder der Reihe kommen, die keine Decimalziffern von dieser Ordnung enthalten. Aber dieser Reihe fünftes Glied enthält noch Zehntheilchen, oder eine Ziffer von der Ordnung — 1. Also geben die ersten fünf Glieder den Umkreis nicht bis auf Zehntheile. Nach Eulers Erinnerung Comm. Ac. Petrop. T. VIIII. p. 226. müßte man von ihr 10^{50} Glieder berechnen den Umfang auf 100 Stellen zu haben, welches eine Ewigkeit erfodern würde. Leibniz hat sie auch a. a. O. nicht vorgeschlagen den Umfang wirklich daraus zu berechnen, sondern nur zu zeigen, daß sich die Quadratur des Kreises durch eine Reihe giebt, deren Gesetz so leicht zu übersehen ist.

301. Aufg. Aus dem Bogen die Tangente zu finden.

Aufl. Weil $da + t^2\,da = dt$ (299) so ist das erste Glied von $t = a$; Man kann nähmlich nach (Alg. 694) setzen

$$dt = da + a^2\,da + \tfrac{2}{3}a^4\,da$$

$$-t\,dt\,da = -a^2\,da - \frac{2a^4}{3}da$$

$$t = a + \tfrac{1}{3}a^3 + \tfrac{2}{15}a^5$$

So würde man die folgenden Glieder von t auch finden. Leichter aber geht es so an: Wenn in Alg. 690. und hier 299.

x; y;

$$x;\ y;\ \lambda;\ \delta;\ \frac{1}{\lambda};\ (1+\delta):\lambda;$$

hier a; t; 1; 1; 1; 2;

so ist

$$t = a + \alpha a^3 + \beta a^5 + \gamma a^7 + \delta a^9 + \varepsilon a^{11} \ldots$$

$$tt = a^2 + 2\alpha a^4 + \left.\begin{matrix}\alpha\alpha \\ +2\beta\end{matrix}\right) a^6 + \left.\begin{matrix}2\alpha\beta \\ +2\gamma\end{matrix}\right) a^8 + \left.\begin{matrix}\beta\beta \\ +2\alpha\gamma \\ +2\delta\end{matrix}\right) a^{10}$$

$$\frac{dt}{da} - 1 = 3\alpha a^2 + 5\beta a^4 + 7\gamma a^6 + 9\delta a^8 + 11\varepsilon a^{10} \ldots$$

Also die Coefficienten, die zu einerley Potenzen von a gehören, gleich gesetzt

$$\alpha = \tfrac{1}{3};\ \beta = \frac{2\alpha}{5} = \frac{2}{5.3};\ \gamma = \frac{2\beta + \alpha\alpha}{7}$$

$$= \tfrac{1}{3}.\ (\tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{3}).\ \tfrac{1}{7} = \frac{17}{9.7.5} = \tfrac{17}{315};$$

$$\delta = \frac{2.(\alpha.\beta+\gamma)}{9} = 2.\left(\frac{2}{5.3.3} + \frac{17}{9.7.5}\right).\tfrac{1}{9}$$

$$= 2.(2 + \tfrac{17}{7}).\ \frac{1}{9.5.9} = \frac{2.31}{9.7.5.9} = \tfrac{62}{2835};$$

$$\varepsilon = 2.\left(\frac{(\delta+\alpha.\gamma)+\beta.\beta}{11}\right) = \left(2.\left(\frac{2.31}{9.9.7.5} + \frac{17}{3.9.7.5}\right) + \frac{4}{5.5.3.3}\right).\tfrac{1}{11} = \left(\frac{1}{9.7.5.3}\cdot\right.$$

$$\left(\frac{4.31}{3}+2.17\right)+\frac{4}{25.9}\cdot\frac{1}{11}$$

$$=\left(\frac{1}{9.7.5.3}\cdot\frac{113.2}{3}+\frac{4}{5.5.9}\right)\cdot\frac{1}{11}$$

$$=\frac{1}{9.5}\cdot\left(\frac{1}{7.3}\cdot\frac{113.2}{3}+\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{1}{11}$$

$$=\frac{1}{9.5}\cdot\frac{691.2}{7.9.5}\cdot\frac{1}{11}=\frac{691.2}{11.9.9.7.5.5}$$

$=\frac{1382}{155925}$ Also ist

$t=a+\frac{1}{3}a^3+\frac{2}{15}a^5+\frac{17}{315}a^7+\frac{62}{2835}a^9+\frac{1382}{155925}a^{11}\ldots\ldots$

Ein allgemeines Gesetz dieser Reihe zu finden, braucht man nur einen unbestimmten Coëfficienten der Reihe tt anzugeben; welches sich aus (59) thun liesse: Aber dieser Coëfficient wird so zusammengesetzt, daß es keinen practischen Nutzen haben würde, das Gesetz der Reihe durch ihn anzugeben, wie ein solcher Nutzen sich bey den Gesetzen der vorigen Reihen findet, daß man nähmlich jedes folgende Glied bequem aus dem vorhergehenden berechnen kann. Daher ist es der Mühe nicht werth dergleichen allgemeines Gesetz hier zu suchen; zumahl, da man a ordentlich so klein nimmt, daß die berechneten Glieder der Reihe nicht alle nöthig sind, t in der verlangten Schärfe zu finden.

302. Aufg. Aus dem Bogen die Cotangente τ zu finden.

Aufl.

Aufl. $\tau = \frac{1}{t}$ (Trig. 5. Erkl. 1. Zuſ.) alſo

dat $= a.(1 + \frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{15}a^4 + \frac{17}{315}a^6 + \frac{62}{2835}$ $a^8 \ldots)$ (301) ſo iſt $\tau = a^{-1}$ in die unendliche Reihe auf die Potenz -1 erhoben multiplicirt. Um alſo dieſe unendliche Reihe auf die Potenz -1 zu erheben, ſetze man in (56) $m = 1)\ z = aa$; $\alpha = \frac{1}{3}$; $\beta = \frac{2}{15}$; $\gamma = \frac{17}{315}$; $\delta = \frac{62}{2835}$. Alſo iſt aus (65; V) $A = -\frac{1}{3}$; $B = (-2. -\frac{1}{3}.$ $\frac{1}{3} - 2.\frac{2}{15}).\frac{1}{2} = +\frac{1}{9} - \frac{2}{15} = \frac{1}{3}.(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}) = -$ $\frac{1}{45}$; $C = \left(-3. -\frac{1}{45}.\frac{1}{7} - 3. -\frac{1}{3}.\frac{2}{15} - \frac{3.17}{315}\right).$ $\frac{1}{3} = \left(+\frac{1}{45} + \frac{2}{15} - \frac{17}{15.7}\right).\frac{1}{3}$

$$= \frac{1}{15}.\left(\frac{1}{3} + 2 - \frac{17}{7}\right).\frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{45}.\frac{7 + 42 - 51}{21} = \frac{-2}{45.21} = \frac{-2}{945}$$

So findet man

$$\tau = \frac{1}{a} - \frac{1}{3}a - \frac{1}{45}a^3 - \frac{2}{945}a^4 - \frac{1}{4725}a^5 \ldots$$

303. Aufg. Aus dem Bogen die Secante S zu finden.

Aufl. $S = x^{-1}$ (296. und Trig. 4. Erkl. 5. Zuſ.) $= \left(1 - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{4.3.2}a^4 \ldots.\right)^{-1}$ (296).

(296). Alſo iſt in (56. V.) $z = aa$, $m = -1$; $\alpha = -\frac{1}{2}$; $\beta = +\frac{1}{4.3.2}$ ... und

$$A = +\tfrac{1}{2};\ B = \left(-2.+\tfrac{1}{2}.-\tfrac{1}{2}-\frac{1}{4.3}\right).\tfrac{1}{2}$$

$$= (\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{6}).\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}.(1-\tfrac{1}{6}) = \frac{+5}{24}.$$

So findet man

$$S = 1 + \tfrac{1}{2}aa + \frac{5a^4}{24} + \tfrac{67}{720}a^6 + \tfrac{277}{8064}a^8 ..$$

304. Aufg. Aus dem Bogen die Coſecante Σ zu finden.

Auflſ. $\Sigma = 1.s^{-1}$ (Trig. 5. Erkl. 1. Zuſ. und hier 281.) $= a^{-1}\left(1 - \frac{1}{3.2}a^2 + \frac{1}{5.4.3.2}a^4 ....\right)^{-1}$ (285). Alſo in (56. V) $\alpha = -\frac{1}{6}$; $\beta = +\frac{1}{120}$; $z = aa$; $m = -1$; und $A = +\frac{1}{6}$; $B = (-2.\frac{1}{6}.-\frac{1}{6}-\frac{1}{60}).\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.(\frac{2}{6}-\frac{1}{10}).\frac{1}{2} = \frac{7}{360}$ ſo findet man

$$\Sigma = \frac{1}{a} + \frac{a}{6} + \frac{7a^3}{360} + \frac{31a^6}{15120} ....$$

305. Anm. Die zehen Sätze 281; 285; 287; 293; 296; 299; 301; 302; 303; 304; ſind hier in der Ordnung vorgetragen, wie ſie in Hauſens Calculo Extenſorum, El. Ar. & Geom. p. 180. ſtehen; die Analyſis aber iſt bey vielen anders. Die umgekehrten Sätze

Sätze von denen, welche unmittelbar durch die Integration gefunden werden, zu finden, beruft sich Hausen auf die Umkehrung der Reihen; wie bey 285; 293; 301; der ich mich aber aus der 285 angezeigten Ursache nicht habe bedienen wollen. Diese Reihen dienen die trigonometrischen Linien zu berechnen, wenn man die Quadratur des Kreises, die gleich soll gewiesen werden, annimmt, und ihnen andere Lehrsätze, als von der Zusammensetzung der Winkel (Trig. 19. S.) und derselben Vervielfältigung und Theilung (Alg. 175.) beyfügt.

306. Aufg. **Die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise zu finden.**

Aufl. Von einem Bogen, dessen Verhältniß in Graden zu 180 Gr. bekannt ist, berechne man die Tangente und brauche solche statt t in der Reihe (299) daraus den Bogen zu berechnen, aus welchem man alsdenn den halben Umkreis für den Halbmesser 1, und folglich den ganzen für den Durchmesser = 1 berechnet, oder die Zahl P G. 44. S. findet. Man muß aber den Bogen so nehmen, daß t ein kleiner Bruch des Halbmessers wird, damit sich die Reihe bald nähert. Es sey der Bogen von 30 Gr. so ist $s = \frac{1}{2}$; $\sqrt{(1-ss)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ also (299) $t = \frac{1}{\sqrt{3}} =$

$\sqrt{\frac{1}{3}}$. Folglich $s = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3\cdot 3} - \frac{1}{7\cdot 3\cdot 3\cdot 3} + \frac{1}{9\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3} - \frac{1}{11\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3} \ldots\right)$

Also

Also 6a oder der halbe Umfang =

$$\sqrt{12}.\left(1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5.3^2}-\frac{1}{7.3^3}+\frac{1}{9.3^4}-\frac{1}{11.3^5}\ldots\right)$$

Dieses giebt folgendes Verfahren: Man dividire $\sqrt{12}$ durch 3; und 9; und 27; u. s. w. mit einem Worte durch alle Potenzen der 3. Dieses geschieht leicht, wenn man erstlich $\sqrt{12}$ durch 3; den Quotienten wieder durch 3, diesen Quotienten wieder durch 3; u. s. w. jeden Quotienten, der durch die vorige Division durch 3 entstanden ist, wieder durch 3 dividirt, und giebt die Zahlen, welche in folgenden Columnen unter A stehen: Nähmlich bey 1, 3, 5; 7; ... befinden sich die Quotienten $\frac{\sqrt{12}}{1}; \frac{\sqrt{12}}{3}; \frac{\sqrt{12}}{3.3}; \frac{\sqrt{12}}{3.3.3}$ u. s. w. was neben jeder ungeraden Zahl stehet ist $\frac{1}{3}$ dessen, was neben der nächstvorhergehenden stehet, so stehet 331 neben 43 und ist $\frac{1}{3}$ von 993 das neben 41 steht. Weil nun 47 die 24 ungerade Zahl ist, so ist 0,000 000 000 000 037 $=\sqrt{12}:3^{23}$, die ungeraden Zahlen aber haben bey diesen Quotienten folgende Bedeutungen: der Columne A erstes Glied 3, 464.... mit 1 dividirt, also ungeändert giebt der Columne B erstes Glied; der Columne A zweytes Glied 1, 15... mit 3 dividirt giebt der Columne

lumne C erstes Glied 0,3849001794 60; und so geben, der Columne A, 3; 5; 7; 9; u. s. w. alle ungeraden Glieder, mit den neben ihnen stehenden ungeraden Zahlen 5; 9; 13; 17; ... dividirt, das 2; 3; 4; 5; u. s. Glieder der Columne B; aber der Columne A; 4; 6; 8; u. s. w. alle geraden Glieder mit den neben ihnen stehenden ungeraden Zahlen 7; 11; 15; ... dividirt, das 2; 3; 4; u. s. Glieder der Columne C. Aber die Glieder der Columne B; sind die ungeraden oder bejahten Glieder der Reihe $\sqrt{12}.\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^2} \ldots\right)$ wenn nähmlich $\sqrt{12}$ überall wirklich multiplicirt wird, daß man $\sqrt{12} - \frac{\sqrt{12}}{3.3} + \frac{\sqrt{12}}{5.3^2} \ldots$ bekömmt, und die Glieder der Columne C sind der nur genannten Reihe gerade, oder verneinte Glieder. Wenn man also die Summe der Columne C von der Summe der Columne B abzieht, so hat man von der Reihe, welche den halben Umkreis ausdrückt, soviel Glieder zusammengerechnet, als B und C zusammen enthalten, und also den halben Umfang für den Hälbmesser 1; d. i. den ganzen für den Durchmesser = 1; d. i. P auf soviel Decimalfiguren gefunden, soviel Decimalfiguren die Glieder der Reihe, die man zusammengerechnet hat, geben. Es kömmt nähmlich darauf an, daß

A

1	3. 464101615138	(
3	1. 154700538379	(
5	384900179560	(
7	128000059830	
9	42766686607	(
11	14255562202	
13	4751854067	(
15	1583951356	
17	527983785	(
19	175994595	
21	58664865	(
23	19555955	
25	6518318	(
27	2172773	
29	724258	(
31	241419	
33	80473	(
35	26824	
37	8641	(
39	2980	
41	993	(
43	331	
45	110	(
47	37	

B	C
3. 464101615138	= √ 12
	(0. 3849001794 60
769800 35892	
	(183285799 74
47518 54072	
	(12959602 00
3655 27236	
	(1055967 57
310578 70	
	(92628 73
27935 65	
	(8502 15
2607 33	
	(804 73
249 74	
	(77 88
24 38	
	(7 66
2 42	
	(76
24	
	(8
2	
	(1

+ 3. 546233172181. 0. 404640517591
− 0. 404640518591

+ 3. 141592653590.

das letzte Glied der Reihe in der Decimalstelle keine Ziser mehr hat, bis auf welche man die Zahl P haben will. So hat eigentlich das letzte Glied der Columne C keine Ziser mehr in der 12 Decimalstelle, weil in A; 37 von der Ordnung — 12 mit 47 dividirt keine 1 dieser Ordnung giebt. Da indessen 370 von der Ordnung — 13 mit 47 dividirt, 7 und beynahe 8 von dieser Ordnung gäbe, welches beynahe 1 von der Ordnung — 12 austrägt, so ist das letzte Glied von C, von dieser Ordnung gesetzt worden. Aus einem ähnlichen Grunde ist der Columne A letztes Glied 37 angenommen worden, welches durch die Division mit 3 aus dem nächstvorhergehenden auch nicht so herauskäme. So findet man P auf 12 Decimalstellen, weil man $\sqrt{}$ 12 auf soviel Stellen gesucht hat, und der Reihe, die P ausdruckt, letztes Glied, oder hier der Columne C unterstes Glied; nichts mehr in der 12 Decimalstelle hat. Es erhellt aber aus dem nur erklärten Verfahren, daß die letzten Zifern von P unrichtig seyn können, weil oft die letzten Glieder von A; B; C; unrichtig angenommen werden. Will man also P auf viel mehr Decimalstellen haben, so darf man nur $\sqrt{}$ 12 auf mehr Decimalstellen ausziehen, wobey der Vortheil Alg. 321. XXX. zu gebrauchen ist; auch dienen kann, daß $\sqrt{}12 = 2\sqrt{}3$.

307. Wenn man die Reihe 299 brauchen will, kann man nicht leicht einen andern Bogen als den von 30 Gr. nehmen, weil kein anderer Bogen, der etliche mahl genommen den Halbkreis ausmacht, eine Tangente hat, die kleiner als der Halbmesser ist, und sich auf eine so einfache Art bestimmen läßt. Wollte man mehr zusammengesetzte Tangenten nehmen, die denn alle zum Halbmesser Irrationalverhältnisse haben, so würde die Rechnung mit ihnen gar zu beschwerlich werden.

308. I. Vermittelst der Reihe (299) ist P auf 74 Decimalfiguren gefunden worden, wobey die ganze Schwürigkeit des Verfahrens (306) darauf ankömmt, $\sqrt{12}$ in sehr viel Decimalfiguren zu haben. Eulet de variis modis circuli quadraturam proxime exprimendi, Comm. Petrop. T. VIIII. p. 227. giebt eine Methode an, diese verdrießliche Ausziehung der Wurzeln zu ersparen, die sich aber auf Erfindungen von ihm gründet, welche ich hier nicht habe vortragen können. In eben dieser Schrift 2. §. giebt er für den Durchmesser = 1. den Umkreis bis auf 127 Decimalstellen folgendergestalt an:

3, 141592 653989 793238 462643 383279
502884 197169 399375 105820 974944
592307 816406 286208 998628 034825
342117 067982 148086 513272 306647
093844 6.†

die ersten 100 Ziffern hat Machin, alle aber Lagny durch einen noch nicht bekannten Kunstgriff erfunden.

Eine Reihe, die bequemer als die gebrauchte gewesen wäre, findet sich so: Es sey $\frac{1}{2}$ P oder $45° = a + b$ also (Trig. 19. §. 3. Z.) $1 = \frac{\text{tang } a + \text{tang } b}{1 - \text{tang } a \cdot \text{tang } b}$

und $\text{tang } b = \frac{1 - \text{tang } a}{\text{tang } a + 1}$ also $= \frac{1}{2}$ wenn

$\text{tang } a = \frac{1}{3}$; folglich (299)

$$a = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} \ldots\ldots$$

$$b = \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} \ldots\ldots$$

welche beyde Reihen zusammen addirt $a + b = \frac{1}{4}\mathfrak{P}$ geben; ohne daß man zu wissen braucht, wie viel Grade a oder b einzeln halten. Eul. Introd. in An. inf. L. I. §. 142.

II. In meiner geometrischen Abhandlungen II. Samml. (1791) 20. Abh. gebe ich Nachrichten von Bemühungen die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise zu berechnen, und denen welche solche Arbeiten unternommen haben als Ludolph von Cöln, Lagny. . .

III. In der fünften Ausg. meiner Anfgr. d. Ar. u. Geom. (1792) in der Anm. am Ende des 43 Satzes finden sich aus Hr. v. Zach Nachrichten noch mehr Ziffern für den Umkreis, bis mit auf die Ordnung $\frac{1}{156}$. Auch ist da erinnert, daß unter den vorhin gelieferten lagnyschen Ziffern die Abtheilung 513278 heissen muß 513282. Die 7 ist nur ein Schreibfehler, kein Rechnungsfehler weil die nach ihr folgenden Ziffern richtig sind.

IV. Im III. B. der Scriptores logarithmici, sammelt Maseres (234; XVIII) Berechnungen mehrer Mathematiker. Vega Thesaurus (233; VIII.) im I. B. 308; giebt den Umkreis auf 140 Decimalstellen, und desselben Logarithmen, briggischen und natürlichen, jeden auf 23 Decimalstellen. Auch so den Umkreis in den logarithmischtrigonometrischen Tafeln 1797.

V. Eine Reihe für den Umfang des Kreises.

Man setze $\frac{1}{x}$ sey die Tangente eines Bogens $= s$ (Er ist etwas über 11° 18′).

Des doppelten Bogens Tangente ist $= \frac{\frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}}$

$= \frac{2x}{x^2 - 1}$; des doppelten hievon oder des vierfachen (1)

Tangen-

Tangente $= \frac{\frac{5}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{5 \cdot 24}{144 - 25} = \frac{120}{119} = 1 + \frac{1}{119}$.

Dieser vierfache Bogen ist also ein wenig grösser als 45°.

Man setze ihn $= 4\alpha$; so ist tang $(4\alpha - 45°)$ $= \frac{\text{tang } 4\alpha - 1}{\text{tang } 4\alpha + 1} = \frac{\frac{1}{119}}{2 + \frac{1}{119}} = \frac{1}{238 + 1} = \frac{1}{239} =$ tang β.

So ist $4\alpha - 45° =$ Bog tang $\frac{1}{239} = \beta$; $4\alpha -$ Bog tang $\frac{1}{239} = 45°$.

Wenn man also den Unterschied dieser beyden Bogen berechnet, hat man 45° und das viermahl genommen, den Halbkreis für Halbmesser $= 1$ oder den ganzen für Durchmesser $= 1$.

Nun ist (299) Bog tang $t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \ldots$

Also

$4\alpha = 4 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} \ldots\right.$

Folglich

$\frac{\pi}{4} = \frac{16}{5} - \frac{16}{3 \cdot 5^3} + \frac{16}{5 \cdot 5^5} \ldots$

$- 4 \cdot$ Bog tang $\frac{1}{239} = -\frac{4}{239} + \frac{4}{3 \cdot 239^3} - \frac{4}{5 \cdot 239^5} \ldots$

Das ist: der halbe Umfang $= \frac{16}{5} - \frac{4}{239} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{16}{4^5} - \frac{4}{239^5}\right) \ldots$

Die Reihe auf diese Art finden lehrt Petrus Ferronius, de calculo integralium exercitatio mathema-

aber, deſſen Länge dem Halbmeſſer gleich iſt, findet man ſo: Er ſey n Grade, ſo iſt u. $0,01745329.. = \frac{1}{n}$ (309) alſo $n = \frac{1}{0,01745..}$ welches 57 Gr. giebt. Der Reſt von dieſer Diviſion mit 60 multiplicirt, und durch den Diviſor dividirt, giebt Minuten u. ſ. w. Man findet dieſen Bogen = 57 Gr. 17 M. 44 Sec. 48 Tert. 22 Quart. 29 Quint. 21 Sext. Eul. introd. in analyſ. inf. L. I. §. 530. Sein Sinus iſt aus 282. $0,841470984051\frac{4}{5}$. Für gröſſere Bogen findet man die Sinus und Coſinus aus dieſen Linien für die kleinern, durch die Addition der Winkel Trig. 19. S. und derſelben Multiplication (Alg. 175.) Man muß aber bemerken, daß bey ſolchen Arbeiten die letzten Zifern der Sinuſſe, die man ſo vermittelſt anderer findet, nicht ſoweit richtig ſind als die letzten Zifern derjenigen, vermittelſt derer man ſie findet, (Ar. III. 13.) und daher muß man die Sinus, vermittelſt derer man viel andere finden will, auf vielmehr Decimalſtellen ſuchen, als man ſie für ſich brauchte. Aber die Vielecke (Alg. 162.) geben auch viel Sinus unmittelbar, deren man ſich nachgehends bedienen kann andere zu finden. Folgendes iſt hiebey auch brauchbar.

312. Aus Trig. 19. S. iſt $\sin(\alpha + \delta) = \sin\alpha . \cos\delta + \sin\delta . \cos\alpha$. Nun ſuche man aus dem bekannten Sinus und Coſinus eines Bogens, den Sinus eines Bogens der jenen um etwas übertrifft das noch nicht völlig eine Minute beträgt. Alſo ſind Sinus und Coſinus von α gegeben; auch der Bogen δ iſt gegeben; Nun iſt wegen der Vorausſetzung, $\delta < 0,0003$ (309) alſo $\delta^3 < 27 - 12$. Dieſer Würfel des Bogens, giebt alſo erſt Zifern in der eilften Decimalſtelle. Er kömmt aber in dem zweyten Gliede der Reihe für den Sinus (286) und im dritten der Reihe

für

für den Cosinus (297) vor. Verlangt man also dieses kleinen Bogens Sinus und Cosinus nicht so weit, sondern nur etwa wie gewöhnlich bis auf die siebente Decimalstelle, so setzt man ohne merklichen Fehler, statt des Sinus nur das erste Glied der Reihe, und statt des Cosinus nur die ersten beyden. Also wird

$\sin(\alpha + \delta) = \sin\alpha . (1 - \frac{1}{2}\delta^2) + \delta . \cos\alpha$

welches dienen könnte, aus den Sinibus die für alle ganze Minuten in den Tafeln befindlich sind die Sinus für Bogen zu finden, die zwischen Mengen ganzer Minuten fallen.

Z. E. für den Bogen 30° 0′ 30″ wäre

$\alpha = 30°$ und $\delta = 30'' = 0{,}00014504\ldots$

313. Es ist also $\sin(\alpha+\delta) - \sin\alpha = \delta . (\cos\alpha - \frac{1}{2}\delta . \sin\alpha)$. Hier ist des zweyten Factors letztes Glied in Vergleichung mit dem ersten klein, wofern nicht $\cos\alpha$ sehr klein in Vergleichung mit $\sin\alpha$ ist, das ist wofern nicht α einem rechten Winkel sehr nahe ist. Wenn also α einem rechten Winkel nicht sehr nahe ist, kann man ohne grossen Irrthum den Unterschied der Sinusse $= \delta \cos\alpha$ setzen: Und folglich unter eben den Umständen, $\sin(\alpha + \varepsilon) - \sin\alpha = \varepsilon . \cos\alpha$. Folglich ist alsdenn

$\sin(\alpha+\varepsilon) - \sin\alpha : \sin(\alpha+\delta) - \sin\alpha = \varepsilon : \delta$

Diese Proportion nimmt man insgemein sowohl für die Sinus als für ihre Logarithmen an (Trig. 12 S.) die Secunden eines gesuchten

Winkels zu finden. Im gegenwärtigen liegt der Grund aus welchem man beurtheilen kann wie weit solches verstattet ist. Daß es bey Winkeln die dem rechten sehr nahe kommen immer unrichtiger wird, beruhet darauf, weil bey solchen Winkeln die Sinus sehr langsam wachsen, Gegentheils bey kleinen Winkeln, wachsen sie beynahe in der Verhältniß der Winkel, wie selbst aus dem erhellt daß für einen kleinen δ, beynahe $\sin \delta = \delta$ ist.

314. Aufg. **Alle Sinus und Cosinus, die zu kleinern Bogen als 45 Gr. gehören, zu finden.**

Aufl. Ein Bogen, der kleiner als 45 Gr. ist, läßt sich durch $\frac{m}{n} \cdot$ 45 Gr. ausdrucken, daß $\frac{m}{n}$ ein eigentlicher Bruch ist. Wenn nun für den Halbmesser $= 1$; die Länge des Bogens von 90 Gr. $= \frac{1}{2} P$ ist, (309) so kann man in 285; 296; $x = . \frac{1}{2} P$ setzen. Dieses giebt in 285 den Sinus $= \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{2} P + \frac{m^3}{n^3} \cdot (\frac{1}{2} P)^3 . \frac{1}{3.2} + \frac{m^5}{n^5} \cdot (\frac{1}{2} P)^5 . \frac{1}{5.4.3.2} \ldots$ und in 296 den Cosinus $1 - \frac{m^2}{n^2} \cdot (\frac{1}{2} P)^2 . \frac{1}{2} + \frac{m^4}{n^4} \cdot 1 (\frac{1}{2} P)^4 . \frac{1}{4.3.2} \ldots$

In beyden Reihen kann $\frac{m}{n}$ bis an $\frac{1}{2}$ wachsen,

und

und also sind die Potenzen davon lauter eigentliche Brüche, die für höhere Grade immer abnehmen. Was aber den Factoren jedes Gliedes betrifft, der in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, so verhält es sich damit folgendergestalt: Es ist

$\frac{1}{2}P = 1,5707963267948966 19\ldots$.

also $< 1,6$; also $(\frac{1}{2}P)^2 < 2,56$ und $(\frac{1}{2}P)^3 < 4,096$ Folglich ist in der Reihe für den Sinus, $(\frac{1}{2}P)^3 . \frac{1}{6}$ kleiner als 1. Man nenne in jedem Gliede, das nicht das erste ist, den Factor, darein die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, wie $(\frac{1}{2}P)^3 . \frac{1}{6}$ im zweyten ist, $= Q$; und den ähnlichen Factor im nächsten Gliede wie $(\frac{1}{2}P)^5 . \frac{1}{24}$ ist, $= R$; so ist allemahl R ein Product aus Q in $(\frac{1}{2}P)^2$ durch ein Product aus zwo Zahlen dividirt, davon die kleinste im dritten Gliede 4; im vierten 6; im fünften 8 u. s. w. ist, (285) also ist der Quotient, den $(\frac{1}{2}P)^2$ mit dieser beyden Zahlen Producte dividirt, giebt allemahl ein eigentlicher Bruch, und allemahl in jedem folgenden Gliede kleiner als in dem vorhergehenden, folglich ist das Product aus Q in diesen Quotienzen allemahl kleiner als Q: oder R kleiner als Q. Nun ist für das zweyte Glied, Q ein eigentlicher Bruch, folglich R im dritten Gliede ein kleinerer eigentlicher Bruch. Bedeutet also nun Q den Factor, der im dritten Gliede in die Potenz

von

von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, so ist solcher ein eigentlicher Bruch, und R ist nun der Factor, der im vierten Gliede in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt ist, und ein kleinerer eigentlicher Bruch als Q. So erhellt, daß die Zahlen, die in jedem Gliede in die Potenzen von $\frac{m}{n}$ multiplicirt werden, lauter abnehmende eigentliche Brüche sind, und die Reihe für den Sinus sich nähern würde, wenn auch $\frac{m}{n} = 1$ wäre, noch vielmehr, da es kleiner als $\frac{1}{2}$ ist.

Für den Cosinus; ist $\frac{1}{2}$ P grösser als $\frac{3}{2}$ aber kleiner als 1, 6 und noch vielmehr kleiner als 2; folglich $(\frac{1}{2}P)^2 . \frac{1}{2}$ grösser als 1. aber $(\frac{1}{2}P)^4$ viel kleiner als 16 und folglich mit $\frac{1}{4.3.2.}$ multiplicirt gewiß kleiner als 1. Was also in der Reihe für den Cosinus drittem Gliede, in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, ist ein eigentlicher Bruch. Dieses wird nun durch den eigentlichen Bruch $(\frac{1}{2}P)^2 . \frac{1}{6.5}$ multiplicirt, um das herauszubringen, was im vierten Gliede in die Potenz von

von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, und folglich ist dieses, das im vierten Gliede in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, ein eigentlicher Bruch, und giebt mit $(\frac{1}{2}P)^2 \cdot \frac{1}{8.7}$ multiplicirt wieder einen eigentlichen Bruch für das, was im fünften Gliede in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird. Und so wird aus jedem Factor, der in einem Gliede in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, wenn man ihn durch $(\frac{1}{2}P)^2 \cdot \frac{1}{90.9}$ u. s. w. multiplicirt, der Factor der im folgenden Gliede in die Potenz von $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird; ist also der vorhergehende ein eigentlicher Bruch, so ist der folgende auch einer. Daher wiederum die Reihe für den Cosinus sich nähern würde, wenn auch $1 = \frac{m}{n}$ wäre.

So erhellt also, daß man hier den Sinus und Cosinus durch zwo Reihen, die sich nähern ausdruckt. Und dieses giebt alle Sinus und Cosinus bis auf 90 Gr.

$= 1$ verſchwindet, ſo ſind der Ausſchnitt CAM, und die Fläche CGPM zugleich $= 0$ und alſo allemahl gleich. Zu dieſer Abſicht muß man das logarithmiſche Integral ſo ausdrucken $\frac{a^2}{8}$. log. $\frac{2\omega\sqrt{2}}{a}$ (233 VI.)

318. Aufg. Eben den Ausſchnitt durch die Abſciſſe auf die Axe aus dem Mittelpuncte auszudrucken.

Auflſ. Wenn man ſich von M auf die verlängerte AC als der Hyperbel Axe ein Perpendikel vorſtellt, ſo iſt dieſes die Ordinate der Hyperbel, und zwiſchen ihm und dem Mittelpuncte iſt auf der Axe die erwähnte Abſciſſe enthalten.

Dieſe Abſciſſe und Ordinate ſind das u und y Alg. 418. Sie ſollen hier x und z, heiſſen, ſo iſt $z = \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)}$; tang $\varphi = \frac{z}{x}$; sec $\varphi = \frac{AM}{x}$ alſo der Winkel MAm oder $d\varphi = x^2 . d(z:x)$ dividirt durch AM^2. Der Dividend iſt $= x . dz - z dx$ alſo $d\varphi = \frac{x . dz - z . dx}{AM^2}$.

Der Bogen $MR = AM . d\varphi$ und des Ausſchnittes Element $= \frac{1}{2} . AM^2 . d\varphi = \frac{1}{2}(x . dz$

$- z.$

$-z.dx$) Aber $dz = \frac{x.dx}{z}$ also des Ausschnittes Element $= \frac{1}{2}.\frac{(x^2-z^2).dx}{z} = \frac{\frac{1}{4}.a^2.dx}{2.\sqrt{(x^2-\frac{1}{4}a^2)}}$

II. Nun hatte man den Ausschnitt durch log nat ω gegeben (317; IV) kann man also AP, die Abscisse auf der Asymptote, durch x die Abscisse auf der Axe aus dem Mittelpuncte ausdrucken, oder umgekehrt, so bekömmt man neue logarithmische Formeln.

319. I. Dieser Uebergang geschieht folgendergestalt.

$$z^2 + x^2 = AM^2 = PM^2 + AP^2$$

Man drucke jede Ordinate durch ihre Abscisse aus, so ist $2.x^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{a^4}{64.\omega^2} + \omega^2$

oder

$$2.x^2 = \frac{a^4}{64.\omega^2} + \frac{1}{4}.a^2 + \omega^2$$

Was rechter Hand steht ist das Quadrat von $\frac{a^2}{8.\omega} + \omega$

Also $x = \pm\left(\frac{a^2 + 8.\omega^2}{8.\omega.\sqrt{2}}\right)$

II. Wenn man AP nimmt wie es die Figur darstellt so gehört zu demselben eine bejahte Abscisse auf der verlängerten AC.

Innerhalb des Scheitelwinkels vom rechten Winkel FAE, fällt der Hyperbel andre Hälfte, ihre Asymptoten sind EA, FA, verlängert, ihre Axe liegt auf CA verlängert.

Nimmt man auf der Asymptote welche die Verlängerung von EA ist, ein Stück = AP so gehört diesem auf der Verlängerung von CA eine Abscisse zu so groß als x nur entgegengesetzt.

Bleibt man innerhalb des rechten Winkels FAB, so braucht man nur den bejahten Werth von x.

III. Aus (I) hat man auch

$$2.\ x^2.\ \omega^2 = \frac{a^4}{64} + \tfrac{1}{4}a^2.\ \omega^2 + \omega^4$$

daraus $\omega^2 = x^2 - \frac{1}{8}a^2 \pm \sqrt{(x^4 - \frac{1}{4}.a^2.x^2)}$

IV. Zum bejahten x gehören zweene Puncte in der Hyperbel BGD; von jedem ein Perpendikel auf AE, schneidet ein ω ab. In der Figur ist AP das gröſste unter beyden.

Zum verneinten x, gehören entgegengesetzte sonst gleiche ω (II)

V. Versteht man also das AP der Figur wie in (II) so wird in (III) vor der Quadratwurzel, + gebraucht, und die Wurzel aus dem ganzen Quadrate bejaht genommen.

VI. Von $x + \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)}$ ist das Quadrat $= 2.(x^2 - \frac{1}{8}.a^2 + x.\sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)})$

Also

Also (III; V.)

$$\omega = \frac{x + \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

VII. Daraus $d\omega = \frac{\sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)} + x}{\sqrt{(2.(x^2 - \frac{1}{4}a^2))}} . dx$,

und $\frac{d\omega}{\omega} = \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)}}$

Folglich, aus 317; IV; und 318 I. der Ausschnitt durch Abscisse aus dem Mittelpuncte ausgedrückt, oder

$$\frac{1}{8}.a^2.\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)}} =$$

$$\frac{1}{8}.a^2.\log nat\left(\frac{2.x + \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)}}{a}\right)$$

verschwindet wie gehörig für $x = \frac{1}{2}a$.

Fläche der Hyperbel zwischen Abscisse aus dem Mittelpuncte auf der Axe, zugehöriger Ordinate und Bogen.

320. I. Sie ist $\int z.dx$, das Integral so genommen daß es für $z = o$ verschwindet.

II. Die gerade Linie CM ist Hypotenuse eines Dreyecks, dessen beyde Seiten um den rechten Winkel Abscisse und Ordinate sind, der Innhalt $= \frac{1}{2}.x.z.$ Von diesem Dreyecke den Ausschnitt (319; VII) giebt $\int z.dx$;

III) Also, die Ordinate durch Abscisse ausgedruckt ist

$$\int dx.\sqrt{(x^2-\tfrac{1}{4}a^2)} = \tfrac{1}{2}.x.\sqrt{(x^2-\tfrac{1}{4}a^2)} - \tfrac{1}{8}.a^2.\log\text{nat}\left(\frac{2.x+2.\sqrt{(x^2-\tfrac{1}{4}a^2)}}{a}\right)$$

IV. Man kann auch logarithmiſche Integrale finden wo nur Ordinate und ihre Differentiale vorkommen: Nähmlich aus $x^2 = z^2 + \frac{1}{4}a^2$

folgt $dx = \frac{z.dz}{\sqrt{(z^2+\frac{1}{4}a^2)}}$; $\frac{dx}{\sqrt{(x^2-\frac{1}{4}a^2)}}$

$= \frac{dx}{z} = \frac{dz}{\sqrt{(z^2+\frac{1}{4}a^2)}}$ alſo $\int \frac{dz}{\sqrt{(z^2+\frac{1}{4}a^2)}}$

$= \log\text{nat}\left(\frac{2.\sqrt{(z^2+\frac{1}{4}a^2)}+2.z}{a}\right)$

V. $dx.\sqrt{(x^2-\frac{1}{4}a^2)} = z.dx$

$= \frac{z^2.dz}{\sqrt{(z^2+\frac{1}{4}a^2)}}$ alſo $\int \frac{z^2.dz}{\sqrt{(z^2+\frac{1}{4}a^2)}} = \frac{1}{2}.$

$\sqrt{(z^2+\frac{1}{4}a^2)}.z$

$-\frac{1}{8}.a^2.\log\left(\frac{2\sqrt{(z^2+\frac{1}{4}a^2)}+2.z}{a}\right)$

VI) $dz.\sqrt{(z^2+\frac{1}{4}a^2)} = \frac{z^2.dz}{\sqrt{(z^2+\frac{1}{4}a^2)}}$

$+\frac{\frac{1}{4}a^2.dz}{\sqrt{(z^2+\frac{1}{4}a^2)}}$

Von dieſen beyden Differentialen hat man des erſten Integral in (VI) des zweyten aus (IV)

VII)

VII) Alle verſchwinden für $z = 0$

Quadratur der ungleichſeitigen Hyperbel.

VIII) Der ungleichſeitigen Hyperbel Gleichung (Alg. 402) iſt $y^2 = \frac{c^2}{a^2} \cdot (u^2 - \frac{1}{4} a^2)$

Eine gleichſeitige die mit ihr einerley Mittelpunct und einerley groſſe Axe hat, alſo auch einerley Scheitel, hat zur Gleichung $z^2 = u^2 - \frac{1}{4} a^2$ wo z und y, gleichen Abſcäſſen gehören. Alſo $y : z = c : a$, und das Element der Fläche der ungleichſeitigen Hyperbel $y . du = \frac{a}{c} . z . du$. So wird die ungleichſeitige Hyperbel vermittelſt der gleichſeitigen quadrirt, wie die Ellipſe vermittelſt des Kreiſes (unten 343.)

321. I. Des Ausſchnittes Differential druckt man folgendergeſtalt durch den Winkel CAM aus: Weil $AM = x . \text{ſec } \varphi$ (317; II) ſo iſt das Differential $= \frac{1}{2} x^2 . \text{ſec } \varphi^2 . d\varphi = \frac{1}{2} x^2 . d \text{ tang } \varphi$.

Nun iſt $z = x . \text{ tang } \varphi$, alſo (318) $x^2 . \text{tang } \varphi^2 = x^2 - \frac{1}{4} a^2$; dieſes giebt $\frac{1}{2} x^2 = \frac{aa}{8 . (1 - \text{tang } \varphi^2)}$ folglich des Ausſchnitts Differential $= \frac{a^2 . d \text{ tang } \varphi}{8 . (1 - \text{tang } \varphi^2)}$

II. Man ziehe an der Hyperbel Scheitel C, eine Linie die sie berührt. Das Stück dieser Linie das zwischen AC und AM fällt, heisse p; so ist $p = \frac{1}{2} a . \text{tang } \varphi$ oder $\frac{2p}{a} = \text{tang } \varphi$.

Dieses giebt des Ausschnitts Differential $\frac{\frac{1}{16} a^3 dp}{\frac{1}{4} a^2 - p^2}$.

III. Aus I ist $x = \frac{\frac{1}{2} a}{\sqrt{(1 - \text{tang } \varphi^2)}}$, und $\sqrt{(x^2 - \frac{1}{4} a^2)} = \frac{\frac{1}{2} a . \text{tang } \varphi}{\sqrt{(1 + \text{tang } \varphi^2)}}$; dieses giebt $\frac{2 (x + \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4} a^2)})}{a} = \frac{1 + \text{tang } \varphi}{\sqrt{(1 - \text{tang } \varphi^2)}} = \frac{\sqrt{(1 + \text{tang } \varphi)}}{\sqrt{(1 - \text{tang } \varphi)}}$; also $\log \frac{2.(x + \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4} a^2)}}{a} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \text{tang } \varphi}{1 - \text{tang } \varphi}$

Folglich den Ausschnitt (319) nun durch φ ausgedruckt, oder (I) $\frac{a^2}{8} \cdot \int \frac{d \text{ tang } \varphi}{1 - \text{tang } \varphi^2} = \frac{a^2}{16} \cdot \log \frac{1 + \text{tang } \varphi}{1 - \text{tang } \varphi}$

IIII. Und folglich aus (II)

$\frac{1}{16} a^3 . \int \frac{dp}{\frac{1}{4} a^2 - p^2} = \frac{a^2}{16} \cdot \log \frac{\frac{1}{2} a + p}{\frac{1}{2} a - p}$

V.

V. Nennt man $\frac{1}{2}a = r$; so ist der nun gefundene hyperbolische Ausschnitt den ich H nennen will

$$H = \tfrac{1}{2}\int \frac{r^2\,dp}{r^2 - p^2} = \tfrac{1}{4}r^2 . \log\frac{r+p}{r-p}.$$

Vergleichung der Ausschnitte des Kreises und der Hyperbel.

322. Aufg. Von einem Kreise, dessen Halbmesser $= e$ hat ein Bogen $= v$ die Tangente $= q$; man sucht den zugehörigen Ausschnitt $= C$.

Aufl. Wenn t (299) zum ähnlichen Bogen gehört, so sind (Trig. 1 S.) t; und a in 299; $= \frac{q}{e}$ und $\frac{v}{e}$ also $dv = \frac{ee\,dq}{ee+qq}$ und $\frac{1}{2}e\,dv = dC$

$$\frac{\frac{1}{2}e^3\,dq}{ee+qq}$$

323. I. Man nehme $e = r$, (322; VI) stelle sich also einen Kreis um C vor dessen Halbmesser die halbe Axe ist. Ein Bogen dieses Kreises $= r.\,\varphi$ misst den Winkel CAM; des Kreises Ausschnitt ist $= \frac{1}{2}.\,r^2.\,\varphi$, $= C$ so wie der Hyperbel ihrer $= \frac{1}{2}AM^2.\,\varphi = H$; also $C : H = r^2 : AM^2$. Der Quotient $\frac{H}{C}$ ist allemahl grösser

als 1 und wächst ins Unendliche wenn M sich der Asymptote unendlich nähert.

Der Winkel CAM kann bis 45 Gr. wachsen; da wächst der Kreisausschnitt zum Quadranten, der hyperbolische ins Unendliche.

II. Man setze $q = p.\sqrt{-1}$; $dq = dp.\sqrt{-1}$, also $p = \frac{q}{\sqrt{-1}} = -q\sqrt{-1}$. Folglich

C $= \frac{1}{2} r^3 . \int \frac{dq}{r^2 + q^2} = \frac{1}{2} r^3 . \int \frac{dp.\sqrt{-1}}{r^2 - p^2}$

$= \frac{1}{2} . r^3 . \sqrt{-1} . \int \frac{dp}{r^2 - p^2} = H.\sqrt{-1}$ (321; V) $= \frac{1}{4} r^2 . \sqrt{-1} . \log \frac{r+p}{r-p} = \frac{1}{4} r^2 . \sqrt{-1} . \log \frac{r - q\sqrt{-1}}{r + q\sqrt{-1}}$

III) Weil jede Quadratwurzel bejaht oder verneint ist, so war die Voraussetzung im Anfange (II) eigentlich:
$q = \pm p.\sqrt{-1}$ daraus $dq = dp.\pm\sqrt{-1}$ und $p = \frac{q}{\pm\sqrt{-1}} = q.\mp\sqrt{-1}$. Hätte man also $q = -p\sqrt{-1}$ gesetzt so wäre das soviel als $p = +q.\sqrt{-1}$ gesetzt, da käme $dq = -dp.\sqrt{-1}$ und $C = \frac{1}{2} . r^3 . \int \frac{dq}{r^2 + q^2} =$

$\frac{1}{2} r^3 .$

$$\frac{1}{2}r^3.\int\frac{-dp.\sqrt{-1}}{r^2-p^2}=-\frac{1}{2}.r^3.\sqrt{-1}.\int\frac{dp}{r^2-p^2}$$

$$=-\frac{1}{4}.r^3.\sqrt{-1}.\log\frac{r+q\sqrt{-1}}{r-q\sqrt{-1}}$$

$$=+\frac{1}{4}.r^3.\sqrt{-1}.\log\frac{r-q\sqrt{-1}}{r+q\sqrt{-1}}$$

wie vorhin. Beyde Voraussetzungen geben also einerley.

324. Der Ausschnitt des Kreises kann als ein unmöglicher Ausschnitt der Hyperbel angesehen, und durch Logarithmen unmöglicher Grössen integrirt werden.

325. Anm. Dieses hat Joh. Bernoulli zuerst gelehret. S. Op. Io. Bern. T. I. n. 70. p. 399. Mir ist nicht bekannt, daß er oder jemand anders die eigentliche Ursache, warum mögliche Ausschnitte der Hyperbel, unmögliche des Kreises, und umgekehrt sind, deutlich angezeigt hätte. Vielleicht ist sie zu offenbahr, als daß sie diese Bemühung bey Schriftstellern, die nur erhabene Erfindungen vortragen, verdiente, sie wird also doch in diesen Anfangsgründen statt finden. Wenn r zugleich der Halbmesser eines Kreises, und die halbe Axe einer Hyperbel ist, die beyde einen Mittelpunct, und die gemeinschaftliche Abscisse x haben, so sey die Ordinate des Kreises $= y$; der Hyperbel $= z$; die Gleichungen sind $yy = rr - xx$ und $zz = xx - rr$ (Alg. 418.). Jene Ordinate ist nur möglich, wenn $x < r$ und diese nur, wenn $x > r$. Für diese Abscissen also, für welche es mögliche Ordinaten und Ausschnitte bey dem Kreise giebt, giebt es nichts dergleichen bey der Hyperbel; und umgekehrt, wenn der Hyperbel Ausschnitte möglich wer-

den, sind des Kreises seine unmöglich. Daher kann für $r = c$ (323) der Ausschnitt des Kreises nichts anders als ein unmöglicher Ausschnitt der Hyperbel seyn.

326. Wenn man sich aber der logarithmischen Reihen bedienet, so wird C durch lauter mögliche Grössen gegeben, dieses erhellt so: vorläufig ist in 223; für $a = 1$ (225) $l \frac{1-u}{1+u} = -2u.(1 + \frac{1}{3}u^2 + \frac{1}{5}u^4 \ldots) = -2u.T$ wo die Reihe T lauter gerade Potenzen von u enthält.

Nun ist $\frac{r - q\sqrt{-1}}{r + q\sqrt{-1}} = \left(1 - \frac{q\sqrt{-1}}{r}\right) : \left(1 + \frac{q\sqrt{-1}}{r}\right)$ wo man $\frac{q\sqrt{-1}}{r} = u$ (223) setzen kann. Da enthält also T lauter mögliche Glieder (Alg. 230.) und es ist

$$C = \frac{rr.\sqrt{-1}}{4} \cdot -\frac{2q\sqrt{-1}}{r} \cdot T = \frac{+qr}{2} \cdot T$$

Weil die Potenzen gerader Exponenten von $\sqrt{-1}$ abwechselnd verneint oder bejaht sind, nachdem der Exponent ein Product aus einer geraden Zahl in eine ungerade, oder in eine gerade ist, so sind der Reihe T Glieder abwechselnd verneint und bejaht.

Für $q = r$ wird $u = \sqrt{-1}$ und

C =

$C = \frac{rr}{2}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots)$ welches mit (300) übereinstimmt.

327. $v = \frac{2C}{r} = \frac{r\sqrt{-1}}{2} \cdot l \frac{r - q\sqrt{-1}}{r + q\sqrt{-1}}$

oder für $r = 1$; und $q = u\sqrt{-1}$; $\frac{\mathfrak{B} \text{tang } u\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$

$= \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \frac{1+u}{1-u}$ und aus (299)

$\frac{\mathfrak{B}\text{og tang } u\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{u\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}u^2 + \frac{1}{5}u^4 \ldots\right)$

Woraus die Reihe für $\log \frac{1+u}{1-u}$ wie in 283 folgt.

328. Zuſ. Für den Halbmeſſer $= 1$ iſt in 299, aus (322) $a = \frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot l \frac{1 - q\sqrt{-1}}{1 + q\sqrt{-1}}$ (I)

oder auch $= \frac{-1}{2\sqrt{-1}} \cdot l \frac{1 - q\sqrt{-1}}{1 + q\sqrt{-1}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot l \frac{1 + q\sqrt{-1}}{1 - q\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot l \frac{\sqrt{-1} - q}{\sqrt{-1} + q}$ (II).

329.

329. Wenn $\sin a = c$; $\cos a = \gamma$; also $q = \frac{c}{\gamma}$; so ist $a = \frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot l \frac{\gamma - c\sqrt{-1}}{\gamma + c\sqrt{-1}}$.

330. Wenn $le = 1$ gesetzt wird (232) also $ale = a = le^a$; und $\frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-}$; so kömmt $e^{-2a\sqrt{-1}} = \frac{\gamma - c\sqrt{-1}}{\gamma + c\sqrt{-1}}$ $= \frac{(\gamma - c\sqrt{-1})^2}{1}$ oder $e^{-a\sqrt{-1}}$ $= \gamma - c\sqrt{-1}$; Gegentheils $e^{2a\sqrt{-1}} = \frac{\gamma + c\sqrt{-1}}{\gamma - c\sqrt{-1}} = \frac{(\gamma + c\sqrt{-1})^2}{1}$ und $e^{a\sqrt{-1}} = \gamma + c\sqrt{-1}$ folglich $\frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2} = \gamma = \cos a$ und $\frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = c = \sin a$; welches nach (239) die Reihe (285) gäbe.

Vervielfältigung der Winkel vermittelst der Tangenten.

331. Aufg. Aus der Tangente x des einfachen Bogens E, die Tangente y des n fachen F zu finden. Der Halbmesser ist $= 1$. Dieses gehört zu Alg. 175.

Weil

Weil $F = n.\ E$ so ist $dF = n\,dE$ also (299)
$\frac{n\,dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}$. Diese beyden Integrale zu finden, bediene man sich in 328; des II. Ausdrucks. Man setze einmahl

$a = E;\ q = x;$ so ist $E = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot l\frac{\sqrt{-1}-x}{\sqrt{-1}+x}$

zweytens

$a = F;\ q = y;$ so ist $F = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot l\frac{\sqrt{-1}-y}{\sqrt{-1}+y}$

Weil nun $F = n.\ E$; so ist auch

$n.\ l\frac{\sqrt{-1}-x}{\sqrt{-1}+x} = l\frac{\sqrt{-1}-y}{\sqrt{-1}+y}$ und

$\left(\frac{\sqrt{-1}-x}{\sqrt{-1}+x}\right)^n = \frac{\sqrt{-1}-y}{\sqrt{-1}+y}$ (⊙)

Der Kürze wegen will ich e statt $\sqrt{-1}$ schreiben. So ist $\left(\frac{e-x}{e+x}\right)^n = \frac{e-y}{e+y}$

II. Wenn n ungerade ist, so kann man aus ⊙ folgende Gleichung machen: $\left(\frac{x-e}{x+e}\right)^n = \frac{y-e}{y+e}$ daß beyde Zähler den vorigen in ⊙ entgegengesetzt werden. Aber für ein gerades n würde

$(x-e)$

den Anfang macht. Dieser Bruch ist die Tangente des n fachen Bogens, wenn n ungerade ist, (II) und die verneinte Cotangente, wenn n gerade ist. (III) Im letzten Falle also bekömmt man die verneinte Tangente des n fachen Bogens, wenn man ihn umkehrt.

VI. Aus ⊙ wird $y = \frac{(s+x)^n - (s-x)^n}{(s-x)^n + (s+x)^n} s$,

(24) Wenn hier n ungerade ist, so ist auch

$y = \frac{(x+s)^n + (x-s)^n}{(x+s)^n - (x-s)^n} \cdot s$ welchen Ausdruck man in V fand, wo er die Tangente für das ungerade n bedeutet. Ist aber n gerade, so läßt sich 24 in $\frac{(x+s)^n - (x-s)^n}{(x+s)^n + (x-s)^n} \cdot s$ verwandeln.

Man heisse q, was hier in s multiplicirt wird; so ist für ein gerades n; aus IIII. — cot F = $\frac{s}{q}$ also der Werth von y den hier 24 giebt = $\frac{s}{-\cot F} \cdot s = \frac{+1}{\cot F} = +$ tang F. Diese Gleichung 24 giebt also in beyden Fällen tang F.

$(s+x)^n = s^n + A s^{n-1} \cdot x + B s^{n-2} \cdot x^2 \ldots$

$(s-x)^n = s^n - A s^{n-1} \cdot x + B s^{n-2} \cdot x^2 \ldots$

also $y = \frac{A s^{n-1} x + C s^{n-3} x^3}{s^n + B s^{n-2} x^2 \ldots} \cdot s$ wo der Zähler

ler aus den geraden der Nenner aus den ungeraden Gliedern von $(x + s)^n$ besteht.

VII. Es sey n ungerade, so dividire man den Nenner durch s; und man bekömmt;

$y = \frac{\pm Ax \mp Cx^3 \ldots}{\pm 1 \mp Bxx \ldots}$ die obern oder die untern Zeichen, nachdem $n - 1$ ein Product aus 2 in eine gerade oder in eine ungerade Zahl ist. (326)

Aber $\frac{-Ax + Cx^3 \ldots}{-1 + Bxx \ldots} = \frac{+Ax - Cx^3 \ldots}{+1 - Bxx \ldots}$

also gilt allemahl folgende Regel: Man mache einen Bruch, dessen Zähler aus den geraden, der Nenner aber aus den ungeraden Gliedern von $(1 + x)^n$ besteht, die Zeichen der Theile im Zähler und Nenner aber abwechseln, daß das erste $+$ ist. Dieser Bruch ist tang F.

VIII. Es sey n gerade, so multiplicire man in VI den Zähler mit s; Dieses giebt

$y = \frac{\pm Ax \mp Cx^3}{\pm 1 \mp Bxx}$; die obern oder untern Zeichen, nachdem n ein Product aus 2 in eine gerade oder in eine ungerade Zahl ist. Es ist aber wiederum $\frac{-Ax + Cx^3 \ldots}{-1 + Bxx \ldots} = \frac{+Ax - Cx^3 \ldots}{+1 - Bxx \ldots}$

wo also eben die vorige Regel (VII) gilt, weil y eben das bedeutet (VI)

Exempel.

VIIII. Für $n = 5$; wird (V) $\frac{x^5 - 10x^3 + 5x}{5x^4 - 10xx + 1}$ = der Tangente des fünffachen Bogens.

Wenn $E = 30$ Gr. so $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und der Bruch $= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(\frac{1}{9} - \frac{10}{3} + 5)}{\frac{1}{9} - \frac{10}{3} + 1} = -\frac{1}{\sqrt{3}} =$ tang 150°

X. Für $n = 4$ ist (V) $y = \frac{x^4 - 6xx + 1}{4x^3 - 4x}$

$= -$ cot 4 E also $\frac{4x.(xx-1)}{x^4 - 6x^2 + 1} = -$ tang 4 E

Wenn $E = 30$ Gr; ist, giebt dieses $\frac{4}{\sqrt{3}}$

$\left(\frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{9} - 2 + 1}\right) = +\sqrt{3} =$ tang 60 Gr. $=$ tang 120 Gr.

XI. Für $n = 5$ kömmt aus (VIII)

$\frac{5x - 10x^3 + x^5}{1 - 10x^2 + 5x^4}$ wie VIIII nur rückwärts gesetzt, und eben so für $n = 4$ wie X nur dem Werthe in X entgegengesetzt.

XII. Für $n = 6$ ist der umgekehrte Bruch

$\frac{6x^5 - 20x^3 + 6x}{x^6 - 15x^4 + 15xx - 1} = -$ tang 6 E

Ist

Ist E = 45° so wird der Nenner = 0 und der Zähler = — 8 also der Bruch ein vermeintes Unendliches. Aber tang 6. $\frac{1}{2}$R = tang 270 Gr. ist ein bejahtes Unendliches: (Trig. 4 Erkl. 2 Zus.)

XIII. Anm. Joh. Bernoulli, der diese Methode Act. Erud. Lipſ. Iun. 1712. (Op. T. I. n. 89.) bekannt gemacht hat, redet, als wenn 331 V. für ein gerades n die Cotangente ſelbſt gäbe. Hieſſe dieſe Cotangente $= q = \frac{1}{y}$ ſo wäre $\frac{s-x}{s+y} = \frac{sq-1}{sq+1} = \left(\frac{s-x}{s+x}\right)^n$ wo man keine Gleichung zwiſchen x und q bekäme, die der ♂ zwiſchen x und y ähnlich wäre wie in III. Eben ſo wenig würde man dergleichen erhalten, wenn man die Gleichung $\frac{dy}{1+yy} = dF = -\frac{dq}{1+qq}$ $= \frac{n\,dx}{1+xx}$ integrirte; da $\int -\frac{dq}{1+qq}$ ſo müßte genommen werden, daß x = 0 für q = ∞ wäre, dieſes gäbe $\frac{ns}{2}\,l\,\frac{1-xs}{1+xs} = -\frac{s}{2}\,l\,\frac{1-qs}{1+qs} +$ Conſt. und für q = ∞; $\frac{ns}{2}\,l\,1$ oder $0 = -\frac{s}{2}\,l - 1 +$ Conſt (9) alſo Conſt $= \frac{s}{2}\,l - 1$, und $n\,l\,\frac{1-sx}{1+sx}$ $= l - 1 + l\,\frac{1+qs}{1-qs} = l\,\frac{1+qs}{qs-1}$ woraus eben das folgt, was man bekömmt, wenn man $\frac{1}{q}$ ſtatt y in ⊙ ſetzt. Alſo muß man nicht eine Gleichung zwiſchen x und q = + cot F; ſondern zwiſchen x und z = — cot F ſuchen. (381. III.) wie auch die Exempel (381. X; XII) die Bernoulli ebenfalls gebraucht hat, zeigen.

Ad Fratrem, Christian. Gotthold Eschenbach, Ph. et Med. D. Ordinariam Chemiae Professionem adeuntem, epistola Hieronymi Christophori Vilelmi Eschenbach Art. Magistri. Inest in locum Kaestnerianum de multipli angulorum tangentibus commentatio. Lips. 1788. Die bisherigen Sätze werden entwickelt wobey besonders die Bezeichnungen aus Hr. Pr. Hindenburgs combinatorischer Analytik dienlich sind.

Beweis daß jeder Zahl unzählich viele Logarithmen zugehören.

332. I. Jede mögliche bejahte Zahl b, kann als b. 1 betrachtet werden. Sie hat gewiß einen möglichen Logarithmen; derselbe heisse L; Aus der Lehre der Logarithmen ist $\log b = L + \log 1$; kann also $\log 1$ noch mehr Werthe haben als 0; so giebt jeder zu L einen andern für $\log b$; und $\log b$ hat also soviel Werthe als $\log 1$ haben kann. Folglich darf man nur die Werthe von $\log 1$ suchen.

II. Aus 328; ist $2a\sqrt{-1} = l\frac{\sqrt{-1}-q}{\sqrt{-1}+q}$

Es braucht keinen Beweis daß $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = 1$; bedeutet also a den Bogen dessen Tangente $= 0$; so ist $2a\sqrt{-1} = l\,1$; und $l\,1$ hat soviel Werthe als dieser Bogen haben kann.

III.

III. Nun ist zwar ein Bogen dessen Tangente $= 0$ ist, selbst $= 0$; also 2. 0. $\sqrt{-1} = l\,1$ oder $l\,1 = 0$; aber es gehört auch, für den Halbmesser $= 1$; die Tangente 0; zu dem Bogen π; 2π; 3π; ... $n\pi$, wo n jede ganze bejahte Zahl bedeuten kann. (Alg. 614) Folglich ist für

$a = 0$	π	2π	... $n\pi$
$l\,1 = 0$	$2\pi\sqrt{-1}$	$4\pi\sqrt{-1}$	$2n\pi\sqrt{-1}$

IIII. Eben so ist in II; $-2a\sqrt{-1} = l\frac{\sqrt{-1}+q}{\sqrt{-1}-q}$ für $q = 0$ wird dieses $-2a\sqrt{-1} = l\,1$; und also ist auch $l\,1 = -2n\pi\sqrt{-1}$

V. Also ist in (I) $\log b = L \pm 2n\pi\sqrt{-1}$, welches soviel Werthe hat als n haben kann, das ist unzählich viel; alle unmöglich auser für $n = 0$.

VI. In (328 I) setze man $q = \infty$ wenn nun a den Bogen bedeutet dessen Tangente unendlich ist, so ist $\frac{2a}{\sqrt{-1}} = l - l$; und wenn man die in (IIII) angezeigte Veränderung macht, auch $\frac{-2a}{\sqrt{-1}} = l - l$; Es ist aber $a = \frac{1}{2}\pi$; oder $\frac{3}{2}\pi$, oder $\frac{5}{2}\pi$ ... oder $\frac{2m+1}{2}\pi$; also $l -$

$1 = \frac{\pm(2m+1)\pi}{\sqrt{-1}}$ welche unzählichen Werthe alle unmöglich sind.

Wenn m, n, jedes $= 0$ werden kann, so kann $l\,1 = p$ werden (III) aber nicht $l - 1$;

Vom Co. Giordano Riccati findet sich eine Abhandlung in Memorie della Società Italiana T. IV. p. 116. (Verona 1788). Il nullo imaginario non può confondersi col reale. Wo auch diese Anwendung auf den Logarithmen der bejahten und der verneinten Einheit vorkömmt. Imgleichen auf die Conchoide (An. endl. Gr. 489) Schwierigkeiten, wenigstens Paradoxen, entstehn, wenn man sich die Bedeutung der Zeichen nicht gehörig entwickelt, aus künstlichen, weitläuftigen Rechnungen lernen will, was man zu Anfange der Rechnungen wissen konnte, wie: ob $l\,1 = 0$ und $l - 1$ unmöglich ist, (213; XX) um Grundlehren die Zeichen befragt, anstatt den Grundlehren gemäß die Zeichen zu brauchen.

VII. Eine verneinte mögliche Zahl, $-b$; kann angesehn werden als ein Product aus einer bejahten $+b$ in -1; Ihr Logarithme ist also $lb + l - 1$ oder aus (V)

$= L \pm 2n\pi\sqrt{-1} \mp (2m+1)\pi\sqrt{-1}$

$= L \pm (2n - 2m - 1)\pi\sqrt{-1}$; da kann der unmögliche Factor nie verschwinden, weil eine ungerade und eine gerade Zahl einander nie aufhe-

ben

den können. Also hat eine verneinte Zahl nur unmögliche Logarithmen.

VIII. Wenn ein Logarithme $f + g\sqrt{-1}$ gegeben ist, die Zahl x die ihm zugehört zu finden.

Weil $f + g\sqrt{-1} = lx$ so ist $e^{f+g\sqrt{-1}} = x$ dieses mit 330 verglichen giebt $g =$ dem dortigen a; und $x = e^f . (\cos g + \sqrt{-1} . \sin g)$

VIIII. Soll der gegebene Logarithme möglich seyn, so setzt man $g = 0$.

X. Wenn $e^f = x$; so darf man für x nicht die verneinten oder unmöglichen Werthe nehmen die e^f etwa haben könnte, z. E. wenn $f = \frac{1}{2}$ setzt man nicht $x = -\sqrt{e}$, welchen von $\sqrt{e}$ der Logarithme nicht die mögliche Grösse $\frac{1}{2}$ seyn kann (VII). Eben so, wenn $f = \frac{1}{3}$ nimmt man für x keinen der beyden unmöglichen Werthe von $\sqrt[3]{e}$; die $\frac{\sqrt[3]{e} . (-1 \pm \sqrt{-3})}{2}$ sind (Alg. 242) weil dieser unmöglichen Grössen Logarithme nicht möglich seyn könnte. Man versteht nehmlich unter x nur den bejahten Werth den e^f hat, nicht jeden andern.

XI. Es ist klar daß hier zu einer Ordinate QD; nicht mehr als eine Abscisse QA zu finden ist; und eine Linie in der Weite DQ mit der Asymptote parallel, die logarithmische Linie nur in einem Puncte schneidet, und daß überhaupt

keine gerade Linie kann gezogen werden welche die logarithmische in unzählich viel Puncten schnitte. Das Merkmahl transcendentischer Linien Anal. endl. Gr. 577. lässe sich also hier nicht anbringen, und doch ist die logarithmische Linie eine transcendentische; denn liesse sich bey ihr zwischen x und y eine algebraische Gleichung finden davon die $ydx = ady$ (216). die Differentialgleichung wäre, so wäre x eine algebraische Function von y; das ist, jede Zahl y hätte nur eine gewisse Menge Logarithmen, nicht unzählich viel; wieder (II).

XII. Dieses zu erklären setze man in der 42 Fig. würden Abscissen senkrecht, Ordinaten der Asymptote parallel gezogen, daß also dem Puncte D; auf AB eine Abscisse $= QD = y$; und eine durch D mit AQ parallel gezogene Ordinate $= QA = x$ zugehörte. Auf diese Art gehört zu jeder Abscisse $= y$; eine mögliche Ordinate $= x$; aber unzählich viel unmögliche; und weil diese unmöglichen keine Schenkel der krummen Linie geben, so giebt es auch nur einen möglichen Durchschnitt dieser Ordinate mit der krummen Linie, die übrigen sind als unmöglich anzusehn. Die logarithmische Linie hat also, so zu reden, einen möglichen Schenkel und unzählich unmögliche. So hat die neilische Parabel (268) für jedes x nur ein mögliches y, oder nur einen möglichen Schenkel und zweene unmögliche. (An. endl. Gr. 240) So lässt sich diese Beschaffenheit der logarithmischen Linie mit An. endl. Gr. 576 vergleichen.

Allge-

Allgemeiner Ausdruck der Seiten ordentlicher Vielecke.

333. Aufg. Den Umfang des Kreises durch Logarithmen auszudrucken.

Aufl. I. Wenn man in (328); $q = 1$ setzet, so ist der Bogen von 45 Graden $= \frac{\varepsilon}{2} l \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

Es ist aber $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{(1-\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon).(1-\varepsilon)} = -\varepsilon$;

also dieser Bogen $= \frac{\sqrt{-1}}{2} l - \sqrt{-1}$. Dieser Ausdruck aber ist weiter zu nichts zu brauchen. Der halbe Umkreis ist viermahl so groß; also $\sqrt{-1}.2.l(-\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}.l-1$; wie in 332; VI; für $m = 0$

II. Man setze $q = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{tang } 30\,\text{Gr}$; so ist dieser Bogen nach dem zweyten Ausdrucke 328; $= \frac{1}{2\varepsilon} l \frac{\varepsilon - 1 : \sqrt{3}}{\varepsilon + 1 : \sqrt{3}}$ der Bruch unter dem logarithmischen Zeichen wird $= \frac{\varepsilon\sqrt{3}-1}{\varepsilon\sqrt{3}+\varepsilon}$

$= \frac{-\sqrt{3}-\varepsilon}{-\sqrt{3}+\varepsilon}$ also der Bogen von 30 Gr. $=$

$3 \cdot \frac{1}{2\varepsilon}$.

$\frac{1}{2\varepsilon} \cdot l \frac{\sqrt{3}+\varepsilon}{\sqrt{3}-\varepsilon}$ und der halbe Umfang $= \frac{\pi}{\varepsilon} l \frac{\sqrt{3}+\varepsilon}{\sqrt{3}-\varepsilon}$.

III. Folglich der ganze $= \frac{3}{\varepsilon} \cdot l \left(\frac{\sqrt{3}+\varepsilon}{\sqrt{3}-\varepsilon}\right)^2 = \frac{3}{\varepsilon} l \frac{1+\varepsilon\sqrt{3}}{1-\varepsilon\sqrt{3}}$

334. Aufg. Die Tangente x von $\frac{1}{n}$ des halben Umfangs zu finden.

I. Aufl. Bog tang $x = \frac{3}{n\varepsilon} l \frac{\sqrt{3}+\varepsilon}{\sqrt{3}-\varepsilon}$ (333 II) $= \frac{1}{2\varepsilon} \cdot l \frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + x}$ folglich $\frac{6}{n} l \frac{\sqrt{3}+\varepsilon}{\sqrt{3}-\varepsilon} = l \frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + x}$ daraus findet sich, die Zeichen der Logarithmen weggelassen, nach gehöriger Rechnung

$$x = \varepsilon \cdot \left(\frac{(\sqrt{3}-\varepsilon)^{6:n} - (\sqrt{3}+\varepsilon)^{6:n}}{(\sqrt{3}+\varepsilon)^{6:n} + (\sqrt{3}-\varepsilon)^{6:n}} \right)$$

II. Weil die Seiten eines Vielecks, das um den Kreis beschrieben ist, mit ihren mittlern Puncten den Kreis berühren; so ist 2x die Seite eines Vielecks, das um den Kreis beschrieben ist,

ist, und dessen Winkel am Mittelpunkte $\frac{2}{n}$ des halben oder $\frac{1}{n}$ des ganzen Umkreises ist, oder das n Seiten hat.

So ist für $n = 6$ die Seite des um den Kreis beschriebenen Sechsecks $\pm \frac{+2}{\sqrt{3}}$ als die doppelte Tangente von 30 Gr.

III. Weil $(\sqrt{3} - \varepsilon).(\sqrt{3} + \varepsilon) = 4$; so ist $1 + xx = 4.\ 4^{6:n}:\ ((\sqrt{3} + \varepsilon)^{6:n} + (\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n})^2$ und die Seite des ähnlichen Vielecks, das in dem Kreis beschrieben ist, oder $\frac{2x}{\sqrt{(1 + xx)}}$ ist $= \left((\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{-1})^{6:n} - (\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{-1})^{6:n} \right) \sqrt{-1}$. Diese Formel giebt Cramer in den Anmerk. zu Jac. Bernoullis Werken 74 Num. 765 Seite ohne Beweis.

Für $n = 6$ wird sie $= +1$.

335. Aufg. Eine Gleichung zwischen des Winkels φ Sinus b; Cosinus β; und des Winkels n. φ Sinus p; Cosinus π zu finden.

Aufl. In ⊙ 331 setze man $x = \frac{b}{\beta}$; $y = \frac{p}{\pi}$ so kömmt $\left(\frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b}\right)^n = \frac{\varepsilon\pi - p}{\varepsilon\pi + p}$. Aber

$\varepsilon\beta$

$\frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b} = \frac{-\beta - b\varepsilon}{-\beta + b\varepsilon} = \frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon} =$
$\frac{(\beta + b\varepsilon)^2}{(\beta - b\varepsilon)(\beta + b\varepsilon)} = (\beta + b\varepsilon)^2$. Alſo
$(\beta + b\varepsilon)^{2n} = (\pi + p\varepsilon)^2$ oder $\left(\text{cof}\,\phi \pm \text{ſin}\,\phi . \sqrt{-1}\right)^n = \text{cof}\,n\phi \pm \text{ſin}\,n\phi . \sqrt{-1}$; die Zweydeutigkeit der Zeichen folgt aus (Alg. 32). So iſt, für $n = 2$; $(\text{cof}\,\phi \pm \text{ſin}\,\phi \sqrt{-1})^2 \pm \text{cof}\,\phi^2 - \text{ſin}\,\phi^2 \pm 2\,\text{cof}\,\phi\,\text{ſin}\,\phi \sqrt{-1} = \text{cof}\,2\phi \pm \text{ſin}\,2\phi \sqrt{-1}$ (Trig. 19 S. 5 Z.

336. Aufg. Die unendliche Reihe, welche den Sinus durch den Bogen giebt (285) in Factoren zu zerfällen.

Aufl. I. Der Sinus ſoll y heiſſen. Er iſt aber $= a.\left(1 - \frac{1}{1.2.3}a^2 + \frac{1}{1.2.3.4.5}a^4 .. \frac{\pm a^{2n}}{1.2.3 \ldots 2n.(2n+1)} \ldots .\right)$ wo ich für die Reihe S ſchreiben, alſo $y = a.S$ ſetzen will. Das obere Zeichen gilt im letzten Gliede, wenn n gerade, das untere, wenn n ungerade iſt. Weil die Reihe unendlich iſt, ſo kann n ſo groß als man will, oder unendlich angenommen werden.

II. Weil $\frac{y}{a} = S$ und $S = 1$ für $a = 0$ ſo folgt, daß der verſchwindende Bogen ſeinem Si-

nus

aus gleich ist. Eben das folgt aus 22. wenn man aus der dortigen Reihe den Quotienten sucht, den der Bogen, mit dem Sinus dividirt, giebt, und den Sinus alsdenn $= o$ setzt.

III. Auser diesem Falle giebt es aber noch unzählich viele, da nicht der Bogen, aber der Sinus $= o$ würde, wenn nähmlich der Bogen dem einfachen, doppelten, dreyfachen u. s. f. halben Umkreise gleich wird. Der halbe Umkreis heisse c; so wird $\frac{y}{a}$ oder $S = o$ so oft als $x = c$ oder $2c$ oder $3c \ldots$ oder nc wo n unendlich ist (I). Man kann also $S = o$ als eine Gleichung betrachten, die unzählich viel Wurzeln, und darunter die genannten hätte.

IIII. Um aber hier nach dem, was wegen der Gleichungen ist gelehret worden, zu verfahren, so muß das höchste Glied der Gleichung $S = o$ nur 1 zum Coefficienten haben. Man muß also alle Glieder mit $1.2.3 \ldots (2n+1)$ multipliciren; dieses giebt $1.2.3 \ldots (2n+1) - 4.5 \ldots (2n+1)a^2 + 6.7 \ldots (2n+1)a^4 \ldots + a^{2n}$ welches ich T nennen will $= S.1.2.3 \ldots (2n+1)$

V. Erster Fall. Wenn man n als gerade ansieht; da das obere Zeichen gilt (I) und $T = o$ also völlig die Beschaffenheit einer Gleichung von $2n$ Graden hat, da nur das höchste Glied zuletzt steht. Weil a in dieser Gleichung lauter gerade

Expo-

Exponenten hat, so giebt es für jede bejahte Wurzel dieser Gleichung auch eine verneinte, die nur der bejahten entgegengesetzt, sonst mit ihr von einerley Grösse ist. Also hat die Gleichung nebst den nur genannten Wurzeln $+c$; $+2c$.. $+nc$ auch die $-c$; $-2c$; .., $-nc$; und da die Zahl dieser Wurzeln zusammen $2n$ ist, so sind das ihre Wurzeln alle. Sie entspringt also aus den $2n$ Wurzelgleichungen $(a-c)$. $(a+c)$. $(a-2c)$. $(a+2c)$ ... $(a-nc)$. $(a+nc)$ (Alg. 224) oder T ist ein Product aus den n Factoren $(aa-cc)$. $(aa-4cc)$ $(aa-9cc)$.. $(aa-nnc)$

VI. Die letzten Theile dieser n Factoren mit einander multiplicirt geben, $+c^{2n}$. 1. 4. 9... nn, bejaht; weil ihre Zahl gerade ist. Dieses Product ist so groß als das Glied der Gleichung, das die unbekannte Grösse nicht enthält, (Alg. 219) also $= 1.2.3...(2n+1)$. (IIII).

VII. Weil n gerade ist, so kann man statt jedes Factors (V) auch den entgegengesetzten nehmen; und bekommt $T=(cc-aa).(4cc-aa).(9cc-aa)..(nncc-aa)$ also auch $T=cc.$

$$\left(1-\frac{aa}{cc}\right).4cc.\left(1-\frac{aa}{4cc}\right).9cc.$$

$$\left(1-\frac{aa}{9cc}\right)....nncc.\left(1-\frac{aa}{nncc}\right)$$ oder

$T=$

$$T = c^{2n}.\ 1.\ 4.\ 9.\ \ldots\ nn.\left(1 - \frac{aa}{cc}\right)\cdot$$

$$\left(1 - \frac{2a}{4cc}\right)\cdot\left(1 - \frac{aa}{9cc}\right)\cdot\ldots\left(1 - \frac{aa}{nncc}\right).$$

Setzt man in diesem Werthe von T; 1. 2. 3. ... (2n + 1) statt c^{2n}. 1. 4. 9. . . nn (VI) so erhält man aus (IIII)

$$S = \left(1 - \frac{aa}{cc}\right)\cdot\left(1 - \frac{aa}{4cc}\right)\cdot\left(1 - \frac{aa}{9cc}\right)$$

$$\ldots\left(1 - \frac{aa}{nncc}\right)$$

VIII. Zweyter Fall. Wenn n ungerade, also das untere Zeichen gilt. Da ist aus (IIII) — S. 1. 2. 3. . . (2n + 1) = 1. 2. . . . (2n + 1) + 4. 5. . . . (2n + 1) a^2. . . + a^{2n} wo ich das, was zur rechten Seite des Gleichheitszeichens steht, zusammen V nennen will. Nun entsteht V wie vorhin T; aus einer ungeraden Zahl von n Factoren (aa — cc). (aa — 4cc) . . . (a^2 — nnc^2) deren letzte Theile als eine ungerade Menge verneinter Factoren, das Product — c^{2n}. 1. 4. . . nn geben, welches wie das ähnliche Product bey T vorhin, hier = — 1. 2. . 2n + 1 seyn muß. Weil ferner die Menge der Factoren aus denen V entsteht, ungerade ist, so ist, wenn man jedes entgegengesetzten nimmt, ihr Product (cc — aa). (4cc — aa). . . (nncc — aa)

$aa) = -V$ oder $cc.\left(1-\frac{aa}{cc}\right).4\,cc.$

$\left(1-\frac{aa}{4cc}\right)\ldots nncc.\left(1-\frac{aa}{nncc}\right)$ oder

$+c^{2n}.1.4.9\ldots nn.\left(1-\frac{aa}{cc}\right)\ldots$

$\left(1-\frac{aa}{nncc}\right)$ oder $+1.2.\ldots(2n+1).$

$\left(1-\frac{aa}{cc}\right)\ldots\left(1-\frac{a^2}{nnc^2}\right)=-V=$

$+S.1.2.\ldots(2n+1)$; also wieder $S=$

$\left(1-\frac{aa}{cc}\right)\ldots\left(1-\frac{aa}{nncc}\right)$

X. Es ist also überhaupt des Bogens a Sinus $= a.\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right).\left(1-\frac{a^2}{4c^2}\right).$

$\left(1-\frac{a^2}{9c^2}\right)\ldots\left(1-\frac{a^2}{n^2c^2}\right)$

337. Anm. I. Ich habe hier eine Erfindung Joh. Bernoullis Op. T. III. n. 152. vorgetragen, obwohl mit einigen Aenderungen; besonders wird, was ich (338; V.) von der Zahl der Wurzeln gesagt habe, eine Schwürigkeit heben, die sich der Erfinder a. a. O. Schol. 2. ohne Noth macht, ob nähmlich die Gleichungen, wie bey mir $T=0$; $V=0$; sind, auch noch andere Wurzeln als die angegebenen haben könnten. Anwendungen findet man a. a. O. und beym Euler;

ler; de Summis serier. reciprocarum Comm. Acad. Petrop. T. VII. p. 124. Euler hat diesen Ausdruck des Sinus aus andern Gründen hergeleitet Introd. in Anal. inf. L. I. §. 158.

II. Daß $y = 0$ wird, wenn der Bogen $\pm c$; $\pm 2c$ u. s. w. ist, hängt mit den Begriffen der Trigonometrie so zusammen. Wenn in der Trigonometrie 1 Fig. DE des Bogens AD Sinus ist, so ist $FE = -DE$ der Sinus des Bogens AF welcher dem AD entgegengesetzt, also $= -AD$ ist. Der Bogen, der vom Anfange von welchem die Bogen gerechnet werden, nicht nach der Seite nach der man die Bogen ordentlich nimmt, sondern nach der entgegengesetzten genommen wird, ist verneint. Dergleichen wäre in der Ekliptik ein Bogen von o ♈ unmittelbar durch das Zeichen)(durch; dieser Bogen wäre nicht + 30 Gr. sondern − 30 Gr. Ein solcher verneinter Bogen hat vermöge des Erwiesenen auch einen verneinten Sinus, der auser dieser Entgegensetzung dem Sinus des bejahten gleich ist. Folglich haben auch die Bogen $+c$; $-c$; oder Trig. 1 Fig. ADHB; AFhb; und eben so $+2c$; $-2c$; u. s. w. entgegengesetzte, sonst gleiche Sinus. Weil aber die Sinus der bejahten von diesen Bogen $+ o$ sind, und bejahte und verneinte o einerley sind, so sind dieser Bogen Sinus alle $= o$, und also wird $y = o$ auch wenn man die verneinten Vielfache des halben Umfanges statt des Bogens setzt.

338. Aufg. Die Reihe für den Cosinus (296) in Factoren zu zerfällen. Ich will diese Reihe S heissen; daß also a. a. O. $x = S$ ist.

Aufl. I. Es ist $x = o$; für $a = \frac{1}{2}c$; $\frac{1}{2}c$; $\frac{1}{2}c \ldots \frac{2n-1}{2}c$ wo n unendlich ist; und eben

so für eben dieselben verneinten Werthe; weil die Reihe lauter Potenzen gerader Exponenten des Bogens enthält. Eben das erhellt auch aus einer Betrachtung wie in 340. daß also die Gleichung $S = 0$; $2n$ Wurzeln, oder n Paare entgegengesetzter sonst gleicher Wurzeln hat. Alles dieses folgt aus Schlüssen wie 338; III; V;

II. Aus der Ursache (338; IIII.), mache man $1.2.3...2n.\ S = +1.2.3...2n - 3.4...2n.a^2 ..... \pm a^{2n} = T$ wo das obere oder untere Zeichen gilt, nachdem n gerade oder ungerade ist.

III. Es sey n gerade; so ist (wie in 338; V) $T = (a^2 - \frac{1}{4}c^2).(a^2 - \frac{9}{4}c^2) ....$ $\left(a^2 - \frac{(2n-1)^2}{4}c^2\right)$. Das Product aus den letzten Theilen aller dieser Factoren, ist $= \left(\frac{c}{2}\right)^{2n}.\ 1.9.25...(2n-1)^2 = 1.2.3....2n$ (wie in 338; VI) Es ist aber auch (wie in 338; VII.) $T = (1.\frac{1}{4}c^2 - a^2).(9.\frac{1}{4}c^2 - a^2)....((2n-1)^2.\frac{1}{4}c^2 - a^2) = \frac{1}{4}c^2\ 1.\left(1 - \frac{4a^2}{cc}\right).\frac{1}{4}c^2.9.\left(1 - \frac{4a^2}{9c^2}\right)....$ $\frac{1}{4}c^2.(2n-1)^2.\left(1 - \frac{4a^2}{(2n-1)^2c^2}\right) =$ $\left(\frac{c}{4}\right)$

$$\left(\frac{c}{4}\right)^{2n} \cdot 1.9.\ldots.(2n-1)^2.\left(1-\frac{4a^2}{c^2}\right).$$

$$\left(1-\frac{4a^2}{9c^2}\right).\ldots.\left(1-\frac{4a^2}{(2n-1)^2.c^2}\right)$$

Setzt man hier $1.2.3\ldots 2n$ statt des Factors $(\frac{1}{4}cc)^{2n}.1.9\ldots(2n-1)^2$ so erhält man S oder $x = \left(1-\frac{4a^2}{c^2}\right).\left(1-\frac{4a^2}{9c^2}\right).$

$$\left(1-\frac{4a^2}{25c^2}\right).\ldots.\left(1-\frac{4a^2}{(2n-1)^2c^2}\right).$$

IIII. Für ein ungerades n; ist

$$S = 1 - \tfrac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4.3.2}a^4.\ldots.. - \frac{1}{2n.(2n-1)\ldots.1}a^{2n}$$ (296) also $-1.2.3\ldots 2n.S = -1.2.3\ldots 2n + 3\ldots 2n\,a^2 - 5\ldots.2n\,a^4.\ldots + a^{2n} = V$

Hier ist $V = (a^2 - \frac{1}{4}c^2).(a^2 - \frac{9}{4}c^2)\ldots(a^2 - \frac{(2n-1)^2}{4}c^2)$ in ungerader Zahl Also $-V = (\frac{1}{4}c^2 - a^2).(\frac{9}{4}c^2 - a^2)\ldots\left(\frac{(2n-1)^2}{4}c^2 - a^2\right) = \frac{1}{4}c^2.\left(1-\frac{4a^2}{c^2}\right).\frac{9}{4}c^2.\left(1-\frac{4a^2}{9c^2}\right)$

$\frac{4a^2}{9c^2}\Big)\ldots\frac{(2n-1)^2}{4}c^2\Big(1-\frac{4a^2}{(2n-1)^2c^2}\Big)$

$=1.2.\ldots.(2n-1)^2.\Big(\frac{c^2}{4}\Big)^n.\Big(1-\frac{4a^2}{c^2}\Big).$

$\Big(1-\frac{4a^2}{9c^2}\Big)\ldots\Big(1-\frac{4a^2}{(2n-1)^2c^2}\Big)$

Nun ist $1.2.(2n-1)^2.\Big(\frac{c^2}{4}\Big)^n$ = dem Gegentheile, (weil n ungerade ist) von $-\frac{1}{4}c^2.-\frac{9}{4}c^2.\ldots.-\frac{(2n-1)^2}{4}c^2$ oder dem Gegentheile des letzten Gliedes der Gleichung $V=0$; (Alg. 219) also $=+1.2.3.\ldots.2n$ Folglich $-V=+1.2.3.\ldots.2n\Big(1-\frac{4a^2}{c^2}\Big).$

$\Big(1-\frac{4a^2}{9c^2}\Big).\ldots.\Big(1-\frac{4a^2}{(2n-1)^2c^2}\Big)$

Aber $-V=+1.2.3\ldots2n.S.$ also $+S=+\Big(1-\frac{4a^2}{c^2}\Big)\Big(\frac{1-4a^2}{9c^2}\Big).\ldots.\Big(1-\frac{4a^2}{(2n-1)^2c^2}\Big)$

Wie für das gerade n.

V. $\frac{x}{\frac{1-2a}{c}}=\Big(1+\frac{2a}{c}\Big).\Big(1-\frac{4a^2}{9c^2}\Big).\Big(1-$

$4a^2\Big)$

$\frac{4a^2}{9c^2}\Big) \ldots . \left(1 - \frac{4a^2}{(2n-1)^2 c^2}\right)$

Aber $\frac{x}{1-\frac{2a}{c}} = \frac{\frac{1}{2}cx}{\frac{1}{2}c-a} = \frac{\frac{1}{2}c.\cos a}{\frac{1}{2}c-a} -$

$= \frac{\frac{1}{2}c.\sin(\frac{1}{2}c-a)}{\frac{1}{2}c-a} = \frac{\frac{1}{2}c.\sin b}{b}$; Wenn $\frac{1}{2}c$ $-a=b$. Nun ist $\frac{\sin b}{b} = 1$ für $b=0$ oder $c=2a$; (283) da denn $\frac{4a^2}{(2n-1)^2.c^2} =$ $\frac{1}{(2n-1)^2}$ und $\frac{1}{2}c.\frac{\sin b}{b}$ oder $\frac{1}{2}c = (1+1).$ $(1-\frac{1}{9}).(1-\frac{1}{25}). \ldots . \left(1 - \frac{1}{(2n-1)^2}\right)$ also $\frac{1}{4}c = (1-\frac{1}{9}).(1-\frac{1}{25}). \ldots .$

339. Aus diesen Zerfällungen folgt

I Aus der 336 Weil $\sin a = a.S$, so ist (330) $\frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2} = a\sqrt{-1}.S$; Es sey $a\sqrt{-1} = x$ also $a^2 = -x^2$ so ist $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $= x.\left(1+\frac{x^2}{c^2}\right).\left(1+\frac{x^2}{4c^2}\right).\left(1+\frac{x^2}{9c^2}\right).$ $\left(1+\frac{x^2}{n^2c^2}\right)$ oder auch, wenn der erste Aus-

druck für S, im Anfange von 336 gebraucht wird:

$e^x - e^{-x} = x.\left(1 + \frac{1}{1.2.3}x^2 + \frac{1}{1.2.3.4.5}x^4 \ldots\ldots\right)$ beydes wie beym Euler Introd. L. I. §. 156.

II Aus der 338. Weil nun $\cos a = S$; so ist (330) $\frac{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}{2} = S$; also wenn $x = a\sqrt{-1}$ und $x^2 = -a^2$ und $a = -x\sqrt{-1}$; $a^2 = -x^2$

$e^x + e^{-x} = 2\left(1 + \frac{4x^2}{c^2}\right).\left(1 + \frac{4x^2}{9c^2}\right)$ ..... $\left(1 + \frac{4x^2}{(2n-1)^2.c^2}\right)$ oder (296) $= 2\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4.3.2} + \frac{x^6}{6.5.4.3.2} + \frac{x^8}{8.7.6.5.4.3.2} \ldots\ldots\right)$ wo alle Glieder der Reihe 296 das Zeichen + bekommen.

Wie die Logarithmen der trigonometrischen Linien gefunden werden.

340. Aufg. Den hyperbolischen Logarithmen des halben Umfangs zu finden.

Aufl.

Aufl. Aus (3) ist er; $l\,4 + l\,(1 - \frac{1}{9}) + l\,(1 - \frac{1}{25}) \ldots$ Jeden dieser Logarithmen findet man, wenn man in $l\,(1 - u)$ (223); nach und nach $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{49}$; ... statt u setzt. Und weil die folgenden dieser Brüche z. E. $\frac{1}{81}$ ... immer kleiner und kleiner werden, so nähert sich die Reihe für $l\,(1 - u)$ bey jedem folgenden Bruche, schneller als bey dem nächstvorhergehenden; und jede folgende Zahl wie $1 - \frac{1}{81}$ kömmt der Einheit näher als die nächstvorhergehende, also ihr Logarithme dem 0; daher die folgenden Logarithmen immer kleiner als die vorhergehenden werden und die Reihe sich nähert.

341. Aufg. Den Logarithmen eines Sinus und Cosinus zu finden.

Aufl. I. Wenn man $z = \frac{mc}{2n}$ setzt, so ist

II. Aus 338. X. $\sin \frac{mc}{2n} = \frac{mc}{2n} \cdot \left(1 - \frac{m^2}{4n^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{m^2}{9n^2}\right) \ldots$ also $l \sin \frac{m.c}{4.n} = lc + l\frac{m}{2n} + l\left(1 - \frac{m^2}{4n^2}\right) + l\left(1 - \frac{m^2}{9n^2}\right) \ldots$

III. 341. $\cos\frac{mc}{2n} = \left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\cdot\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right)\cdot\left(1-\frac{m^2}{25n^2}\right)\cdot\ldots\ldots$ also

$$l\cos\frac{mc}{2n} = l\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)+l\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right)+l\left(1-\frac{m^2}{25n^2}\right)\ldots$$

Weil nun $\frac{m}{2n}$ allemahl ein eigentlicher Bruch ist, den man auch kleiner als $\frac{1}{2}$ annehmen kann, daß $\frac{m}{n} < 1$ wird, so findet man die Logarithmen des Sinus und des Cosinus wie in 343 und die Reihe der Logarithmen aus der jeder solcher Logarithme besteht, nähert sich wie dorten.

II. Aus diesen Logarithmen hat man blos durch Addition und Subtraction die Logarithmen der Tangenten und Secanten (Trig. 4. Erkl. 3. und 5. Zus. 5. Erkl. 1. Zus.) Und aus den hyperbolischen finden sich die briggischen nach (231).

III. Man kann die natürlichen Logarithmen auch durch ähnliche Zerfällungen der Reihen für die Tangenten und Secanten wie 338; 341; unmittelbar finden. Imgleichen giebt es Vortheile, die Logarithmen der Sinusse noch kürzer als durch die unmittelbare Anwendung der Reihe für $l(1-x)$ zu finden.

Die-

Dieſes, welches mir die Weitläuftigkeit hier beyzubringen nicht verſtattet, findet man, nebſt wirklichen Berechnungen beym Euler Introd. L. I. Cap. XI. Zum Unglücke für diejenigen, welche die trigonometriſchen Tafeln berechnet haben, ſind alle dieſe Kunſtgriffe ohngefähr hundert Jahr darnach erfunden worden, als ſie mit ihrer Arbeit fertig waren.

Quadratur der Ellipſe. Von Rectification der Ellipſe und der Hyperbel. Rectification der Parabel.

342. Lehnſatz. Potenzen eines Coſinus, deren Exponent eine ganze bejahte Zahl iſt, durch Coſinus des vielfachen Bogens auszudrucken.

I) In An. endl. Gr. 175, ſey $b = \cos v$; $a = \sin v$; ſo iſt

II) $\cos 2.v = 2.b^2 - 1$ alſo $b^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\cos 2.v$

III) $b^3 = 3.a^2.b + \cos 3.v$
$= 3.b - 3.b^3 + \cos 3.v$
alſo $b^3 = \frac{3}{4}b + \frac{1}{4}.\cos 3.v$

IV) $b^4 = 6.b^2 - 6.b^4 - (1 - b^2)^2 + \cos 4.v$
8. $b^4 = 8.b^2 - 1 + \cos 4.v$
$= 4 + 4.\cos 2.v - 1 + \cos 4.v$ (II)
alſo $b^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}.\cos 2.v + \frac{1}{8}.\cos 4.v$

V) $b^5 = 10.a^2.b^3 - 5.a^4.b + \cos 5.v$
$= 10.b^3 - 10.b^5 - 5.b + \cos 5.v$
$+ 10 \quad - 5$

16. $b^5 = 20.b^3 - 5.b + \cos 5.v$

$= \left.\begin{matrix}16\\-5\end{matrix}\right\} b + 5.\cos 3.v + \cos 5.v$

(aus III)

also $b^5 = \frac{1}{8}.b + \frac{5}{16}.\cos 3.v + \frac{1}{16}.\cos 5.v$

VI. Weiter fortzugehn darf man nur die Cosinus der vielfachen Bogen fortgesetzt haben.

VII. Aus (An. endl. 177) hat man folgendes: In dem Ausdrucke von $\cos n.v$ kann man den Sinus wegschaffen, weil von selbigem lauter Potenzen von geraden Exponenten vorhanden sind, so hat man $\cos n.v$ durch lauter Potenzen von $\cos v$. Da kann man, wie vorhin gewiesen ist, die höchste Potenz allemahl durch Cosinus vielfacher von v ausdrucken.

343. Fläche der Ellipse für Abscisse aus dem Mittelpuncte.

I. AMDK 38 Fig. ist eine halbe Ellipse, deren Mittelpunct C, halbe grosse Axe $= CA = CK = \frac{1}{2}a$ halbe kleine $CD = \frac{1}{2}c$; Abscisse aus dem Mittelpuncte $CP = u$; Ordinate $PM = y = \frac{c}{a}\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - u^2)}$ der Fläche CDMP Differential ist $= y.du$.

Ueber dem Durchmesser AK sey ein Halbkreis ANEK beschrieben, dessen Ordinate $PN = \frac{a}{c}.y$,

der

der Fläche CENP Differential $= c \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - u^2)}\, du$.

So verhalten sich die Differentiale der Kreisfläche und der elliptischen $= a : c$, diese Verhältniß bleibt für jedes Paar zusammengehörige Differentiale ungeändert, also ist $a : c = CENP : CDMP$, oder die elliptische Fläche $= \frac{c}{a} \cdot CENP$.

Man ziehe CN, und nenne den Winkel ECN $= \delta$.

So ist $\frac{2.u}{a} = \sin \delta$; $\frac{2.du}{a} = d \sin \delta$; $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - u^2)} = \frac{1}{2}a. \sqrt{\left(1 - \frac{4u^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{2}a. \cos \delta$

Also der Kreisfläche Differential $= \frac{1}{4}a^2. \cos \delta. d \sin \delta$ davon nach (274) das Integral die Kreisfläche $CENP = \frac{1}{16}a^2. (2.\delta + \sin 2\delta)$. Folglich die elliptische $CDMP = \frac{a.c}{16} \cdot (2.\delta + \sin 2.\delta)$

Für jedes u leicht zu berechnen.

Für $u = \frac{1}{2}a$ ist $\delta = 90°$ und der elliptische Quadrant $CDMA = \frac{a.c.\pi}{16}$

Also die Fläche der ganzen Ellipse $= \frac{a.c.\pi}{4}$

So groß als die Fläche eines Kreises dessen Durchmesser

messer die mittlere Proportionallinie zwischen beyden Axen wäre.

Wenn nun vom Quadranten die Fläche CDMP abzieht, so bleibt die Fläche AMP.

344. Ausschnitt aus dem Brennpuncte.

Man nehme in der grossen Axe einen Punct S; und ziehe SM; SN, so ist

$$\text{Fläche } KDMP = \frac{c}{a} \cdot \text{Fläche } KENP$$

$$\Delta PMS = \frac{c}{a} \Delta PNS$$

Also auf jeder Seite die beyden Grössen die unter einander stehen addirt:

Der elliptische Ausschnitt zwischen KS, SM, und dem Bogen $KM = \frac{c}{a}$ des Kreisausschnittes zwischen KS, SN und dem Bogen KN

Der Kreisausschnitt KSN, von der Fläche des Halbkreises abgezogen lässt den Kreisausschnitt ASN

Der elliptische Ausschnitt KSM von der Fläche der halben Ellipse abgezogen lässt den elliptischen Ausschnitt ASM.

Die Fläche der halben Ellipse ist $\frac{c}{a}$ Der Fläche des Halbkreises.

Also auch der elliptische Ausschnitt $ASM = \frac{c}{a}$ des Kreisausschnitts ASN.

Es

Es sey CS = e, so ist die Kreisfläche zwischen dem Bogen KN, und den geraden Linien KS, SN, = Ausschnitt KCN + ΔCNS = $\frac{1}{2}$. a². ($\frac{1}{2}\pi + \delta$) + $\frac{1}{4}$. a. e. cos δ

Also die elliptische Fläche zwischen dem Bogen KM und den geraden Linien KS, SM, = $\frac{1}{2}$. a. c. ($\frac{1}{2}\pi + \delta$) + $\frac{1}{4}$. e. c. cos δ Sie mag = Z heissen.

Man nenne den Winkel KSM = ζ; so ist

$$\text{tang } \zeta = \frac{PM}{PS} = \frac{\frac{1}{2}\text{. c. cos } \delta}{e - \frac{1}{2}\text{a. sin } \delta}$$

Für jedes u; ist der Winkel δ gegeben, durch ihn die elliptische Fläche KSM, und auch der Winkel KSM.

Wenn S der Brennpunct der Ellipse ist, und ein Planet in dieser Ellipse um die Sonne S geht, so heisst die Fläche ASM, mittlere Anomalie, und der Winkel ASM wahre Anomalie. (Astron. 245).

Für jede angenommene Abscisse aus dem Mittelpuncte, finden sich also die beyden zusammengehörigen Grössen.

Nach Keplers Entdeckung, verhält sich die Fläche der ganzen Ellipse, zur Fläche KSM, wie die ganze Umlaufszeit des Planeten, zu der welche er braucht von K bis M zu kommen. Die Bewegungen eines Planeten zu berechnen, nimmt man die Zeiten als gegeben an, und sucht daraus

den

den Winkel KSM, welcher des Planeten helio-centrischen Ort giebt (Astr. 259)

Liesse sich also δ aus der Gleichung zwischen Z und δ finden, so gäbe sich ζ durch δ.

Aber das erste lässt sich nicht bewerkstelligen, weil in genannter Gleichung, Winkel und Cosinus vorhanden sind, und eines durch das andere sich nicht algebraisch ausdrucken lässt.

Aus tang ζ liesse sich sin δ finden, also könnte man den Winkel KSM annehmen, und daraus die Fläche berechnen. Das wäre die Frage umgekehrt.

Wäre auch KDM ein Halbkreis, dessen Mittelpunct C; ein Punct auser ihm S, so bliebe in den Gleichungen für Z und tang ζ, noch e, nur wäre $c = a$; Also liesse sich auch der Winkel KSM nicht wohl aus der Fläche finden, wenn man gleich annähme der Planet ginge in einem eccentrischen Kreise, und beschriebe in gleichen Zeiten gleiche Räume um den Punct S.

Das hiesse: Im Kreise einen Raum KSM abzuschneiden, der sich wie die Zeit verhält, oder: Den Kreis aus S in gegebner Verhältniß theilen.

Zu Auflösung dieser Aufgabe ermuntert Keyser die Geometern, am Ende des IV. Theils seines Buchs, de motibus stellae Martis; p. 300. Mihi sufficit credere solui a priori non posse propter arcus et sinus ἀπροσγραπτον sagt er;

Daher

Daher heiſſt man die Aufgabe: Im Kreiſe, oder in der Ellipſe, aus mittlerer Anomalie die wahre zu finden, die kepleriſche.

Den erſten beyden Ausgaben gegenwärtigen Buchs fügte ich eine Auflöſung derſelben bey, nach Eulers Theoria motuum planetarum, et cometarum Berol. 1744; Man hat auch: Leonh. Eulers Theorie der Planeten und Cometen, von Joh. Freyh. v. Paucaſſi überſetzt, und mit einem Anhange und Tafeln vermehrt. Wien 1781.

Gewöhnlich rechnet man die Anomalien von der Sonnenferne K. Euler wollte ſeine Vorſchriften ſo einrichten daß ſie ſogleich auch für Kometen dienten, und rechnete von der Sonnennähe A; braucht alſo ASM ſtatt KSM; Es iſt leicht einzuſehn wie eins aus dem andern hergeleitet wird.

Auch braucht er nicht der Ellipſe kleine Axe, ſondern groſſe, und Parameter. Die groſſe unendlich geſetzt giebt dann die Parabel.

Wer ſich mit Aſtronomie beſchäfftiget muß doch mehr Methoden als Eulers ſeine kennen lernen, ich habe daher jetzo weggelaſſen, was blos als Uebung der Rechnung des Unendlichen, auſer der Wiſſenſchaft wo es eigentlich gebraucht wird, zu viel Raum einnahm. Man ſ. la Lande Aſtronomie L. VI. 1237. . . der II. Ausg.

345. Ausdruck der Fläche ASM = Z durch den Winkel ASM, der nun v heiſſen mag.

I. Die Excentricität $e = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}$ wird klein genommen, daß höhere Potenzen von ihr immer

immer weniger betragen. Die gerade Linie SM radius vector (Aſtr. 240) heiſſe $z = \frac{1}{2}. a - \frac{2. e. u}{a}$ (An. endl. 378) aber $e - u = z. \text{cof } v$, daraus $z = \frac{a^2 - 4. e^2}{2. a - 4. e. \text{cof } v}$

II. Wenn der Winkel um $MSm = dv$ wächſt, ſo wächſt die Fläche um $MSm. MR$, ein Bogen mit z beſchrieben, alſo $= z. dv$ kann als ein Perpendikel auf Sm angeſehen werden; die Dreyecke mRM, SRM verhalten ſich $= mR : RS$ das erſte verſchwindet alſo gegen das letzte, ſo iſt das Dreyeck $SRM = \frac{1}{2}. z^2. dv$ die Aenderung der Fläche, folglich $dZ = \left(\frac{a^2 - 4. e^2}{2. a - 4. e. \text{cof } v}\right)^2 . \frac{1}{2}. dv$

III. Man ſetze die halbe groſſe Axe $= \frac{1}{2} a = 1$, ſo iſt e ein kleiner Bruch dieſer Einheit; $z = \frac{1 - e^2}{1 - e. \text{cof } v}$; $dZ = \frac{1}{2}. (1 - e^2)^2 . \frac{1}{(1 - e. \text{cof } v)^2} . dv$ Man darf da nur den zweyten veränderlichen Factor integriren, und das Integral mit $\frac{1}{2}. (1 - e^2)^2$ multipliciren.

Man macht $(1 - e. \text{cof } v)^{2n}$. Bey den Potenzen von $e. \text{cof } v$ deren

Expo-

Exponenten | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 . . . n
Binomialcoefficienten | A | B | C | D | E . . .

So ist $A = -2$; $B = \frac{-2 \cdot -3}{1 \cdot 2} = +3$;

$C = +3 \cdot \frac{-4}{3} = -4$; $D = -4 \cdot \frac{-5}{4} = +5$

So sind die Coefficienten, die nach einander folgenden ganzen Zahlen, abwechselnd verneint und bejaht; jeder verneinte gehört zu einer Potenz von $(-e \cdot \cos v)$ deren Exponent ungerad ist, jeder bejahte zu einer deren Exponent gerad ist, das Product aus dem Coefficienten in die Potenz ist also allemahl bejaht, und so kömmt

$(1 - e \cdot \cos v)^{-2} =$

$1 + 2 \cdot e \cdot \cos v + 3 \cdot e^2 \cdot (\cos v)^2 + 4 \cdot e^3 \cdot (\cos v)^3$
$\ldots + 2 \cdot n \cdot e^{2n-1} \cdot (\cos v)^{2n-1} \ldots$

Wäre $e = \frac{1}{2}$, so wären in die Potenzen des Cosinus nach der Ordnung multiplicirt: 1; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{8}$; $\frac{5}{16}$; u. s. w. Brüche die abnehmen.

Nun ist in der Anwendung auf die Planeten, e viel kleiner als $\frac{1}{2}$; folglich nehmen die Brüche welche in die Potenzen des Cosinus multiplicirt sind, viel schneller ab, und die Reihe nähert sich, auch wenn $\cos v = 1$ wäre, noch viel schneller wenn der Cosinus ein Bruch ist, obgleich die Binomialcoefficienten wachsen.

V. In dieser Reihe schaffe man die Potenzen des Cosinus, vermöge des Lehrsatzes (342).

durch die Cosinus des vielfachen Bogen weg, und schreibe in eine Columne; was entweder in 1 oder in den Cosinus von einerley vielfachen multiplicirt ist so kömmt

$$\begin{array}{l} 1 \\ +\frac{3}{2}e^2 \\ +\frac{15}{8}.e^4 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} +2.e. \\ +3.e^3 \end{array} \right\} \cos v + \left\{ \begin{array}{l} +\frac{3}{2}.e^2 \\ +\frac{5}{2}.e^4 \end{array} \right\} \cos 2.v + e^3.\cos 3.v + \frac{5}{8}.e^4.\cos 4.v$$

VI. Eigentlich sind in diesen Columnen die unveränderlichen Grössen nicht vollständig vorhanden, denn der Cosinus eines Vielfachen durch eine grössere Zahl, giebt solche Grössen in die vorhergehenden Columnen. Aber was fehlt enthält die fünfte Potenz der Excentricität oder noch höhere, und la Lande erinnert, dieses sey selbst beym Merkur unbeträchtlich.

VII. $(\cos m.v).dv = \frac{1}{m}.(\cos m.v).m.dv$

Davon ist das Integral $= \frac{1}{m}.\sin m.v.$

VIII. Wenn man also jedes Glied der Reihe (V) nach (VII) behandelt, so kömmt das Integral

$$\begin{array}{l} 1 \\ +\frac{3}{2}e^2 \\ +\frac{15}{8}.e^4 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} .v \\ +3.e^3 \end{array} \right\} \sin v + \left\{ \begin{array}{l} +2.e \\ +\frac{3}{4}.e^2 \\ +\frac{5}{4}.e^4 \end{array} \right\} \sin 2.v + \frac{3}{12}.e^3.\sin 3.v + \frac{5}{32}.e^4.\sin 4.v$$

IX.

IX. Diese Reihe heisse = R mit $\frac{1}{2}$. $(1-e^2)^2$ multiplicirt (IX) giebt sie Z.

In la lande Astronomie Liv. XXI; 3334 u. f. §. der II. Ausg. lehrt die Berechnung der Reihe (VIII).

X. Der Ellipse kleine Axe ist $= 2.\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - e^2)}$. also der Ellipse ganze Fläche $= \frac{a.\sqrt{(\frac{1}{4}.a^2 - e^2)}.\pi}{2}$ Die ganze Fläche des Kreises der a zum Durchmesser hat $= \frac{a^2.\pi}{4}$ so verhalten sich die ganzen Flächen Ellipse: Kreis $= a.\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - e^2)} : a = \sqrt{(1 - \frac{4e^2}{a^2})} : 1$ Setzt man $a = 2$ so ist dieses Verhältniss $= \sqrt{(1-e^2)} : 1$

XI. Man stelle sich vor, um C drehe sich ein Halbmesser des Kreises KEA gleichförmig und mache so mit CK einen Winkel $= \omega$, der sich in gleicher Zeit gleichviel ändert. Den Winkel misse ein Bogen $= \frac{1}{2}.a.\omega$ und ihm gehört ein Ausschnitt des Kreises $= \frac{1}{8}.a^2.\omega = \frac{1}{2}\omega$ wenn $a = 2$.

XII. Man setze die ganzen Flächen der Ellipse und des Kreises, sollen sich verhalten wie Z und der Ausschnitt (XI) so kömmt $\sqrt{(1-e^2)} : 1 = \frac{1}{2}.(1-e^2)^2, R : \frac{1}{2}\omega$ also $\omega = (1-e^2)^{3:2}.R$.

la lande §. 3334; nennt z was ich ω heisse. Es ist bey ihm: mittlere Anomalie.

XIII. $(1-e^2)^{3:2} = 1 - \frac{3}{2}.e^2 + \frac{3}{8}e^4)$ höhere Potenzen werden weggelassen (VI)

XIV. Wenn man mit diesem Factor multiplicirt, verändert sich in der Reihe A folgendes.

Ihr erstes Glied wird = 1 nehmlich davon bis auf die vierte Potenz der Excentricität nicht unterschieden.

Die Coefficienten werden

bey:	sin v	sin 2 v
Coeff.	$2_4 e$	$\frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{8} e^4$

Beym Sinus des dreyfachen und vierfachen Bogens bleiben die Coefficienten ungeändert.

XV. Producte aus Differential eines Bogens in Potenzen des Sinus oder Cosinus, deren Exponenten ganze bejahte Zahlen sind zu integriren lehret Euler Instit. Calc. Integral. C. V. §. 242, auch mehr zusammengesetzte Formeln zu integriren. Die Integrale werden durch Producte aus Potenzen von Sinussen und Cosinussen ausgedruckt. Euler erinnert §. 248 es sey bequemer solche Producte in Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen zu verwandeln, und giebt die dazu nöthige Anleitung im VI. Cap. dieses Buchs 270 u. f. §.

Diese weitläuftigen Rechnungen fanden in meinem Buche nicht Platz, doch einigermaassen zu zeigen wie die Anomalien durch Sinus vielfacher Winkel ausgedruckt werden folgte ich la Lande, und brachte die Sache auf den Lehnsatz.

346.

346. Ueber die Rectificatoin der Ellipse.

I) Für die Ellipse (An. endl. 368) ist $dy = \frac{-c.u.du}{a.\sqrt{(\frac{1}{4}a^2-u^2)}}$ Daher ein Product aus der grossen Axe in das Differential der Länge $a.da = du.\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}a^4-(a^2-b^2).u^2}{\frac{1}{4}a^2-u^2}\right)}$

II) Man kann die Quadratwurzel rechter Hand in eine Reihe verwandeln und so die Länge durch eine Reihe ausdrucken die nach Potenzen von u fortgeht.

Was hinter dem Wurzelzeichen steht ist $= \frac{a^2-\left(\frac{4.e}{a}\right)^2.u^2}{1-\frac{4u^2}{a^2}}$

(An. endl. 376) $= a^2-\left(\frac{4.e}{a}\right)^2.u^2.\left(1+\frac{4.u^2}{a^2}....\right) = a^2+\left(4-\left(\frac{4.e}{a}\right)^2\right).u^2....$

Daraus die Wurzel

$$a+\left(4-\left(\frac{4.e}{a}\right)^2\right).\frac{u^2}{2.a}....$$

Folglich a. s =

$$a.u + \left(4 - \left(\frac{4.c}{a}\right)^2\right).\frac{u^3}{6.a} \ldots .$$

Die Berechnung dieser Reihe wird mühsam seyn, für grosse Bogen da u nahe an $\frac{1}{2}$ a kömmt, wird sie sich langsam nähern.

III) Coniectura Physica circa propagationem soni ac luminis, una cum aliis dissertationibus analyticis: de numeris amicabilibus, de natura aequationum ac de rectificatione ellipsis Auct. Leonh. Eulero Berol. 1750.

Im Anfange der letzten Abhandlung erinnert Euler, es sey schon so mannichfaltig vergebens versucht worden, daß man nicht erwarten dürfe elliptische Bogen mit geraden Linien, nicht einmahl mit Bogen vom Kreise oder der Parabel zu vergleichen. Das Differential des elliptischen Bogens, lasse sich nicht rational machen, das zeige an, die Rectification lasse sich nicht auf Kreis oder Hyperbel bringen. Indessen gebe es krumme Linien die keine unbestimmte Rectification zulassen aber bestimmte Theile haben wo Rectification statt findet. Euler wollte also dergleichen auch bey der Ellipse suchen, ob sich etwa ihr ganzer Umfang durch endliche Ausdrücke, allenfalls durch Kreisbogen oder Logarithmen angeben liesse. Er ist hierinn nicht glücklich gewesen, dabey aber auf sonderbare Phänomenen wie er es nennt gekommen,

theil, wodurch die Theorie der krummen Linien beträchtlichen Zuwachs zu erhalten scheint. Der letzte §1. §. lehrt den Umfang einer Ellipse der Wahrheit nah berechnen.

IV) De calculo integralium exercitatio mathematica, Petri Ferronii. . . . in Pisano Lyceo Mathem. Prof. . . . 1792. Enthält auser dem was zum eigentlichen Gegenstande gehört, eine Menge lehrreicher literarischer und sonst unterhaltender Bemerkungen. Die Abhandlung betrift Ursprung der Differentiale welche auf Rectificasion elliptischer oder hyperbolischer Bogen ankommen. Er betrachtet die Fläche eines senkrechten schief geschnittenen Cylinders, sie befindet sich zwischen der noch vorhandenen Grundfläche, dem Kreise, und dem schiefen Schnitte, der Ellipse. Uebrigens lehrt er von der Rectification der Ellipse so wenig befriedigendes als Andre.

V) Seitdem man die Erde für ein elliptisches Sphäroid annimmt, sind bey ihr die Grössen von Aequator und Meridian unterschieden; jener bleibt ein Kreis, dieser ist eine Ellipse. Nun kann man doch wohl nach des Meridians Umfange fragen; Und das setzte Rectification der Ellipse zum Voraus, die noch nicht vollendet ist.

Man hat sich dabey folgendergestalt verhalten: Bekanntlich bestimmt man die Verhältniß der Axen der Ellipse aus zween gemessenen Graden, oder aus mehren Messungen durch Vergleichung

chung hergeleitet. (Geogr. 18) Gemessene Grade geben alsdann die Grösse des Areus, und man berechnet nun aus den gemessenen Graden, wie groß Grade in den geographischen Breiten seyn müssen wo man nicht gemessen hat. Ist solchergestalt eine Tafel für jeden Grad in jeder geographischen Breite berechnet, so addirt man diese 90 Grade, und nimmt ihre Summe für den Quadranten des Meridians. Selbst, weil aneinander gränzende Grade nur wenig unterschieden sind, berechnet man wohl nur die Grade für Aenderungen der Breiten von fünf zu fünf Graden, und findet daraus den Quadranten oder den ganzen Umfang der Erde. So verhält sich Lulof's Kenntniß der Erdkugel; 36. §. 55. S. Er braucht Maupertuis Messung.

Ich brauche nicht umständlich anzuzeigen, wie tief dieses Verfahren unter Rectification der Ellipse ist.

VI) Für die Hyperbel ist (An. endl. 401)

$$dy = \frac{+ c\,u\,du}{a\sqrt{(u^2 - \frac{1}{4}a^2)}}$$

$$a\,ds = \sqrt{\left(\frac{(a^2 + c^2)\,u^2 - \frac{1}{4}a^4}{u^2 - \frac{1}{4}a^2}\right)}\,du$$

Man sieht hie eben die Schwierigkeit zu integriren wie bey der Ellipse, nicht einmahl ist die Reihe hie brauchbar.

Recti-

Rectification der Parabel.

347. Die apollonische Parabel, deren Parameter $= a$ ist, zu rectificiren.

I) Weil für sie $dx = \frac{2.y}{a}.dy$ (84) so ist

$$ds = dy.\sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{a^2}\right)}.$$

Man setze den Parameter $= 1$, also $ds = dy.\sqrt{(1 + 4.y^2)}$

In 320. VI. setze man

dorten	z^2	$\frac{1}{4}a^2$
hie	$4.y^2$	1

so integrirt man gegenwärtiges Differential aus dem dortigen.

Ich will aber die Integration ohne Beziehung auf die Sätze von der Hyperbel lehren. Ich brauche dabey Zerlegung eines Bruchs die erst weiter unten im Zusammenhange gelehrt wird, aber auch hie kann dargethan werden.

II) Man setze tang $\varphi = 2.y$ also $dy = \frac{1}{2}.$ d tang φ; so ist

$2.ds =$ d tang φ. sec φ (Trig. 4. Erkl. 5. Zus.)

III) Nun tang $\varphi =$ sin φ. sec φ; also

d tang $\varphi =$ sec φ. d sin $\varphi +$ sin φ. d sec φ

und

$2.ds =$ sec φ^2. d sin $\varphi +$ sin φ. sec φ. d sec φ

IV) Der letzte Theil rechter Hand, iſt ein Product aus dem Sinus in das halbe Differential des Quadrats der Secante. Man zerlege alſo den erſten Theil in zwey Producte, jedes aus dem halben Quadrate der Secante in den Sinus, ſo hat man

$$2.\ ds = \tfrac{1}{2}.\ \sec\varphi^2.\ d\sin\varphi + \sin\varphi.\ \sec\varphi.\ d\sec\varphi + \tfrac{1}{2}.\ \sec\varphi^2.\ d\sin\varphi$$

V) Wenn man auf beyden Seiten mit a multiplicirt, und integrirt, kömmt

$$4.\ s = \sec\varphi^2.\ \sin\varphi + \int(\sec\varphi^2.\ d\sin\varphi)$$

Wo noch das Integral des letzten Theils rechter Hand zu finden iſt.

VI) Man nenne $\sin\varphi = \omega$; ſo iſt das Differential welches integrirt werden ſoll $= \frac{d\omega}{1-\omega^2}$

(Trig. a. d. O.)

Der Bruch $\frac{1}{1-\omega^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\omega} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\omega}$

wie die Rechnung beweiſt. Das Verfahren ſolche Zerlegungen von Brüchen zu finden wird An. Un. 358; allgemein gelehrt, und gegenwärtiges iſt ein beſondrer Fall des Exempels daſ. 359.

VII) Alſo iſt das Differential

$$= \frac{\frac{1}{2}.\ d\omega}{1+\omega} + \frac{\frac{1}{2}.\ d\omega}{1-\omega};$$

VIII) Jeder dieſer beyden Theile iſt die Hälfte des Differentials eines natürlichen Logarithmen

(An.

(Art. Un. 225.) der erste Theil dessen von $1+\omega$, der zweyte Theil, das entgegengesetzte dessen von $1-\omega$

IX) Also sind der beyden Theile Integrale zusammen $\frac{1}{2}.\log(1+\omega) - \frac{1}{2}\log(1-\omega)$

$$= \frac{1}{2}.\log\frac{1+\omega}{1-\omega} = \frac{1}{2}.\log\frac{(1+\omega)^2}{1-\omega^2}$$

$$= \log\frac{1+\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)}}$$

X) Nun ist (VI) $\omega = \frac{2.y}{\sqrt{(1+4y^2)}}$

$1+\omega = 2.y + \sqrt{(1+4y^2)}$; folglich das Integral in (IX) oder das Integral des letzten Theils rechter Hand in (V) $= \log(2.y + \sqrt{(1+4y^2)})$

XI) Der erste Theil rechter Hand in (V) ist

$$= (1+4y^2).\frac{2.y}{\sqrt{(1+4y^2)}}$$

$$= 2.y.\sqrt{(1+4y^2)}$$

XII) Also die beyden Grössen (XI; X;) gebraucht und in (V.) auf beyden Seiten mit 4 dividirt, kömmt die Länge des paraboliſchen Bogens, so genommen daß sie im Scheitel anfängt, folglich für $y = 0$ verschwindet.

$$s = \frac{1}{2}.y.\sqrt{(1+4y^2)} + \frac{1}{4}.\log(2.y + \sqrt{(1+4.y^2)})$$

XIII.

XIII) Oder, wenn man den Parameter wieder herum herstellt (I)

$$s = \frac{1}{2}\, y \sqrt{\left(1 + \frac{4\, y^2}{a^2}\right)} + \frac{1}{4}\, a \log \left(\frac{2\, y}{a} + \sqrt{\left(1 + \frac{4 y^2}{a^2}\right)}\right)$$

Die Wiederherstellung beruht darauf: Die Länge des Bogens soll einer geraden Linie gleich seyn. Nun hatte man den Parameter $= 1$ gesetzt zum Maasse der Linien angenommen, und so war y eine Zahl. Bedeutet y wiederum eine Linie, so ist der erste Theil rechter Hand, wie er da ausgedruckt ist, eine Linie. Logarithme gehört einer Zahl zu, also muß man hinter dem Zeichen des Logarithmen, statt y welches nur eine Zahl bedeutet wenn $a = 1$; jetzo $\frac{y}{a}$ schreiben. Ferner, da der Logarithme selbst eine Zahl ist, muß man mit ihm die Linie multipliciren, die vorhin $= 1$ gesetzt war. So wird hie die Gleichheit der Abmessungen erhalten (Gegm. 66. Satz)

XIV) In (XIII) ist der erste Theil des Integrals, eine algebraische Function von y; (Anendl. Gr. 571) der zweyte, transcendentisch, wenn zwischen einer Grösse die durch y algebraisch gegeben ist, und ihrem Logarithmen keine algebraische Gleichung statt findet (332; XII)

XV)

XV) Zu Abkürzung der Rechnung dient in (XII) den Winkel (II) wiederum einzuführen. Der bequemen Gebrauch davon giebt folgendes

XVI) Lehrsatz. Summe der Tangente und Secante eines Winkels ist = der Tangente von 45° + der Hälfte des Winkels

Analysis: $\sec k + \operatorname{tang} k = \frac{1 + \sin k}{\cos k}$

Man setze $k = 90^\circ - \zeta$ so ist diese Summe $= \frac{1 + \cos\zeta}{\sin\zeta}$ das ist (Trig. 19 S. 9 Zus.) $= \frac{2.(\cos\frac{1}{2}\zeta)^2}{\sin\zeta} = \cot\frac{1}{2}\zeta = \cot(45^\circ - \frac{1}{2}k) =$ tang $(45^\circ + \frac{1}{2}k)$

Exempel $k = 30^\circ$; $45^\circ + \frac{1}{2}k = 60^\circ$

sec $30^\circ = 1{,}1547005$
tang $30^\circ = 0{,}5773503$
tang $60^\circ = 1{,}7320508$

So giebt Kepler de motib. stellae Martis p. 211. sec 89 Gr. + tang 89 Gr. = cot 39 M. Man sehe hievon meines geometrischen Abhandlungen II. Samml. 30. Abh. 64. wo Gebrauch dieses Satzes gezeigt wird.

Warum aus ihm nicht folgt sec 90° + tang 90° = tang 90°, weise ich im Archiv der reinen und angewandten Mathematik VI. Heft (A. 1797) 4 Art.

XVII)

XVII) Es kommt in (XII)

$x = \frac{1}{2}$ (tang φ sec φ + log nat tang (45° + $\frac{1}{2}\varphi$)

XVIII) Exempel. Man verlange die Länge des Bogens, bis über das Ende der Abscisse, die hundertmahl so lang ist als der Parameter. Also $x = 100$; $y = 10$, tang $\varphi = 20$

10 + log brigg 20 = 11,3010300 giebt

$\varphi = 87$ Gr 8 M 13 S

Die Ergänzung	=	2	31	45
Die Hälfte	=	43	34	7,5
45° + $\frac{1}{2}\varphi$	=	88	34	7,5

log brigg tang φ = 11,3010300

− log brigg cos φ = − 8,6984422

2,6025878

gehört zu 400,495

XIX) Nun muß man den natürlichen Logarithmen von tang (88° 34′ 7,″5) suchen. Ich brauche die Logarithmen in Schulzens Tafeln (234; XVII)

XX) Hie nun verlangt man log nat tang (88 Gr 34 M 7,5 S), das heißt also in den Tafeln log hyp tang 1 Gr 25 M 52,5 S.

Die Bogen gehn in den Tafeln da, von 10 zu 10 Secunden. Man kann also bequem Proportionaltheile nehmen. Es ist da

log hyp tang (1 Gr 25 M 50 S) = 3,6899563 2

Proportionaltheil abzuziehen = 46016

log hyp tang (1° 25′ 52″5) = 3,6894961 6

XXI)

(XX) log nat tang $(45° + \frac{1}{2}\varphi) = 3,68949616$

Summe $= 404,184$

$\frac{1}{4}$ Modiet giebt $= 101,046$

XXII) Ich wollte hie den Gebrauch der trigonometrischen Formel (XVII) zeigen. Ich füge noch bey, wie ich das Exempel schlechtweg nach (XII) berechnet habe.

XXIII) Es ist also die gesuchte Länge $= 5.\sqrt{401} + \frac{1}{4}.\log(20 + \sqrt{401})$

Aus Köhls Tafeln im zweyten Bande von Schulzens Tafeln, ist $\sqrt{401} = 20,0249844$; dazu soll 20 addirt werden, und der Summe nat. Logarithme genommen.

Ich suche mich Wolframs Tafeln zu bedienen, die im ersten Bande von Schulzens Tafeln stehn, (233; XI) und weil in denselben so sehr grosse Zahlen nicht vorkommen, so brauche ich als die Summe, 40,03 welches etwas zu gross ist. So ist

log nat 4003 $= 8,2947993158992$

log 100 $= 4,6051701859888$

log 40,03 $= 3,6896291730004$

$\frac{1}{4}$ desselben $= 0,922407293$

dazu $5.\sqrt{401} = 100,1249220$

$s = 101,04739292$.

Ist ein wenig zu groß, weil ich 40,05 gebraucht habe; Stimmt also genau genug mit (XXII) überein. (XX)

XXIV) Begreiflich kann man nach beyden Formeln das Gesuchte genauer finden, wenn man mehr Mühe im Rechnen anwenden will.

XXV) Die Sehne des parabolischen Bogens ist allgemein =

$$\sqrt{(x^2 + y^2)} = y. \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)}$$

XXVI) Also im Exempel = 10. $\sqrt{101}$ = 100,498756

XXVII) Der Schenkel der Parabel nähert sich immer mehr einem Gange mit der Axe parallel je weiter er sich hinauszieht. Daraus erhellt daß er sich so immer weniger und weniger krümmt, und seine Sehne immer weniger und weniger übertrift.

XXVIII) Wenn y sehr groß wird so ist (XIII) des Bogens Länge beynah = $y^2 + \frac{1}{2} \log. nat. x = x + \frac{1}{2} \log. nat. 4. y$ Da wird auch der logarithmische Theil gegen den ersten unbeträchtlich.

XXIX) Exempel y = 10000, da x = 100 Millionen.

log nat 40 = 3,688879
log nat 1000 = 6,907755

10,596634

$\frac{1}{4}$ dessen = 2,649158

welches gegen x sehr unbeträchtlich ist.

Aus

Aus XXVII. erhellt warum dieser Bogen seine Abscisse so wenig übertrifft.

XXX) Der Sehne Winkel mit der Axe hat allemahl $\frac{1}{y}$ zur Tangente.

XXXI) Also in (XXIX) 0,0001. Dieser Tangente briggischer Logarithme = 6; zeigt daß der Winkel zwischen 20 und 21 Secunden fällt.

Den Ausdruck des Differentials (I) rational zu machen.

XXXII) Was das heißt, erklärt (259), und ein Exempel davon giebt (257). Hie verfahre ich so:

XXXIII) Ich setze $\sqrt{(1 + 4.y^2)} = 1 + 2.u.y$, folglich $y^2 = u.y + u^2.y^2$ Daher $y = \frac{u}{1-u^2}$, und die Quadratwurzel $= \frac{1+u^2}{1-u^2}$. Ferner $dy = \frac{(1+u^2).du}{(1-u^2)^2}$

Also $ds = \frac{(1+u^2)^2.du}{(1-u^2)^3}$

XXXIV) Dieses zu integriren gehören Kunstgriffe die unten 357; 366; 387; 389... gelehrt werden. Wem sie auch bekannt sind, der

wird wohl nicht durch eine weitläuftige und mühsame Rechnung, erst eine Gleichung zwischen s und u, und daraus eine zwischen s und y suchen, wenn er das Verfahren I–XII. brauchen kann.

348. I. In den vorigen Ausgaben hatte ich die Rectification der Parabel durch unendliche Reihen gewiesen. Ich will das wesentliche hie noch beyfügen.

II. Man verwandelt $\sqrt{(1+4y^2)}$ nach Anw. endl. Gr. in eine Reihe. Das dortige x ist hie $= 4.y^2$. Die Reihe wird $=$
$1 + 2.y^2 - 2.y^4 + 4.y^6 - 10.y^8 \ldots$

Jedes Glied mit dy multiplicirt und dann integrirt, giebt die Länge des Bogens
$= y + \frac{2}{3}.y^3 - \frac{2}{5}.y^5 + \frac{4}{7}.y^7 - \frac{10}{9}.y^9 \ldots$

Soll die Reihe sich nähern so müssen Ordinate und Abscisse, jede kleiner seyn als der Parameter. Und wenn sie dem Parameter nahe kommen, nähert sich die Reihe langsam.

III. Für ein grosses y, druckt man vorläufig die Quadratwurzel so aus:

$$2y.\sqrt{\left(1+\frac{1}{4y2}\right)} = 2.y.\left(1+\frac{1}{8y2}\right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}.\frac{1}{16.y4} + \frac{1}{16}.\frac{1}{64.y6} \ldots\right)$$

IV. Wenn man der Reihe jedes Glied, mit 2. y. dy multiplicirt, und dann integrirt, kömmt die Länge des Bogens $=$

$y^2 +$

$$y^2 + \tfrac{1}{4}\log y + \frac{1}{128.y^2} - \frac{1}{4.8.64.y^4} \ldots$$

V. Man kann fragen warum sich bey dieser Integration ein Logarithme zeigt, da bey der (II) keiner sichtbar ist? Das beantwortet sich so.

Wenn y klein ist so lässt sich die Grösse deren Logarithme da soll genommen werden, durch Näherung so ausdrucken

$$1 + 2.y + 2.y^2 \ldots$$

Man nenne u; alles was nach 1 folgt, so hat man $\log(1+u)$ durch eine Reihe die nach u fortgeht (220) und so, wenn man u wiederum wegschafft durch eine Reihe die nach y steigt.

Diese Reihe steckt also mit in der Reihe welche hie in (II) des Bogens Länge giebt.

Soll man den Logarithmen sicher durch eine solche Reihe ausdrucken, so muß u kleiner als 1 seyn. Folglich y nicht so nahe an 1 daß u so groß oder grösser als 1 werden könnte.

Das stimmt mit der (II) gegebenen Erinnerung überein.

Ist y groß, so lässt sich die Grösse deren Logarithme in 271; XII soll genommen werden nicht durch eine Reihe die nach y steigt ausdrucken.

Und so lässt sich eine nach y steigende Reihe in welcher der Logarithme steckt, für ein kleines y angeben. Ein grosses, erfodert eine Reihe die

nach y fällt, und in der kann der Logarithme nicht verborgen stecken, sondern es zeigt sich ein Logarithme sichtbar.

VI. Also, des Bogens Länge, blos durch Reihen zu finden, ist unbequem und unsicher. Ich behalf mich in den ersten Ausgaben meines Buches damit, weil ich Anfängern nur einen Begriff von der Möglichkeit dieser Rectification geben wollte.

VII. In 271; I ist $ds = 2.\frac{dy}{a}.\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + y^2)}$

Man setze $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + y^2)} = z$, so ist $\frac{1}{2}ds = \frac{z.dy}{a}$

Also, wenn für eine krumme Linie, der Abscisse y, die Ordinate z zugehört, so giebt die Fläche dieser krummen Linie, mit a dividirt die Hälfte des paraboliſchen Bogens.

In An. endl. Gr. 417; und 2. Taf. 15 Fig. ist der gleichseitigen Hyperbel halbe Axe $= CA = \frac{1}{2}a$; die Abscissen CP aus dem Mittelpuncte genommen, die Ordinaten MP auf sie senkrecht.

Man stelle sich durch den Mittelpunct die zweyte Axe vor, wie Dd daſ. 11. Taf. 14 Fig. Hie würde sie unrichtig die kleine heissen, weil beyde gleich sind.

Sie ist auf die erste Axe senkrecht, also ihr MP parallel. Ein Perpendikel auf sie vom hi-

ist

$\frac{1}{2}a = CP$, und schneidet auf ihr von C aus ein Stück $= MP$ ab.

Nennt man dieses abgeschnittene Stück $= MP = y$; und das Perpendikel $= CP = z$, so hat man $MP^2 + \frac{1}{4}a^2 = CP^2$ Das ist $y^2 + \frac{1}{4}a^2 = z^2$,

Die Hyperbel kehrt ihre erhabne Seite gegen die zweyte Axe; und $z.dy$ ist das Differential der Fläche welche zwischen dem convexen Bogen der Hyperbel und der Abscisse auf der zweyten Axe enthalten ist.

Kann man diese Fläche finden, so giebt sie mit $\frac{1}{2}a$ dividirt die Länge des paraboliſchen Bogens.

So wird die Rectification der apolloniſchen Parabel, auf die Quadratur der gleichſeitigen Hyperbel gebracht, wie die Rectification der neiliſchen Parabel auf Quadratur der apolloniſchen. Jene ist also transcendentisch, diese algebraisch

Lehnsätze; von der Zerlegung gebrochener Functionen in einfache.

349. Wenn z. eine veränderliche Gröſſe bedeutet, m, n, ganze bejahte Zahlen sind, die übrigen Buchstaben die zunächst vorkommen, unveränderliche Gröſſen anzeigen, so sey

$M = a + bz + cz^2 \ldots + kz^m;$
$N = \alpha + \beta z + \gamma z^2 \ldots + \varkappa z^n;$

also sind M, N; ganze rationale Functionen; (260) aber $\frac{M}{N}$ ist eine gebrochne.

350. Erkl. Wenn die veränderliche Grösse, auf lauter Potenzen gerader Exponenten erhoben ist, so heisst die Function gerade aber ungerade wenn sich in ihr lauter Potenzen ungerader Exponenten befinden. Dieses gilt die Function mag rational oder irrational seyn (259).

So wären $\sqrt{(a + z^2)}$ eine gerade, $\sqrt[3]{(z + z^3)}$ eine ungerade irrationale Function.

Eine gerade Function behält einerley Werth der Grösse und dem Zeichen nach, wenn man in ihr statt eines angenommenen Werthes von z, den entgegengesetzten sonst gleichen setzte bey einer ungeraden aber kömmt: in diesem Falle zwar eben der Werth, aber mit entgegengesetzten Zeichen.

351. Lehrs. Jede rationale ganze Function hat so viel einfache Factoren, soviel die veränderliche Grösse in ihr Abmessungen hat.

I. Bew. Man setze $M = o$ oder $z^m \ldots\ldots + \frac{c}{k} zz + \frac{b}{k} z + \frac{a}{k} = o$ so entstehet diese Gleichung aus m Wurzelgleichungen, (Alg. 221.) und also das Product M aus m Factoren. Ein Exempel, wo diese Schlüsse schon sind gebraucht worden, giebt 338; V.

II.

II. Unter denselben können gleiche, und unmögliche seyn.

352. I. Wenn m gerade ist, so giebt es keinen, oder 2; oder 4; oder 6, u. s. w. mögliche Factoren, und 1 oder 3, oder 5, u. s. w. wenn m ungerade ist. Denn aus (174.) kann $M = o$ nicht anders als eine gerade Zahl unmöglicher Wurzeln haben; Sie sey $= 2r$; so ist die Zahl der möglichen Wurzeln, und Wurzelgleichungen, und Factoren; $m - 2r$; gerade, oder ungerade, nachdem es m ist, oder o wenn $2r = m$.

II. Das o muß als eine gerade Zahl angesehen werden, weil $o + 1$ oder $o + 3$ u. s. w. ungerade, aber $o + 2$ u. s. w. gerade sind.

353. Wenn m gerade und $\frac{a}{b}$ verneint ist, so hat M wenigstens zweene mögliche Factoren, weil sich die krumme Linie, der die Gleichung $M = y$ zugehört (163) bey $z = o$ unter der Axe befindet, und doch über die Axe auf beyden Seiten des Anfangs der Abscissen herauskömmt, folglich $M = o$ gewiß zwo mögliche einander entgegengesetzte, aber nicht eben nothwendig gleiche Wurzeln hat.

354. Lehrsatz. T und P sind ganze Zahlen, aus der gemeinen Arithmetik, oder ganze Functionen (347) die keinen gemeinschaftlichen Factor haben; V und Q ebenfalls ein paar solche Grössen; und P und Q haben auch keinen gemeinschaftlichen Factor; T und

also sind M; N; ganze rationale Functionen; (260) aber $\frac{M}{N}$ ist eine gebrochne.

350. Erkl. Wenn die veränderliche Grösse, auf lauter Potenzen gerader Exponenten erhoben ist, so heisst die Function gerade aber ungerade wenn sich in ihr lauter Potenzen ungerader Exponenten befinden. Dieses gilt die Function mag rational oder irrational seyn (259).

So wären $\sqrt{(ff + z^2)}$ eine gerade, $\sqrt[3]{(z + z^3)}$ eine ungerade irrationale Function.

Eine gerade Function behält einerley Werth der Grösse und dem Zeichen nach, wenn man in ihr statt eines angenommenen Werthes von z, den entgegengesetzten sonst gleichen setzt: bey einer ungeraden aber kömmt in diesem Falle zwar eben der Werth, aber mit entgegengesetzten Zeichen.

351. Lehrs. Jede rationale ganze Function hat so viel einfache Factoren, soviel die veränderliche Grösse in ihr Abmessungen hat.

I. Bew. Man setze $M = 0$ oder $z^m \ldots\ldots + \frac{e}{k}zz + \frac{b}{k}z + \frac{a}{k} = 0$ so entstehet diese Gleichung aus m Wurzelgleichungen, (Alg. 221.) und also das Product M aus m Factoren. Ein Exempel, wo diese Schlüsse schon sind gebraucht worden, giebt 338; V.

II.

II. Unter denselben können gleiche, und unmögliche seyn.

352. I. Wenn m gerade ist, so giebt es keinen, oder 2; oder 4; oder 6, u. s. w. mögliche Factoren, und 1 oder 3, oder 5, u. s. w. wenn m ungerade ist. Denn aus (174.) kann $M = o$ nicht anders als eine gerade Zahl unmöglicher Wurzeln haben; Sie sey $= 2r$; so ist die Zahl der möglichen Wurzeln, und Wurzelgleichungen, und Factoren; $m - 2r$; gerade oder ungerade, nachdem es m ist, oder o wenn $2r = m$.

II. Das o muß als eine gerade Zahl angesehen werden, weil $o + 1$ oder $o + 3$ u. s. w. ungerade, aber $o + 2$ u. s. w. gerade sind.

353. Wenn m gerade und $\frac{a}{b}$ verneint ist, so hat M wenigstens zweene mögliche Factoren, weil sich die krumme Linie, der die Gleichung $M = y$ zugehört (163) bey $z = o$ unter der Axe befindet, und doch über die Axe auf beyden Seiten des Anfangs der Abscissen herauskömmt, folglich $M = o$ gewiß zwo mögliche einander entgegengesetzte, aber nicht eben nothwendig gleiche Wurzeln hat.

354. Lehrsatz. T und P sind ganze Zahlen, aus der gemeinen Arithmetik, oder ganze Functionen (347) die keinen gemeinschaftlichen Factor haben; V und Q ebenfalls ein paar solche Grössen; und P und Q haben auch keinen gemeinschaftlichen Factor; T und

V ingleichen T und Q mögen einen gemeinschaftlichen Factor haben oder nicht; So sind $\frac{T}{P}$; $\frac{V}{Q}$ Brüche, die sich nicht aufheben lassen. (Ar. I. 70.) Ich behaupte, dieser Brüche, wie sie da ausgedruckt sind ihre Summe oder ihr Unterschied, sey auch, sie seyen ein Bruch, der sich nicht aufheben lässt.

Beww. Diese Summe oder dieser Unterschied ist $\frac{T.Q \pm V.P}{P.Q}$; Man setze ihm $= \frac{M}{N}$ daß M; N; ganze Zahlen oder Functionen bedeuten, also N. $T.Q \pm N.V.P = M.P.Q$ und $\frac{N.Q.T}{P} \pm N.V = M.Q$. Weil nun das übrige alles Ganze sind, so muß $\frac{N.Q.T}{P}$ auch ein Ganzes seyn. Nun läßt sich, weil P mit T und mit Q keinen gemeinschaftlichen Factor hat, weder T noch Q mit P dividiren, auch das Product T. Q nicht, sonst müsste P ein Product seyn, dessen einer Factor in Q der andere in T enthalten wäre. Eben so kann P kein Product seyn, dessen einer Factor in N, der andere in Q. T enthalten wäre. (Diese Schlüsse sind einerley mit denen Ar. IIII; 24). Soll also $\frac{N.Q.T}{P}$ ein Ganzes seyn, so muß N

für

sie sich; sich mit P dividiren lasse. Eben so folgt aus $N. T \pm \frac{N.P.V}{Q} \pm M.P$ daß es sich mit Q dividiren läßt. Man setze es also $= H.P.Q$; so ist $T.Q \pm P.V = \frac{M.I}{H}$ oder $M = H.(T.Q \pm V.P)$. In jedem Ausdrucke $\frac{M}{N}$ also, der $= \frac{T.Q \pm P.V}{P.Q}$ ist, ist der Zähler ein Vielfaches des Zählers, und der Nenner ein Vielfaches des Nenners von diesem Bruche, oder, jeder andere Ausdruck der $= \frac{T.Q \pm P.V}{P.Q}$ läßt sich aufheben; folglich ist $\frac{T.Q \pm P.V}{P.Q}$ der Ausdruck für $\frac{T}{P} \pm \frac{V}{Q}$ der sich nicht aufheben läßt.

355. Gesetzt aber P und Q haben einen gemeinschaftlichen Factor, so daß $P = H.R$; $Q = H.S$; so ist $\frac{T.Q \pm V.P}{P.Q} = \frac{H.S.T \pm H.R.V}{H.H.R.S} = \frac{S.T. \pm R.V}{H.R.S}$ und läßt sich also allemahl aufheben.

346. Zuſ. Wenn $N = H.R.H.S$; (345)
ſo iſt $\frac{M}{H} = S.T \pm R.V$. Soll ſich alſo hier der
Bruch $\frac{M}{N}$ in $\frac{T}{P}$ und $\frac{V}{Q}$ zerfällen laſſen, ſo muß
M ſich durch H dividiren, und alſo $\frac{M}{N}$ aufheben
laſſen. Es ſey $M = H.K$ ſo wird $\frac{M}{N}$ auf
$\frac{K}{H.R.S}$ gebracht. Ordentlicher Weiſe aber nimmt
man in der gemeinen Arithmetik und auch in fol-
genden Rechnungen an, daß der Bruch, den man
zerfällen will, ſchon in den kleinſten Zahlen aus-
gedruckt ſey, und ſich nicht aufheben laſſe. In
dieſem Falle alſo geht die Zerfällung nicht an,
wofern P; Q; einen gemeinſchaftlichen Factor
haben, weil alsdenn das ganze $S.T \pm R.V$
nicht dem Bruche $\frac{M}{H}$ gleich ſeyn kann.

347. Aufg. Eine gebrochne rationale Function, wo die veränderliche Gröſſe im Zähler auf höhere Grade ſteigt als im Nenner, in zweene Theile zu zergliedern, deren einer eine ganze Function, der andere eine gebrochne iſt, da die veränderliche Gröſſe im Zähler nicht ſo hoch ſteigt als im Nenner.

Aufl. Man ordne beyde nach z so daß die höchsten Potenzen den Anfang machen, und dividire den Zähler durch den Nenner so lange, bis man in dem Quotienten auf einen unveränderlichen Theil kömmt. Dieser Quotient, den unveränderlichen Theil mit dazu gerechnet, ist die ganze Function. Der Rest von der Division giebt den Zähler, und der vorige Nenner, den Nenner der neuen gebrochnen, oder des eigentlichen Bruchs, der mit der ganzen, den ersten uneigentlichen Bruch ausmacht.

Ex. $\frac{z^4 + 1}{zz + 1} = zz - 1 + \frac{2}{zz + 1}$

358. Aufg. Eine gebrochne Function, deren Nenner zweene Factoren hat, die keinen gemeinschaftlichen Factor haben (356), in zwo zu zergliedern, deren jede einen dieser Factoren zum Nenner hat.

Aufl. Sie sey

$$\frac{a + bz \ldots + kz^m}{(\alpha + \beta z \ldots + \varkappa z^n).(\lambda + \mu z \ldots + \pi z^r)}$$

Man setze, sie gleiche den beyden Brüchen zusammen

$$\frac{a + bz \ldots + kz^{n-1}}{\alpha + \beta z \ldots + \varkappa z^n} + \frac{l + mz \ldots + pz^{r-1}}{\lambda + \mu z \ldots + \pi z^r}$$

wo jeder Zähler einen Grad niedriger ist als sein Nenner, die deutschen Buchstaben sind angenommene Coefficienten, die man bestimmen soll. Der

erste

erſte Bruch hat deren n; der zweyte r, zuſammen n + r. Wenn man nun dieſe beyden Brüche auf einerley Benennung bringt, ſo hat das Product aus des erſten Zähler in des zweyten Nenner, n − 1 + r und das Product aus des zweyten Zähler in des erſten Nenner, r − 1 + n eben ſoviel Abmeſſungen. Die Summe dieſer Producte ſoll dem Zähler der gegebenen Function gleich ſeyn. Man ſetze alſo jeden Coefficienten dieſer Summe dem Coefficienten gleich, der in der Function Zähler zu eben der Potenz von z gehört; wo ſich in der Summe eine Potenz von z findet, die nicht in dem Zähler der Function anzutreffen iſt, da iſt der Coefficient dieſer Potenz in der Summe = 0. Weil nun die Summe n + r Glieder hat, ſo giebt es ſo viel Gleichungen als Coefficienten a; b; ... angenommen worden ſind. In keiner dieſer Gleichungen iſt einer dieſer Coefficienten mit einem andern ſeines Gleichen, oder mit ſich ſelbſt multiplicirt, ſondern jeder von den a; b; ... m; wird nur mit λ; μ; ϖ; und jeder von den l; m; ... p; nur mit α; β; ... κ; multiplicirt, alſo geben ſich alle dieſe Coefficienten nur durch einfache Gleichungen, und jeder bekömmt nur einen und zwar möglichen Werth.

§. 59. Ex. $\frac{a + bz}{\alpha\alpha - \varkappa\varkappa zz} = \frac{A}{\alpha + \varkappa z} + \frac{B}{\alpha - \varkappa z}$

Der Zähler der Summe dieſer Brüche, wenn

wenn man sie auf eine Benennung gebracht hat, heißt: $(a+l)\alpha+(l-a)\varkappa.z.$ also ist $a+l=\frac{a}{\alpha}$; $l-a=\frac{b}{\varkappa}$ diese beyden Gleichungen geben addirt: $2l=\frac{b}{\varkappa}+\frac{a}{\alpha}$ und abgezogen $2a=\frac{a}{\alpha}-\frac{b}{\varkappa}$ also sind die beyden Brüche

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\alpha}-\frac{b}{\varkappa}\right)}{\alpha+\varkappa z}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\varkappa}\right)}{\alpha-\varkappa z}$$

360. Eine gebrochne Function läßt sich in so viel Brüche von der Form $\frac{A}{p-qz}$ zerlegen, so viel einfache ungleiche Factoren ihr Nenner hat. Jeder einfache Factor des Nenners, wie $p-qz$ einer ist, giebt nähmlich einen einfachen Bruch wie $\frac{A}{p-qz}$.

361. Aufg. Aus dem gegebenen einfachen Factor $p-qz$; des Nenners N; einer gebrochenen Function $\frac{M}{N}$; den Zähler A, des

einfa-

einfachen Bruches $\frac{A}{p-qz}$ zu finden, den dieser Factor giebt.

Aufl. Es sey $N=(p-qz).S$; wo S eine ganze Function ist. Der Factor S gebe bey der Zerlegung einen Bruch, dessen Zähler die ganze Function P ist; oder es sey $\frac{M}{N}=\frac{A}{p-qz}+\frac{P}{S}=\frac{M}{(p-qz).S}$ so wird $\frac{P}{S}=\frac{M-A.S}{(p-qz).S}$ folglich $P=\frac{M-A.S}{p-qz}$ also muß sich $M-A.S$ mit $p-qz$ dividiren lassen; folglich $=o$ werden, wenn $\frac{p}{q}$ statt z gesetzt wird, weil alsdenn ein Factor von $M-A.S$ nähmlich $p-qz=o$ wird; (nach eben der Art zu schliessen, wie Aufg. 214. gebraucht worden.) Man setze also in M und in S überall $\frac{p}{q}$ statt z, damit $M-A.S=o$ wird; so kömmt daraus $A=\frac{M}{S}$; und dieses ist also der gesuchte Zähler. Der Quotient nähmlich, der aus M mit S dividirt herauskömmt, wenn man in jeder dieser Function $\frac{p}{q}$ statt z gesetzt hat.

362. Zus.

362. Zuſ. Sucht man für jeden Factor wie $p - qz$ (360) den zugehörigen Zähler, ſo erhält man alle die Brüche, deren Summe $\frac{M}{N}$ iſt

363. Ex. Es ſey $\frac{M}{N} = \frac{1+zz}{z-z^3}$; wo $M = 1 + zz$; $N = z.(1+z).(1-z)$. Man nehme z ſtatt des Factors $p - qz$; ſo iſt $S = 1 - zz$; und $p = 0$; $q = -1$; $\frac{p}{q} = 0$ alſo $A = \frac{1}{1} = 1$; zweytens nehme man $1 - z$ ſtatt des Factors $p - qz$; daß $p = 1$; $q = +1$; $S = 1 + zz$; $\frac{p}{q} = 1$; alſo $A = \frac{2}{2} = 1$; drittens ſey $1 + z$ ſtatt des Factors $p - qz$ und $p = 1$; $S = z - zz$; $\frac{p}{q} = -1$; alſo $A = \frac{2}{-2} = -1$; alſo $\frac{1+zz}{z-z^3} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}$

364. Zweytes Ex. $\frac{M}{N} = \frac{1-8z+7zz}{1-3z-4zz+12z^3}$. Hier iſt der Nenner $= (1-3z).(1-2z).(1+2z)$; Es ſey alſo

M =

$M = 1 - 8.z + 7.zz$

$p - qz =$	$1 - 3z;$	$1 - zz;$	$1 + 2z;$
$S =$	$1 - 4zz;$	$1 - z - 6z^2;$	$1 - 5z + 6z^2$
$\frac{p}{q} =$	$\frac{1}{3};$	$+\frac{1}{2};$	$-\frac{1}{2};$
$A =$	$\frac{1 - \frac{8}{9} + \frac{7}{9}}{1 - \frac{4}{9}};$	$\frac{1 - \frac{8}{2} + \frac{7}{4}}{1 - \frac{4}{2} - \frac{6}{4}};$	$\frac{1 + \frac{8}{2} + \frac{7}{4}}{1 + \frac{5}{2} + \frac{6}{4}};$
ergo $\frac{M}{N} =$	$\frac{-\frac{8}{5}}{1 - 3z};$	$+\frac{\frac{5}{2}}{1 - 2z};$	$+\frac{\frac{27}{10}}{1 + 2z};$

365. Lehrs. Ein Bruch $\frac{P}{(p-qz)^n}$, deſſen Zähler P eine ganze Function und niedriger als vom Grade n iſt, läſſt ſich in folgende einfache Brüche zerlegen: $\frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}} \ldots + \frac{K}{p-qz}$, deren Zahl n iſt, und die Zähler alle unveränderliche Gröſſen ſind.

Bew. Weil P höchſtens bis auf den Grad n ſteigen kann, ſo läſſt ſich annehmen $P = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 \ldots + \varkappa z^{n-1}$; wo die Zahl der gegebenen griechiſchen Buchſtaben n iſt; es können auch welche darunter $= 0$ ſeyn. Wenn man aber die einfachen Brüche alle auf einerley Benennung $(p-qz)^n$ gebracht hat, ſo wird der Zähler ihrer Summe $= A + B(p-qz) + C.(p-qz)^2 \ldots K.(p-qz)^{n-1}$; dieſer Zähler, nach den Abmeſſungen von z geordnet, enthält n Glieder, und giebt alſo mit P verglichen n Gleichungen, davon die erſte $\alpha = A + Bp + Cp^2 \ldots Kp^{n-1}$ iſt. In keiner dieſer n Gleichungen, befindet ſich eine höhere Potenz eines der Buchſtaben A; B .... K oder ein Product aus einem von ihnen in dem andern. Alſo beſtimmen dieſe Gleichungen für jeden dieſer Buchſtaben, einen einzigen und möglichen Werth.

366. Aufg. Wenn $N = (p - qz)^2 . S$; die Zähler der Brüche (365) zu finden.

Auflöf. Weil $\frac{M}{(p-qz)^2 . S} = \frac{A}{(p-qz)^2} + \frac{B}{p-qz} + \frac{P}{S}$ wo P den ganzen Zähler des Bruchs bedeutet, der aus des Nenners Factor S wird, so ist $P = \frac{M - A.S - B.(p-qz)}{(p-qz)^2}$

Damit also dieses eine ganze Function wird, so muß sich $M - A.S - B.(p-qz)S$ durch das Quadrat von $p - qz$ und folglich durch $p - qz$ selbst, dividiren lassen. Es muß also zum ersten $= o$ werden, wenn man $\frac{p}{q}$ statt z setzt. Da wird also $M - A.S = o$ oder $A = \frac{M}{S}$ wenn man in M und S, $\frac{p}{q}$ statt z setzt. Ferner muß sich $M - A.S - B.(p-qz).S$, wo z in M und S stehen bleibt, und nicht $\frac{p}{q}$ statt seiner gesetzt wird; noch durch $(p-qz)^2$ dividiren lassen; oder $\frac{M - A.S}{p-qz} - B.S$ muß sich durch

durch $p - qz$ dividiren laſſen; Es ſey $\frac{M - A.S}{p - qz} = T$; ſo muß ſich $T - B.S$ durch $p - qz$ dividiren laſſen; oder verſchwinden, wenn $\frac{p}{q}$ ſtatt z geſetzt wird. Alſo iſt in dieſem Falle $B = \frac{T}{S}$ wenn in T und S; $\frac{p}{q}$ ſtatt z geſetzt wird. Endlich iſt $P = \frac{T - B.S}{p - qz}$ wo z in T und S ſtehen bleibt, und nicht $\frac{p}{q}$ ſtatt ſeiner geſetzt wird.

367. Erſtes Exempel. $\frac{M}{N} = \frac{1 + 3z - zz}{(1+z)^2 . (3-z)}$

Hier iſt $M = 1 + 3z - zz$; $p = 1$; $q = -1$; $S = 3 - z$; alſo $\frac{p}{q} = -1$, $A = \frac{1 - 3 - 1}{3 + 1}$ $= -\frac{3}{4}$; $M - A.S = \frac{13}{4} + \frac{9}{4}z - zz$;

$T = \frac{13}{4} - z$; $B = \frac{\frac{13}{4} + 1}{3 + 1} = \frac{17}{16}$

$P = \frac{\frac{13}{4} - z - \frac{17}{16} . (3 - z)}{1 + z} = \frac{1}{16}$; alſo

$\frac{M}{N} = \frac{-\frac{3}{4}}{(1+z)^2} + \frac{\frac{17}{16}}{1+z} + \frac{\frac{1}{16}}{3-z}$

Zweytes Exempel $\frac{1+t^2}{(f-gt)^2.(f+gt)^2}$

1. Weil $f-gt=g.\left(\frac{f}{g}-t\right)$; $f+gt=g.\left(\frac{f}{g}+t\right)$ so läſſt ſich der Nenner folgendergeſtalt ausdrucken $g^4\left(\left(\frac{f}{g}-t\right)^2.\left(\frac{f}{g}+t\right)^2\right)$

2. Man ſetze $\frac{f}{g}=\lambda$ und reducire $\frac{1+t^2}{(\lambda-t)^2.(\lambda+t)^2}$ wo $M=1+t^2$

3. Hier ſey erſtlich $p=\lambda$; $q=1$; $z=t$; $S=(\lambda+t)^2$ alſo muß man λ ſtatt t ſetzen.

4. Dieſes giebt $A=\frac{1+\lambda^2}{4\lambda^2}$

5. So wird $T=1+t^2-\frac{(1+\lambda^2).(\lambda+t)^2}{4\lambda^2}$ $\lambda-t$

Wenn man den Zähler nach λ ordnet, ſo wird er ſelbſt ein Bruch, deſſen Nenner $4\lambda^2$; Sein Zähler aber läſſt ſich mit $\lambda-t$ dividiren; und ſo erhält man $\frac{1}{T}=\frac{-\lambda^3-3t\lambda^2+3\lambda+t}{4\lambda^2}$

6. Mache

6. Macht man nun $\frac{T}{S}$; und ſetzt darinnen λ ſtatt t; ſo kömmt $B = \frac{1-\lambda^2}{4\lambda^3}$

7. Ferner findet man $\frac{T - B.S}{P - qz}$ oder $P = \frac{2\lambda + (1-\lambda^2)t}{4\lambda^3}$

8. Nun iſt alſo noch zweytens übrig folgenden Bruch zu zerlegen

$$\frac{\frac{2\lambda + (1-\lambda^2)t}{4\lambda^3}}{(\lambda + t)^2}$$

9. Da iſt nun $M = \frac{2\lambda + (1-\lambda^2)t}{4\lambda^3}$; $p = \lambda$; $q = -1$; $S = 1$

10. Hier muß man alſo $-\lambda$ ſtatt t ſetzen.

11. Da wird $A = \frac{1+\lambda^2}{4\lambda^2}$

12. $M - A.S = \frac{\lambda - \lambda^3 + (1-\lambda^2)t}{4\lambda^3}$

Dieſes mit $\lambda + t$ dividirt giebt

$-\frac{\lambda^2 + 1}{4\lambda^3} = B$ weil $S = 1$

13. Hier alſo iſt $P = 0$;

14. Wenn man daher 4; 6; 11; 12; 13; zuſammen nimmt ſo iſt der Bruch in (2)

$$= \frac{1+\lambda^2}{4\lambda^2}\cdot\left(\frac{1}{(\lambda-t)^2}+\frac{1}{(\lambda+t^2)}\right)$$
$$+\frac{1-\lambda^2}{4\lambda^3}\cdot\left(\frac{1}{\lambda-t}+\frac{1}{\lambda+t}\right)$$

Woraus ſich leicht λ wegſchaffen läſſt.

368. Aufg. Wenn $N=(p-qz)^n.Z$; den Bruch $\frac{M}{N}$ nach 365 zu zerlegen.

Aufl. Es ſey $\frac{M}{(p-qz)^n.Z}=\frac{A}{(p-qz)^n}$
$$+\frac{B}{(p-qz)^{n-1}}+\frac{C}{(p-qz)^{n-2}}$$
$$+\frac{D}{(p-qz)^{n-3}}\ldots.+\frac{F}{(p-qz)^{n-f}}$$
$$\ldots.+\frac{K}{(q-qz)}+\frac{L}{Z};$$ Alſo

(M — A. Z — B. Z). (p — qz) — C. Z. (p — qz)² — D. Z. (p — qz)³ ... — F. Z. (p — qz)ᶠ .... — K. Z. (p — qz)ⁿ⁻¹): (p — qz)ⁿ = L; Folglich läſſt ſich die Gröſſe M..... — K. Z. (p — qz)ⁿ⁻¹ durch (p — qz)ⁿ diviſiren, weil L eine ganze Function iſt. Dieſe Gröſſe, die ich der Kürze wegen y nennen will, wird

wird also $= 0$; wenn man $\frac{p}{q}$ statt z setzt. Dieses giebt $M - A.Z = 0$; oder es ist $A = \frac{M}{Z}$; wenn $\frac{p}{q}$ statt z gesetzt wird. Nun sey überhaupt, ohne $\frac{p}{q}$ statt z zu setzen; $\frac{M - A.Z}{p - qz} = P$, (wo P eine ganze Function ist, weil sich $y - (M - A.Z)$ so wohl als y und folglich auch $M - A.Z$, durch $p - qz$ dividiren lässt), so lässt sich $\frac{y}{p - qz}$ noch einmahl durch $p - qz$ dividiren; oder $P - B.Z - C.Z(p - qz) \ldots\ldots - K.Z.(p - qz)^{n-2}$ lässt sich noch durch $p - qz$ dividiren, das heisst, es verschwindet für $z = \frac{p}{q}$ welches also $B = \frac{P}{Z}$ giebt.

Nun sey, ohne $\frac{p}{q}$ statt z zu setzen, überhaupt $\frac{P - B.Z}{p - qz} = Q$; so lässt sich $\frac{y - M}{(p - qz)^2} = Q - C.Z - D.Z.(p - qz) \ldots\ldots K.Z.(p - qz)^{n-3}$ wieder durch $p - qz$ dividiren, also ist für $z = \frac{p}{q}$; $C = \frac{Q}{Z}$

Wenn nun $\frac{Q - C.Z}{p - qz} = R$ so lässt sich

$\frac{y}{(p - qz)^n} = R - D.Z - E.Z.(p + qz) \ldots$

wieder durch $p - qz$ dividiren, oder für $z = \frac{p}{q}$

ist $D = \frac{R}{Z}$

Und wenn $R - D.Z = S$; so ist für $z = \frac{p}{q}$; $S - E.Z. \ldots = 0$ oder $E = \frac{S}{Z}$ u. s. w.

Die Division der Grösse y, durch $p - qz$ oder das ihr gleichgültige Verfahren $\frac{p}{q}$ statt z zu setzen, lässt sich nähmlich n mahl wiederhohlen, und giebt jedesmahl einen von den n Buchstaben A . . . K. Nachdem man diese alle gefunden hat, wird auch L aus seinem vorhin angegebenen Werthe gefunden.

369. Exempel. $\frac{1 + zz}{z^4.(1 + z^2)}$ giebt.

$M = 1 + zz$; $p = 0$; $q = -1$; $\frac{p'}{q} = 0$;

$n = 5$; $Z = 1 + z^3 y = 1 + zz \cdot (A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4).Z$;

$A = 1$; $P = \frac{1 + zz - 1 - z^3}{z^2} = z - zz$

$B =$

$$B = 0;\ Q = \frac{z - zz}{z} = 1 - z$$

$$G = 1;\ R = \frac{1 - z - 1 - z^3}{z} = -1 - zz$$

$$D = -1;\ S = \frac{1 - zz + 1 + zz^3}{z} = -z + zz$$

$$E = 0$$

Endlich iſt $L = (1 + z^2) - (1 + z^2) - (z^2 + z^5) + (z^3 + z^6) : z^5$ oder $= -1 + z$ alſo der Bruch =

$$\frac{1}{z^5} + \frac{0}{z^4} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{0}{z} + \frac{z - 1}{1 + z^3}$$

376. Zuſ. Jeder eigentliche Bruch $\frac{M}{N}$ läſſt ſich nach 362; 368; in einfache zerlegen; und 362 iſt ſelbſt in 368 enthalten, wenn $n = 1$ geſetzt wird. Man kann aber aus jeder gebrochenen Function den eigentlichen Bruch von dem Ganzen abſondern, das etwa darinnen enthalten iſt (357) und das keine ſolche Zerlegung erfodert. Alſo ſind die hier gegebenen Vorſchriften zulänglich, alle gebrochne Functionen zu zerlegen, und es iſt unnöthig beſonders darzuthun, daß ihre Anwendung bey einem uneigentlichen Bruche vor ſeiner Zergliederung nach (357) doch eben die

einfachen Brüche giebt, die aus dem eigentlichen nach der Zergliederung herauskommen, obgleich bey einer geringen Aufmerksamkeit in die Augen fällt, daß sich dieses so verhält, weil es einerley ist, ob man diese Regeln bey einem eigentlichen Bruche $\frac{M}{N}$ oder bey einem uneigentlichen $\frac{M + Q.N}{N}$ wo Q eine ganze Function ist, anbringt.

371. Ex. 1) $\frac{1}{(1+z).(1-z)^2.z^3}$ zu zerlegen; wo $M = 1$; nehme man zuerst den einzelnen Factor $1+z$; oder man setze $N = (1+z)$. Z wo $n = 1$; $p = 1$; $q = -1$; $\frac{p}{q} = -1$ $Z_1 = z^3 - 2z^4 + z^5$ (368; 370). Also den Bruch $\frac{A}{1+z}$ zu finden; $A = \frac{1}{-1-2-1} = -\frac{1}{4}$.

II) Nun nehme man den quadratischen Factor, oder man setze $N = (1-z)^2.(z^3+z^4)$ wo (368) $n = 2$; $p = 1$; $q = 1$; $\frac{p}{q} = 1$; $Z = z^3 + z^4$; also $A = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$;

P =

$P = \frac{1 - \frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{2}z^4}{1 - z} = 1 + z + zz + \frac{1}{2}z^3;$

$B = \frac{1 + 1 + 1 + \frac{1}{2}}{1 + 1} = \frac{7}{4}$

III) Endlich nehme man wegen des cubischen Factors; $N = z^3 . (1 - z - zz + z^3)$ also

(368) $n = 3$; $p = 0$; $q = 1$; $\frac{p}{q} = 0$; $Z = 1 - z - zz + z^3$; $A = \frac{1}{1} = 1$;

$P = \frac{1 - 1 + z + zz - z^3}{z} = 1 + z - zz;$

$B = \frac{1}{1} = 1$; $Q = \frac{1 + z - zz - 1 + z + zz - z^3}{z}$

$= 2 - zz$; $C = \frac{2}{1} = 2$;

IIII) Also ist der Bruch =

$\frac{-\frac{1}{4}}{1 + z}$ wegen (I)

$\frac{+\frac{1}{2}}{(1 - z)^2} + \frac{\frac{7}{4}}{1 - z}$ wegen (II)

$+ \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z}$ wegen (III)

Daß diese einfachen Brüche zusammen, den vorgegebenen ausmachen, ist daher gewiß, weil man für jeden der dreyerley Factoren von N die zugehörigen einfachen Brüche gefunden hat.

Von

Von den Werthen solcher Functionen, die unter gewissen Umständen unbestimmt scheinen.

372. Aufg. P; Q; sind was man will für Functionen von x; deren jede = o wird, wenn x = a; Man fragt, was für diesen Werth von x; der Werth von $\frac{P}{Q}$ ist, weil solcher also $\frac{o}{o}$ zu seyn scheinet.

Aufl. Man setze x + e statt x; so verwandelt sich P in eine Grösse, wo alles, was kein e enthält, sich zusammen aufhebt, und nur Theile übrig bleiben, die in e von der ersten, und von höhern Potenzen multiplicirt sind; wie gleich daraus erhellt, weil man jedes Stück von P es mag rational oder eine Wurzelgrösse seyn, nach dem binomischen Lehrsatze (46) in eine Reihe, die nach e steigt, verwandeln kann. Man nehme von diesen Reihen alle die Glieder zusammen, die nur in die erste Potenz von e multiplicirt sind, und heisse sie zusammen fe, die übrigen Glieder aber, deren jedes eine höhere Potenz von e enthält, heissen zusammen F. e^2 wo Theile von F noch mit der ersten oder höhern Potenzen von e multiplicirt seyn können; also wird P = fe + Fee und eben so Q = ge + Gee; wo g und G das bedeuten, was f und F bey P. Also verwandelt

delt sich $\frac{P}{Q}$ in $\frac{f+Fe}{g+Ge}$. Nun lasse man e unendlich abnehmen; so verwandelt sich $\frac{P}{Q}$ in $\frac{f}{g}$. Ist nun hier nicht zugleich f und g = 0; so wird $\frac{f}{g}$ der Werth von $\frac{P}{Q}$ für x = a. seyn. Es ist nähmlich $\frac{f+Fe}{g+Ge}$ der Werth von $\frac{P}{Q}$ für jeden andern unbestimmten Werth von x; und man lässt sich diesen andern unbestimmten Werth von x, deren Werth a unendlich nähern, man erhält also den Werth $\frac{P}{Q}$ für einen Werth von x der sich dem Werthe a unendlich nähert, d. i. für x = a.

373. Ex. Wenn $\frac{-xx+a\sqrt{ax}}{a^3-a\sqrt{ax}}$ gegeben ist; so wird (50) P = $-aa-2ae-1\frac{1}{2}ee$ $+aa+\frac{1}{2}a\int-\frac{1}{8}\int$ also f = $-\frac{3}{2}a$; F = $-\frac{9}{8}$ . . . . ; Eben so Q = a $-a-\frac{1}{2}e+\frac{ee}{4a}$ . . . . also g = $-\frac{1}{2}$; G = $\frac{1}{4a}$ . . . . . 13.

Folg-

Folglich $\frac{f}{g} = +3a$ für den Werth von $\frac{P}{Q}$, wenn $x = a$.

374. Wenn man $x + e$ in P statt x setzt, und von diesem zweyten Zustande der Function P, den ersten abzieht, so bleiben Grössen wie φe; Φee übrig, so daß in φ; Φ; da x steht, wo x in f; F; steht. Wenn e verschwindet, so ist $\varphi = \frac{dP}{dx}$ (20). Folglich ist f der Werth von $\frac{dP}{dx}$ für $x = a$. Und eben so $\frac{dQ}{dx} = g$ für $x = a$. Also läßt sich die Regel (372) folgendergestalt ausdrucken: der Werth von $\frac{P}{Q}$ für $x = a$; ist $= \frac{dP}{dQ}$ für $x = a$.

375. Ex. Bey $\frac{\sqrt{(2a^3x - x^4)} - a.\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$ ist überhaupt $\frac{dP}{dx} = \frac{a^3 - 2x^3}{\sqrt{(2a^3x - x^4)}} - \frac{1}{3}a.\sqrt[3]{\frac{aa}{xx}}$ und überhaupt $\frac{dQ}{dx} = -\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{a}{x}}$;

Für $x = a$; verwandeln sich diese beyden Grössen in $-\frac{4}{3}a$ und $-\frac{3}{4}$; also ist der gesuchte Werth von

$\frac{P}{Q} = \frac{-\frac{4}{3}a}{-\frac{3}{4}} = +\frac{16}{9}a.$

376. Wenn bey Anwendung dieser Regel entweder dP allein, oder dQ allein, = o wird, so ist der gesuchte Werth im ersten Falle = o; im zweyten = ∞

377. Ex. $\frac{lx}{\sqrt{(1-x)}}$ wird dem Scheine nach $\frac{0}{0}$ für x = 1; aber $dP = \frac{dx}{x}$ $dQ = \frac{dx}{2\sqrt{(1-x)}}$ also kömmt nach der Regel (374) $\frac{dP}{dQ}$ oder $\frac{2\sqrt{(1-x)}}{x} = o$ für x = 1. So würde $\frac{\sqrt{(1-x)}}{lx} = \infty$ für x = 1 seyn.

378. Wenn aber bey Anwendung der Regel sowohl dP als dQ verschwinden, und solchergestalt $\frac{dP}{dQ}$ ebenfalls $\frac{0}{0}$ zu geben scheint, so darf man nur bedenken, daß eigentlich $\frac{dP}{dx} = \varphi$ mit $\frac{dQ}{dx} = \gamma$ dividirt wird; nach dem man dadurch, daß x = a gesetzt worden, φ und γ in f und g verwandelt hat. Weil also nun der Quotient $\frac{\varphi}{\gamma}$

sich

sich für $x = a$ in $\frac{0}{0}$ verwandelt, so kann man nach eben der Regel 374 seinen Werth für diesen Fall aus $\frac{d\phi}{dx}$ d. i. aus $\frac{ddP}{ddQ}$ finden, wenn man darinnen $x = a$ setzt. Und sollte hier wieder $\frac{0}{0}$ herauskommen, so folgt nach eben der Art zu schliessen, daß man $\frac{d^3P}{d^3Q}$ brauchen kann. Und so kann man so weit fortgehen, bis man auf Differentiale von P und Q kömmt, die nicht $\frac{0}{0}$ geben. Man muß aber auf solche kommen, weil $\frac{P}{Q}$ doch für $x = a$ einen gewissen Werth haben muß.

379. Ex. Bey $\frac{a.\sqrt[3]{4.(a^3+x^3)} - ax - aa}{\sqrt{2.(aa+xx)} - x - a}$

kömmt $\frac{dP}{dQ} = \frac{axx.\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{(a^6+2a^3x^3+x^6)} - a}{x\sqrt{2} : \sqrt{(aa+xx)} - 1}$

welches auch $\frac{0}{0}$ giebt, wenn $x = a$ gesetzt wird. Also suche man $\frac{ddP}{dx^2} = \frac{2a^4x.\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}}$ und

ddQ

$\frac{ddQ}{dx^2} = \frac{aa}{\sqrt{(aa+xx)^3}}$; wo $x = a$ in $\frac{dP}{ddQ}$ gesetzt, den gesuchten Werth $= 2a$ giebt.

380. Anm. Diese Regeln sind von Joh. Bernoulli erfunden worden. S. Act. Erud. Lipſ. 1704. M. Aug. op: Io. Bern. T. I. n. 71. Wie auch Bul. Inſt. Calc. diff. L. II. c. 15.

381. Ex. Den Werth von $\frac{x^n}{lx}$ für $x = \infty^0$ zu finden. Hier werden Zähler und Nenner beyde unendlich. Um einen Ausdruck zu bekommen, wo beyde verschwinden, schreibe man $\frac{1 : lx}{1 : x^n}$ ferner $x = \frac{1}{y}$ so kömmt $\frac{-1 : ly}{y^n}$. Endlich setze man $y^n = u$ so kömmt $\frac{-1 : lu\frac{1}{n}}{u}$; oder $= \left(lu^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$; $Q = u$; also $dP = +\frac{du}{nu}\left(lu^{\frac{1}{n}}\right)^{-2}$; und $\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{u\left(lu^{\frac{1}{n}}\right)^2}$ welches für $u = 0$; unendlich wird. Aber für $u = 0$ wird auch $y = 0$ und x unendlich, also wird $\frac{x^n}{lx}$ für

das unendliche x; unendlich. Eul. I. C. D L. II. §. 360. Ex. 6. löset dieses Exempel auf eine andere Art auf.

382. Wenn für $x = a$; $P = o$; $Q = \infty$; so findet man den zugehörigen Werth des Products P. Q folgendergestalt: Es sey $Q = \frac{1}{R}$ also $P.Q = \frac{P}{R}$ so ist $R = o$ wenn Q unendlich ist, und also der gesuchte Werth $= \frac{dP}{dR}$ nach 374.

Ex. Wenn $1 : \pi$ die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise ist, so wird in $(1 - x)$ tang $\frac{\pi x}{2}$; $1 - x = o$ und tang $\frac{\pi x}{2}$ unendlich für $x = 1$; Man drucke also die Tangente durch die Cotangente aus, so kömmt $\frac{1 - x}{\cot \frac{\pi x}{2}}$

Wenn aber $\cot \frac{\pi x}{2} = v$; so ist $\frac{\pi dx}{2} = \frac{-dv}{1 + vv}$ also $dv = -\frac{1}{2}\pi.(1 + vv)$. dx und $\frac{dP}{dR} = \frac{2}{\pi.(1 + vv)}$ welches den gesuchten Werth $= \frac{2}{\pi}$ giebt.

383. Wenn P und Q beyde für $x = a$ unendlich werden, so scheint $P - Q = o$ zu werden aber es kann jeden endlichen Werth haben, weil zwo unendliche Grössen um eine endliche, die in Vergleichung ihrer für nichts gerechnet wird, unterschieden seyn können. (9) Wenn P und Q algebraische Functionen sind, so ist das Mittel hier $P - Q$ für $x = a$ zu finden daß man $P - Q$ für jeden unbestimmten Werth von x berechnet und nach diesem in dem solchergestalt gefundenen Ausdrucke von $P - Q$ erstlich $x = a$ setzt. Denn algebraische Functionen können, wofern x einen endlichen Werth behalten soll, nicht anders unendlich werden, als wenn es Brüche sind, deren Nenner verschwindet. Bringt man also diese Brüche in einen zusammen, dessen Nenner als ein Product der vorigen, auch verschwinden wird, so verschwindet entweder der Zähler auch, und da kann man den Werth des Bruchs nach 374 oder auch auf gleichgültige Arten finden, oder der Zähler verschwindet nicht, und da ist $P-Q$ unendlich.

Ex. $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-xx}$ für $x = 1$ zu finden. Der Ausdruck ist $= \frac{1+x-2}{1-x^2}$

$= \frac{-(1-x)}{(1+x).(1-x)} = \frac{-1}{1+x}$ wird $= -\frac{1}{2}$ für $x = 1$

Für ein unendliches x können P und Q auch unendlich werden, wenn es sich in ihren Zählern befindet. Hier muß man wiederum P — Q für jedes x finden, und in dem so gefundenen Unterschiede x unendlich setzen; so findet man den Unterschied P — Q für ein unendliches x, und nicht den Unterschied zwoer unendlichen Größen P und Q; als den man nicht finden kann, wenn es endlich ist.

Ex. Man suche $(x+b)^{1-n} - x^{1-n}$; Man verwandelt die erste Potenz in ihre Reihe

$$x^{1-n} + (1-n)\,x^{-n}b + \frac{(1-n).-n}{1.2}$$

$x^{-n-1}bb\ldots$ so hebt sich das erste Glied durch den Abzug auf, und man behält für den Werth des Unterschiedes nur das zweyte Glied $\frac{(1-n)b}{x^n}$ wenn x unendlich wird, weil solches selbst zwar unendlich klein ist, aber doch in Vergleichung seiner die übrigen verschwinden.
Folglich wäre in diesem Falle
$x^n.((x+b)^{1-n} - x^{1-n}) = (1-n)b$
Ein anderes hieher gehöriges Exempel giebt die Art die Asymptoten zu finden (113)

384. Bey transcendentischen Functionen verfährt man nach eben den Grundsätzen. Man setzt $a+e$ statt x in P und Q; und sucht daraus einen

einen allgemeinen Werth von P — Q, der sich alsdenn in den gesuchten verwandelt, wenn e verschwindet.

Ex. Man sucht $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{lx}$ für $= 1$;

Hier setze man $x = 1 + e$; also der erste Theil $P = \frac{1+e}{e} = \frac{1}{e} + 1$, der andere Q

$$= \frac{1}{l(1+e)} = \frac{1}{e - \frac{1}{2}ee + \frac{1}{3}eee \ldots} \quad (220)$$

$$= \frac{1}{e.(1 - \frac{1}{2}e + \frac{1}{3}ee \ldots} = \frac{1}{e}.$$

$$(1 - \tfrac{1}{2}e + \tfrac{1}{3}ee \ldots) - 1 = \frac{1}{e} \cdot (1 + \tfrac{1}{2}e - \tfrac{1}{12}ee.)$$

$(56) = \frac{1}{e} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}e \ldots$ also $P - Q =$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}e \ldots$ und für ein verschwindendes $e; = \frac{1}{2}$

Integrirung der rationalen Differentiale.

385. Aufg. Wenn M; N; rationale ganze Functionen von x sind und N höher als M, also $\frac{M}{N}$ ein eigentlicher Bruch ist; $\frac{M}{N}\,dx$ zu integriren.

Anſt. Man zerfälle N in alle einfache Factoren, welches hier als eine Foderung zum voraus geſetzt wird; und mache aus $\frac{M}{N}$ ſo viel einfache Brüche als Factoren herauskommen (361; 368;) jeder Bruch $\frac{A}{p-qx}$ (361) giebt mit dx multiplicirt das logarithmiſche Differential $\frac{Adx}{p-qx}$ deſſen Integral $-\frac{A}{q} \cdot l(p-qx)$ iſt (218) und jeder Bruch wie $\frac{F}{(p-qx)^{n-f}}$ mit dx multiplicirt, das algebraiſche Differential $\frac{Fdx}{(p-qx)^{n-f}}$ deſſen Integral $\frac{-F}{q.(f+1-n).}(p-qx)^{f+1-n}$ iſt. (203) Beyderley Integrale zuſammengerechnet geben alſo $\int \frac{M}{N} dx$.

Jedes Exempel, das bey 361 . . . 368 u. f. gegeben worden, kann hier gebraucht werden, ſo iſt aus (371) x ſtatt z geſetzt,

$$\int \frac{dx}{x^3 - x^4 - x^5 + x^6} = -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}.$$

$$+\tfrac{1}{2}\int(1-x)^{-2}\,dx+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x}+\int x^{-3}\,dx+\int x^{-2}\,dx+\frac{2\int dx}{x}=-\tfrac{1}{4}\,l(1+x)$$

$$+\tfrac{1}{2}(1-x)^{-1}-\tfrac{1}{4}\,l(1-x)-\tfrac{1}{2}x^{-2}-x^{-1}$$

$$+2lx=l\frac{x^2}{\sqrt{(1+x)(1-x)^7}}$$

$$+\frac{1}{2.(1-x)}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}+\text{Conſt.}$$

386. Für jeden einfachen Factor $p-qx$ iſt des zugehörigen Bruches Zähler $=\frac{M}{S}$ ſo daß $\frac{P}{q}$ ſtatt x geſetzt wird, (361) alſo das daher entſtehende logarithmiſche Integral $\frac{M}{Sq}\cdot l\,\frac{1}{p-qx}$

Hier läſſt ſich nun S allemahl durch die Diviſion finden, wenn der Factor von N gegeben iſt. Aber dieſe Arbeit würde zuweilen ſehr weitläuftig werden, oder gar S durch eine unbeſtimmte Zahl von Gliedern geben; z. E. wenn $N=1-x^n$ welches $1-x$ zum Factor hat, (Alg. 243.) da S; n Glieder hat, und der Werth von S für $x=\frac{P}{q}$ durch eine weitläuftige Arbeit mühſam gefun-

den würde (*). Kürzer erhält man dieses so: $S = \frac{N}{P - qx}$; und hier wird der Werth von S gesucht, der herauskömmt, wenn $\frac{P}{q}$ statt x gesetzt wird. In diesem Falle aber verschwinden Zähler und Nenner des Bruches, weil N sich mit $p - qx$ muß dividiren lassen, damit S ein Ganzes wird. Also ist für S der gegenwärtig gesuchte Werth $= \frac{x\,dN}{-q\,dx}$ (374) so daß $\frac{P}{q}$ statt x gesetzt wird, und das Integral ist $+ \frac{M\,dx}{dN} : l(p - qx)$ wo in $\frac{M\,dx}{dN}$ überall $\frac{P}{q}$ statt x gesetzt werden muß.

Im Exempel 385 ist $dN = (3xx - 4x^3 + 5x^4 + 6x^5)\,dx$ welches $-4\,dx$ für $x = -1$ wird. Also das Integral $= -\frac{1}{4} l(1 + x)$, wie vorhin.

387. Wenn $N = (p - qx)^n . Z$, wo x; ist was z; in 368; also der Factor $(p-qx)^n \frac{M\,dx}{N}$ folgende Integrale giebt:

Al

(*) Man könnte auch $\frac{dx}{1 - x^n}$ nicht nach gegenwärtigen integriren, es muß nach (400) geschehn.

$$A\int\frac{dx}{(p-qx)^n}+B\int\frac{dx}{(p-qx)^{n-1}}$$

$$+C\int\frac{dx}{(p-qx)^{n-2}}\ldots\ldots+F\int\frac{dx}{(p-qx)^{n-1}}.$$

$$+\frac{K}{p-qx}+\int\frac{Ldx}{Z}$$ so läßt sich Z nicht durch $p-qx$ dividiren, weil man annimmt, N soll keine höhere Potenz von $p-qx$ enthalten als die vom Exponenten n. Nun ist, hier x statt z in (368) gesetzt, y eine ganze Function die sich mit $(p-qx)^n$ dividiren läßt. Weil nun Z keinen Factor wie $p-qx$ enthält, so wird in dem Ausdrucke $\frac{y}{Z}$, der Factor $(p-qx)^n$ um keinen Grad niedriger als in y selbst, folglich läßt sich nicht nur y sondern auch $\frac{y}{Z}$ durch $(p-qx)^n$ dividiren.

Das ist: der Ausdruck $\frac{M}{Z}-A-B$ $(p-qx)\ldots\ldots-K.(p-qx^{n-1}$ muß n mahl $=o$ werden, wenn man in ihm $\frac{p}{q}$ statt x setzt, oder er muß $=o$ gesetzt, eine Gleichung vorstellen, die n gleiche Wurzeln, jede $=\frac{p}{q}$ hat.

hat. Folglich finden sich von diesen gleichen Wurzeln noch $n-1$ in der Differentialgleichung $d^{f-1}\frac{M}{Z} + Bqdx \ldots + F.f.(p-qx)^{f-1}qdx^{f-1} = 0$ (172). Und also noch $n-2$ in der zweyten Differentialgleichung $dd\frac{M}{Z} - (2C + 6D.(p-qx) \ldots + f.(f-1)F.(p-qx)^{f-2} \ldots)qqdx^2 = 0$ und noch $n-3$ in der dritten, $d^3\frac{M}{Z} + (6D + \ldots + f(f-1)(f-2)F.(p-qx)^{f-3} \ldots)q^3dx^3 = 0$ u. s. w. daß also nebst dem ersten Ausdrucke, noch $n-1$ nach einander folgende Differentiale desselben verschwinden, wenn $\frac{p}{q}$ statt x gesetzt wird. Es sey η der Coefficient zunächst vor F, und Φ der nächstfolgende oder $\frac{y}{Z} = \frac{M}{Z} \ldots - \eta.(p-qx)^{f-1} - F.(p-qx)^f - \Phi.(p-qx)^{f+1} \ldots$ Weil der Exponent von $p-qx$ in jedem Gliede durch jede Differentiation um 1 vermindert wird; so wird er durch $f-1$ Differentiationen um $f-1$ vermindert, und also sey die $f-1$te Differentialgleichung;

d^{f-1}

$$d^{f-1}\frac{M}{Z} \pm ((f-1).(f-2)\ldots 1.\eta$$

$$+ f.(f-1)\ldots 2.E.(p-qx) + f.(f-1)\ldots 3.\varphi.(p-qx)^2 \ldots\ldots)(qdx)^{f-1}$$

so ist die fte

$$d^f\frac{M}{Z} \mp (f.(f-1)\ldots 2.1.F + f.(f-1)\ldots 2.\varphi.(p-qx)\ldots)(qdx)^f$$

daß aber die angenommene Form der f — 1ten wahr ist, kann man sich leicht überzeugen, wenn man f — 1 = 1, oder = 2 oder = 3 u. s. w. setzt: Also gilt die Form für die fte überhaupt, weil sie mit der für die f — 1te einerley ist; nur daß f statt f — 1 gesetzt worden, und die Zeichen umgekehrt sind. Es gelten aber die obern Zeichen für ein gerades, die untern für ein ungerades f; wie daraus erhellt, weil für f = 2; das Zeichen — ist, und die Zeichen allemahl abwechseln. Wenn man also nach der Ordnung 1; 2; 3; u. s. w. statt f; und $\frac{p}{q}$ statt z setzt, so geben sich die Coefficienten auser dem ersten A den die Hauptgleichung bestimmt, folgendergestalt:

$$A = \frac{M}{Z}$$

$$B = -\frac{1}{qdx}\cdot d\frac{M}{Z}$$

$$C = +\frac{1}{2qqdx^2}\cdot dd\frac{M}{Z} \qquad D =$$

$$D = -\frac{1}{6.(q\,dx)^3}\cdot d^3\frac{M}{Z}$$

$$F = \pm\frac{1}{f.(f-1)\ldots.2.1.(q\,dx)^f}\,d^f\frac{M}{Z}$$

das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades f. Man ſucht dieſe Coefficienten bis an $f = n - 1$ (368).

Im Exempel 371; iſt $z = x$; $p = 1$; $q = 1$; $n = 2$; $Z = x^4 + x^3$; $\frac{R}{q} = 1$; $\frac{M}{Z} = (x^4 + x^3)^{-1}$; $d\frac{M}{Z} = -(x^4 + x^3)^{-2}.(4x^3 + 3x^2)\,dx$; alſo $A = \frac{1}{2}$; $B = -1.-\frac{1}{4}.7$ Nimmt man in eben dem Exempel $p = 0$; $q = -1$; $n = 3$; $Z = 1 - x - x^2 + x^3$ (wie in 371. III) ſo iſt $\frac{M}{Z} = (1 - x - xx + x^3)^{-1}$; $\frac{p}{q} = 0$; $d\frac{M}{Z} = +(1 - x - xx + x^3)^{-2}.(1 + 2x - 3x^2).dx = t\,u\,dx$ alſo $dd\frac{M}{Z} = (t\,du + u\,dt)\,dx$; wo $du = (2 - 6x)\,dx$; $dt = -2.(1 - x - x^2 + x^3)^{-3} - (1 + 2x - 3x^2).dx$. Für $x = 0$ iſt $t = 1 = u$ und $du = 2dx = dt$; alſo; $A = 1$; $B = +1$; $C = +\frac{1}{2}.(1.2 + 2)$ alles wie vorhin (371. III.)

388. Anm.

388. Anm. Diese Art, rationale Functionen durch Logarithmen nach Zerfällung ihres Nenners zu integriren, hat Joh. Bernoulli erfunden, und Act. Er. Lipſ. 1703. Mem. de l'Ac. des Sc. 1702. bekannt gemacht. S. Op. Io. Bern. T. I. n. 70. Euler aber hat ihren Gebrauch dadurch ſehr erleichtert, daß er die 361; 386; gewieſenen bequemern Arten die Zähler der einfachen Brüche zu finden gelehret hat. S. ſeine Meth. facilior. integr. form. diff. Comm. Ac. Petrop. T. XIIII. p. 99. Introd. in Anal. inf. L. I. §. 41. ſeqqu. woraus ich das bisherige und auch das folgende genommen habe. Euler hat mehreres über dieſen Gegenſtand geſchrieben. Nova methodus fractiones rationales in ſimplices reſoluendi Acta Ac. Petrop. 1750. P. I. p. 32. Wenn die Gleichung $N = 0$ unmögliche Wurzeln enthält; ſo werden Nenner der einfachen Brüche, in welche $\frac{M}{N}$ zerfällt wird, unmöglich, und folglich kommen auch in das Integral unmögliche Logarithmen. Man weiß aber ſchon, daß dieſe ſich auf die Quadratur des Kreiſes bringen laſſen; (324) und da die unmögliche Factoren allemahl paarweiſe vorhanden ſind, (Alg. 272.) ſo läſſt ſich aus zween allemahl ein Product, wie eine quadratiſche Gleichung machen; welches die Rechnung noch verkürzt, und jetzo ſoll gewieſen werden.

Erfindung der dreytheilichten Factore.

389. Aufg. Wenn $pp + 2Qz + qqzz$ zweene unmögliche Factoren haben ſoll, deren jeder in einem Theile z im andern unveränderliche Gröſſen enthält, zu finden, was man zu dieſer Abſicht für einen Werth von Q annehmen muß.

Auf-

Aufl. Dieser Ausdruck = o gesetzt, giebt $z = \frac{Q \pm \sqrt{(QQ - ppqq)}}{qq}$ welches unmöglich wird, wenn $Q < pq$; Nun ist jeder Sinus oder Cosinus kleiner als der Sinus totus = 1; und für alle mögliche Bogen von o an, bekommen die Sinus alle mögliche Werthe von o bis 1. Man nenne also φ einen Winkel und setze $Q = pq.\ \cos\varphi$ so ist allemahl Q kleiner als pq. Weil nun $QQ - ppqq = ppqq.(\cos\varphi^2 - 1)$ so ist $qz = p(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})$ und die beyden unmöglichen Factoren des dreytheilichten Products $pp - 2pqz.\cos\varphi + qqzz$ sind $qz - p.(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})$ und $qz - p.(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$

390. Aufg. Die ganze Function $\alpha + \beta z + \gamma zz + \delta z^3 \ldots$ in ihre unmögliche Factoren zu zerfällen.

Aufl. I. Man muß zu dieser Absicht die Grössen p; q; und φ, so bestimmen, daß das dreytheilichte Product (389) ein Factor der Function wird. Denn so giebt jede Bestimmung von p; q; und φ; zweene unmögliche Factoren. (389) Dieses geschieht nun, wenn man in die Function, statt z einmahl $\frac{p}{q}.(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})$ und denn $\frac{p}{q}(\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1})$ setzt. Denn so

giebt

giebt jeder dieser Verfahren eine Gleichung, und nun hat also zwo Gleichungen, aus denen sich die angenommenen Grössen $\frac{p}{q}$ statt deren ich r schreiben will, und φ finden.

II. Aus (337) sind die erste; zweyte, dritte, u. s. w. Potenzen von z_1 folgende

für den ersten Factor

$$\frac{p}{q}(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$$

$$\frac{pp}{qq}(\cos 2\varphi + \sin 2\varphi\sqrt{-1})$$

$$\frac{p^3}{q^3}(\cos 3\varphi + \sin 3\varphi\sqrt{-1})$$

u. s. w.

Für den zweyten Factor hat der unmögliche Theil nur — vor sich.

III. Diese Werthe also statt der Potenzen von z in die Function (1) gesetzt, kömmt folgendes, wo ich e statt $\sqrt{-1}$ schreibe.

$$\Phi = \alpha + \beta r.\begin{cases}+\cos\varphi + \gamma rr.\begin{cases}+\cos 2\varphi.\\ +e.\sin 2\varphi.\end{cases}\\ +e\sin\varphi.\end{cases}$$

$$\Phi = \alpha + \beta r.\begin{cases}+\cos\varphi + \gamma rr.\begin{cases}+\cos 2\varphi.\\ -e.\sin 2\varphi.\end{cases}\\ -e.\sin\varphi\end{cases}$$

IIII. Wenn die beyden Gleichungen addirt werden, so heben sich die unmöglichen Theile in ihnen

ihnen auf, zieht man aber die unterste von der obersten ab, so heben sich die möglichen Theile auf, und man kann alles mit 2e dividiren. So entstehen folgende beyde neue Gleichungen:

$$0 = \alpha + \beta r.\cos\varphi + \gamma r r.\cos 2\varphi + \delta r^3.\cos 3\varphi \ldots$$

$$0 = + \beta r.\sin\varphi + \gamma r r.\sin 2\varphi + \delta r^3.\sin 3\varphi \ldots$$

Wenn man also r und φ aus diesen beyden Gleichungen bestimmt, so hat man den dreytheiligen Factor, und die beyden unmöglichen.

V. Wie in Alg. 613. wird erwiesen, daß $\cos\varphi = \cos(\varphi + 2h\pi)$ wenn h eine ganze bejahte Zahl und π den halben Umfang für den Halbmesser 1; bedeutet. Denn es sey Alg. 1. Tab. 5 F. der Bogen $LM = \varphi$, so gehört sein Cosinus OE auch zum Bogen $LMNHLM = LM + 2\pi$; und so zu $LM + 4\pi$ u. s. w. Aber $\cos(\varphi + (2h - 1)\pi) = -\cos\varphi$. (Trig. 3. Erkl. 3. Z.)

VI. Wäre $\varphi = 2h\pi$ wo h auch $= 0$ für $\varphi = 0$ seyn kann; so wird $\cos\varphi = 1$ und $\sin\varphi = 0$ und so für jede ganze bejahte Zahl η; $\cos\eta\varphi = 1$; $\sin\eta.\varphi = 0$. In diesem Falle werden die beyden unmöglichen Factoren (389.) gleich und möglich, jeder nähmlich $= qz - p$; und ihr Product $= (qz - p)^2$. Es folgt aber alsdenn nicht, daß sich die Function (Y) mit diesem Quadrate dividiren lässt. Denn daß sie sich auf

dem

dem dreytheilichten Producte (389) dividiren lieſſe, folgte nur daraus, weil man in ſie jeden Factor dieſes Products ſetzen, und dadurch die beyden Gleichungen (III) erhalten konnte, aus denen die beyden (IIII) geſchloſſen wurden, deren eine φ die andere r beſtimmte. In gegenwärtigem Falle nun giebt der (II) gebrauchte Satz auch die Wahrheit $(\cos\varphi)^n = \cos n\varphi$ weil beyde $= r$ ſind, aber wenn man alſo dieſen $\cos n\varphi$ zweymahl ſtatt z in die Function ſetzet, ſo bekömmt man nicht zwo verſchiedene Gleichungen, ſondern nur eine zweymahl. Man iſt alſo auch nicht berechtiget anzunehmen, daß ein Product aus dieſem einzigen Factor mit ſich ſelbſt in der Function enthalten iſt, ſondern nur daß er ſelbſt darinnen enthalten iſt.

VII. Für $\varphi = (2h+1)\pi$ iſt $\cos\varphi = -1$; $\sin\varphi = 0$; und jeder unmögliche Factor verwandelt ſich in den möglichen $p + qz$ der ebenfalls allein zu behalten, und nicht ſein Quadrat zu brauchen iſt.

VIII. Weil Alg. I. T. 5. F. $\cos LMNHLM = \cos LMNH$; oder $\cos(2\pi + LM) = \cos(2\pi - LM)$ ſo iſt auch (V) $\cos(2h\pi + LM) = \cos(2h\pi - LM)$ oder Bogen, die zuſammen ein Vielfaches des Umkreiſes ausmachen, haben einerley Coſinus.

391. Exempel. $a^n + z^n$ zu zerfällen. Hier ſind die beyden Gleichungen $0 = a^n + r^n \cdot \cos n$ Alg. 1775.

φ und $o = r^n$. sin $n\varphi$. Die letztere giebt sin $n\varphi = o$; also ist $n\varphi$ entweder $(2k + 1)\pi$ oder $2k\pi$; wo k eine ganze bejahte Zahl und π den halben Umfang für den Halbmesser 1 bedeutet. In dem ersten Falle ist cos $n\varphi = -1$ im letzten $= +1$ wie aus Trigon. 3. Erkl. 3. Zus. erhellt. Nähme man das letzte, so käme $a^n + r^n = o$ welches bey einem geraden n keinen möglichen Werth für r, und bey einem ungeraden nur einen verneinten gäbe. Man nimmt also das erste; oder $a^n - r^n = o$ und $r = a$; oder $p = a$; $q = 1$; $\varphi = \frac{2k+1}{n}\pi$ und der gesuchte Factor ist $aa - 2az.\ \cos\frac{2k+1}{n}\pi + zz$. Nun kann man statt k jede ganze bejahte Zahl setzen, und so bekömmt man verschiedene Factoren.

392. Es sey l) n gerade; und $2k + 1$ grösser als n; so muß es um eine ungerade Zahl grösser seyn. Diese sey $= hn + 2g + 1$ wo h gerade oder ungerade oder auch $= o$ seyn mag, und $2g + 1 < n$ seyn muß. So ist $2k + 1 = (1 + h).\ n + 2g + 1$ und $\frac{2k+1}{n}\pi = (1 + h)\pi + \frac{2g+1}{n}\pi$. und $\cos\frac{2k+1}{n}\pi = \pm\cos\frac{2g+1}{n}\pi$ nachdem $h + 1$ gerade oder ungerade

ist

ist (391; V). Nun muß $g < \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$ seyn, also ist der grösste Werth, den g als eine ganze Zahl haben kann, $= \frac{1}{2}n - 1$ und sein kleinster Werth kann $= 0$ seyn; also hat es $\frac{1}{2}n$ Werthe, und giebt folglich $\frac{1}{2}.n$ Factoren von der Form $aa - 2az.\cos\frac{2g+1}{n}\pi + zz$; Nun kann $a^n + z^n$ nicht mehr als $\frac{1}{2}n$ Factore von dieser Form haben; weil das Product aus so vielen schon die Potenz n von z giebt; Folglich darf man für $2k + 1$ keine ungeraden Zahlen setzen, die grösser als die gerade n sind. Auch würden solche Zahlen entweder eben die vorigen Cosinus oder nur ihre entgegengesetzten geben.

II. n ungerade: Ist da $2k + 1$ grösser, so kann es um eine ungerade oder um eine gerade Zahl grösser seyn, als ein Vielfaches von n. Im ersten Falle sey $2g + 1 < n$ und $2k + 1 = 2hn + 2g + 1$ (denn das Vielfache n von muß gerade seyn, daß es mit einem Ungeraden was Ungerades ausmacht,) also $\frac{2k+1}{n}\pi = 2h\pi + \frac{2g+1}{n}.\pi$ und $\cos\frac{2k+1}{n}\pi = \cos\frac{2g+1}{n}\pi$. Es ist aber $g < \frac{n-1}{2}$ also der grösste Werth von g als einer ganzen

Zahl; $= \frac{n-1}{2} - 1$; der kleinste o; also giebt es $\frac{n-1}{2}$ Werthe für g, oder so viel dreytheilichte Factoren, die zusammen n — 1 zweytheilichte unmögliche enthalten, dazu kömmt noch der zweytheilichte mögliche a + z für $2k + 1 = n$ (391. VII;)

Im zweyten Falle ist $2k + 1 | (2h + 1)n + 2g$ also $\frac{2k+1}{n}\pi = (2h+1)\pi + \frac{2g}{n}\pi$ und $\text{Cof}\frac{2k+1}{n}\pi = -\text{Cof}\frac{2g}{n}\pi$. Hier ist von 2g der grösste Werth n — 1 also von g; $\frac{n-1}{2}$; so viel verschiedene Werthe hat also g; weil es nicht = o seyn kann; dieses giebt so viel dreytheilichte Factoren; und dazu noch den zweytheilichten a + z für $2k + = n$. Also darf man hier statt k nur alle Werthe von o bis $\frac{n-1}{2}$ setzen; und bekömmt dadurch $\frac{n-1}{2}$ dreytheilichte und einen zweytheilichten Factor.

393. Für gerade n; 1) $n = 2$; da kann k nichts anders als = o seyn (392; 1) also giebt es

es den einzigen Factor $aa + zz$ weil $\frac{2k+1}{n}$ $= \frac{1}{2}$ und $\text{Cof}\, \frac{1}{2}\pi = 0$. II) $n = 4$; die Werthe von k; 0; 1; also die Factoren $aa - 2az.\, \text{cof}\, \frac{1}{4}\pi + zz$; $aa - 2az.\, \text{cof}\, \frac{3}{4}\pi + zz$. III) $n = 6$; die Werthe von $g = 0$; 1; 2; also die Factoren $aa - 2az.\, \text{cof}\, \frac{1}{6}\pi + zz$; $a^2 - 2az.\, \text{cof}\, \frac{3}{6}\pi + z^2$; $aa - 2az.\, \text{cof}\, \frac{5}{6}\pi + zz$.

394. Für ungerade n; I) $n = 1$; kann offenbahr keinen dreytheilichten Factor geben. II) $n = 3$; die Werthe von k; (392. II;) 0; 1; Factoren $aa - 2az.\, \text{cof}\, \frac{1}{3}\pi + zz$ und $a + z$. III) $n = 5$; Werthe von k; 0; 1; 2; Factoren $aa - 2az.\, \text{cof}\, \frac{1}{5}\pi + zz$; $aa - 2az.\, \text{cof}\, \frac{3}{5}\pi + zz$; $a + z$.

395. Zweytes Exempel. Für $a^n - r^n$ giebt eben das Verfahren (392) $\sin n\varphi = 0$ also $n\varphi =$ nun nicht $(2k + 1)\pi$ sondern $2k\pi$ damit $\text{cof}\, n\varphi = +1$ und $a^n - r^n = 0$ und wieder $r = a$ wird. So ist der Factor $aa - 2az.\, \text{cof}\, \frac{2k}{n}\pi + zz$; wo man statt 2k alle gerade Zahlen, die nicht gröſſer als n sind, setzen darf. Für $k = 0$ kömmt der Factor $a - z$. Ist n gerade, so giebt $2k = n$ den Factor $a + z$.

396. Anm. Dieſes (392 ... 395) stimmt mit den Sätzen Alg. 237 ... 247 überein. So sind in 395; für $n = 3$; die Werthe von k; 0 und 1; also die

beyden Factoren a — z und aa — 2az. cos ⅔ + πzz. Es ist aber ⅔ π = 120 Gr.; also cos ⅔ π = — cos 60 Gr. = — ½ und der zweyte Factor wird aa + az + zz; alles vollkommen wie in 240; wenn man statt des dortigen y; f; hier a; z; setzet. Mehr Exempel und Anwendungen der Aufgabe 389; findet man beym Euler Introd. L. I. cap. 9.

Anwendung dieser Lehren auf die Integrationen.

397. Aufg. Wenn man die dreytheilichten Factore des Nenners von $\frac{Mdx}{N}$ hat; die Integration dieser Formel zu bewerkstelligen.

Aufl. I. Es sey ein solcher dreytheilichter Factor nach 389; pp — 2pqx. cos φ + qqxx; dieser in seine einfachen zerfällt, giebt folgende beyde Theile des Integrals.

$$+\int \frac{Adx}{qx - p.(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi)}$$

$$+\int \frac{Bdx}{qx - p.(\cos\varphi - \sqrt{-1}.\sin\varphi)}$$

II) Die beständigen Grössen der Zähler muß man nach 386. bestimmen. Es sey also überhaupt $\frac{dN}{dx} = L$ auch $\frac{p}{q} = r$ so giebt $\frac{M}{L}$ die Grösse A, wenn man darinnen r.(cos φ + √ — 1. sin φ) und

und die Gröſſe B wenn man darinnen r. (cos φ — √ — 1. sin φ) ſtatt x ſetzt.

III) Ein unbeſtimmtes Glied von M oder von L heiſſe ηx^κ; ſo verwandelt ſich dieſes, wenn man darinnen (337) r^κ. (cos k φ ± √ — 1 sin k φ) ſtatt x^κ oder r (cos φ ± √ — 1. sin φ)^κ ſetzt, in η. r^κ. cos k φ ± η. r^κ. √ — 1. sin φ. Jedes Glied dieſer Gröſſen giebt alſo einen möglichen und einen unmöglichen Theil, und ſo verwandelt ſich jede der beyden Gröſſen, L; M; in eine, die aus zwey Stücken, einem möglichen und einem unmöglichen beſteht. Jenes kömmt heraus, wenn man überall r^κ cos k φ; und dieſes, wenn man überall r^κ √ — 1. sin k φ ſtatt x^κ ſetzt. Man ſetze, jene möglichen heiſſen 𝔐; 𝔩; und dieſe unmöglichen m √ — 1; l √ — 1 Weil nun das obere Zeichen für A, das untere für B gilt (II) ſo iſt $A = \frac{\mathfrak{M} + m\sqrt{-1}}{\mathfrak{l} + l\sqrt{-1}}$ und $B = \frac{\mathfrak{M} - m\sqrt{-1}}{\mathfrak{l} - l\sqrt{-1}}$

IIII) Nun geben die beyden Theile des Integrals (I) zuſammen gerechnet

$$\int \frac{\left(\frac{A}{+B}\right)\cdot(qx - p.\cos\varphi) \mp \left(\frac{A}{-B}\right).p.\sin\varphi\sqrt{-1}}{qqxx - 2pqx.\cos\varphi + pp}\,dx$$

V) Des Bruches erſter Theil giebt ſogleich das Integral $\frac{A+B}{2q}$ l $(qqxx - 2pqx.\ cos\varphi + pp)$ (218)

VI) Zweytens $(A - B).\ p\ sin\varphi.\ \sqrt{-1}.$ $\frac{dx}{qqxx - 2pqx.\ cos\varphi + pp}$ wird offenbahr ein Element eines Bogens von einem Kreiſe ſeyn, wenn es ſich folgendergeſtalt $\frac{du}{uu+1}$ ausdrucken läſſt. (299) Dieſes zu bewerkſtelligen, ſchaffe man wie Alg. 282 das zweyte Glied des Nenners weg. Es ſey $qx = u + p.\ cos\varphi$ alſo $dx = du : q$; und

$$\frac{dx}{qqxx - 2p.\ cos\varphi.\ qx + pp} = \frac{du:q}{uu + pp.\ sin\varphi^2} = \frac{1}{qp.\ sin\varphi}.$$

$\frac{du:\ p.\ sin\varphi}{\frac{uu}{pp.\ sin\varphi^2} + 1}$ davon das Integral $=$

$\frac{1}{qp.\ sin\varphi}.$ Arc tang $\frac{u}{p.\ sin\varphi} = \frac{1}{qp\ sin\varphi}$ Arc tang $\frac{qx - p\ cos\varphi}{p.\ sin\varphi}$. Folglich iſt das Integral

tegral des zweyten Theils (A—B). p. $\sqrt{\ }-1$. sin φ.

$$\frac{1}{q\,p.\ \sin\varphi}\cdot \text{Arc tang}\ \frac{q\,x - p.\ \cos\varphi}{p.\ \sin\varphi}$$

+ Const.

VII) Für $x = o$ giebt dieses Integral den Bogen $\text{Arc tang} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \text{Arc}(-\cot\varphi) = 90° + \varphi$. Soll also das Integral für $x = o$ verschwinden, so setze man, nachdem der Kürze wegen ein Buchstabe Q statt des Coefficienten ist geschrieben worden; das Integral $Q.\ (\text{Arc tang}\ \frac{q\,x - p.\cos\varphi}{p.\sin\varphi} - \text{Arc tang} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi})$.

Die Tangente des Unterschiedes dieser Bogen ist nach Trig. 19. S. 4. 3. $\left(\frac{q\,x - p.\ \cos\varphi}{p.\ \sin\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) : \left(\frac{p.\cos\varphi - q\,x}{p.\sin\varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} + 1\right)$

oder $\frac{q\,x.\ \sin\varphi}{p - q\,x.\ \cos\varphi}$.

VIII) Nun ist $A + B = \frac{2.\ (l\,\mathfrak{M} + l\,m)}{ll + ll}$

und $A - B = 2.\ \frac{(l\,m - l\,\mathfrak{M})}{ll + ll}\cdot\sqrt{-1}$

also das völlige Integral V; VII; VIII;

$$\frac{(\mathfrak{L}.\mathfrak{M}+\mathfrak{l}.\mathfrak{m})}{(\mathfrak{L}\mathfrak{L}+\mathfrak{l}\mathfrak{l}).\mathfrak{q}}\cdot 1\,(qqxx-2pqx.\cos\varphi+pp)$$
$$+\frac{2\,(\mathfrak{l}\mathfrak{M}-\mathfrak{L}\mathfrak{m})}{(\mathfrak{L}\mathfrak{L}+\mathfrak{l}\mathfrak{l}).\mathfrak{q})}\,\text{Arc tang}\,\frac{qx.\sin\varphi}{p-qx\cos\varphi.}$$

welches sich für $x=o$ in $\frac{\mathfrak{L}\mathfrak{M}+\mathfrak{l}\mathfrak{m}}{(\mathfrak{L}\mathfrak{L}+\mathfrak{l}\mathfrak{l}).\mathfrak{q}}\cdot 2\,1p$ verwandelt. Diese Grösse muß also noch als Const abgezogen werden, wenn das Integral für $x=o$ verschwinden soll.

VIIII) Diese Coefficienten werden so bestimmt:

$\left.\begin{matrix}M=\mathfrak{M}\\ L=\mathfrak{L}\end{matrix}\right\}$ für $x^k=r^k.\cos k.\varphi$

$\left.\begin{matrix}M=\mathfrak{m}\\ L+l\end{matrix}\right\}$ für $x^k=r^k.\sin k.\varphi$

wo $L=\frac{dN}{dx}$ und $r=\frac{p}{q}$ (III)

X) Aus Trig. 19. S. kann man auf die Vermuthung gerathen, daß sich die Coefficienten durch Sinus von Winkeln ausdrucken lassen. Es heissen zweene gewisse Winkel λ; μ und es sey

$$\frac{\mathfrak{L}}{\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L}+\mathfrak{l}\mathfrak{l})}}=\cos\lambda;\quad\frac{\mathfrak{l}}{\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L}+\mathfrak{l}\mathfrak{l})}}=\sin\lambda$$

$$\frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{(\mathfrak{M}\mathfrak{M}+\mathfrak{m}\mathfrak{m})}}=\cos\mu;\quad\frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{(\mathfrak{M}\mathfrak{M}+\mathfrak{m}\mathfrak{m})}}=\sin\mu$$

Ferner sey $\frac{\sqrt{(\mathfrak{M}\mathfrak{M}+\mathfrak{m}\mathfrak{m})}}{\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L}+\mathfrak{l}\mathfrak{l})}}=\mathfrak{K}$ so

ist

ist $\sin(\lambda-\mu) = \frac{\mathfrak{l}\mathfrak{M} - \mathfrak{m}\mathfrak{l}}{\sqrt{(\mathfrak{l}\mathfrak{l}+\mathfrak{l}\mathfrak{l}).\sqrt{(\mathfrak{M}\mathfrak{M}+\mathfrak{m}\mathfrak{m})}}}$.

$\cos(\lambda-\mu) = \frac{\mathfrak{l}\mathfrak{M} + \mathfrak{l}\mathfrak{m}}{\sqrt{(\mathfrak{l}\mathfrak{l}+\mathfrak{l}\mathfrak{l})\sqrt{(\mathfrak{M}\mathfrak{M}+\mathfrak{m}\mathfrak{m})}}}$

Die Winkel λ; μ; aber sind durch die gegebenen Grössen gegeben.

XI) Also ist das Integral (VIII) nur die Coefficienten einfacher ausgedruckt

$\frac{\mathfrak{K}.\cos(\lambda-\mu)}{q}.l(qqxx - 2pq.\cos\varphi.x + pp) + \frac{2.\mathfrak{K}.\sin(\lambda-\mu)}{q}.\text{Arc tang}\frac{qx.\sin\varphi}{p-qx.\cos\varphi}$

398. I. Aufg. $\frac{x^m dx}{\alpha+x^n}$ zu integriren; wo m eine bejahte Zahl, und kleiner als n (357) ist.

Aufl. Hier ist $M = x^m$; $\frac{dN}{dx} = nx^{n-1} = L$ und der allgemeine Factor des Nenners aus 392; $\sqrt[n]{\alpha\alpha - 2x.\cos\frac{2k+1}{n}\pi.\sqrt[n]{\alpha\alpha}+xx}$; also $p = \sqrt[n]{\alpha\alpha} = r$ weil $q = 1$; $\varphi = \frac{2k+1}{n}\pi$; Folglich $\mathfrak{M} = r^m.\cos m\varphi$; $\mathfrak{m} = r^m.\sin m.\varphi$; $\mathfrak{l} = n.r^{n-1}.\cos(n-1)\varphi$; $\mathfrak{l} = n.r^{n-1}.$

sin

$\sin(n-1).\varphi$; $\sqrt{(MM+mm)} = r^m$; $\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L}+\mathfrak{U})} = n.r^{n-1}$; Also $K = \frac{1}{n.r^{n-m-1}} = \frac{r^{m+1}}{n\alpha}$. Ferner $\cos\lambda = \cos(n-1)\varphi$; $\cos\mu = \cos m.\varphi$ also $\lambda-\mu = (n-1-m).\varphi$. Folglich giebt jeder dreytheilichte Factor des Nenners folgendes Integral

$$\frac{\cos\frac{n-m-1}{n}(2x+1).\pi}{n\alpha^{(n-m-1):n}} \cdot l\left(\sqrt[n]{(\alpha\alpha - 2x.\sqrt[n]{\alpha}.\cos.\frac{2x+1}{n}.\pi + xx)}\right) + 2.\sin.\frac{n-m-1}{n}.(2x+1).\pi$$

$$A\ \frac{\tang x.\sin(2x+1).\pi:n}{\sqrt[n]{\alpha} - x.\cos(2x+1).\pi:n}$$

Hier bekömmt man also alle Integrale, wenn man statt $2k+1$ alle ungerade Zahlen, die kleiner als n sind, setzt. (392) Ist n ungerade, so giebt $2k+1 = n$ das Integral des zweytheilichten Factors (392; II) Da denn $\sin 2k+1).\pi : n$ verschwindet, und also der Theil des Integrals, der auf den Kreis ankam, wegfällt.

II. Zus.

II. Zuſ. Für $\frac{x^{-m}\,dx}{\alpha + x^n}$ ſetze man $x = 1 : y$;

dieſes giebt das Differential $= -\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{y^{m+n-2}}{1 : \alpha + y^n} \cdot dy$

welches ſich nach 398 integriren läſſt, nachdem man die ganze Function (357) daraus abgeſondert hat.

III. Aufg. $\frac{x^m\,dx}{\alpha - x^n}$ zu integriren.

Aufl. $M = x^m$; $\frac{dN}{dx}$ oder $L = -nx^{n-1}$

und des Nenners allgemeiner Factor aus (395)

$\sqrt[n]{\alpha\alpha - 2x.\cos\frac{2k}{n}\pi.\sqrt[n]{\alpha} + xx}$ alſo

$q = 1$; $p = r = \sqrt[n]{\alpha\alpha}$; $\varphi = \frac{2k}{n}\pi$.

Folglich $\mathfrak{M} = r^m.\cos m.\varphi$; $\mathfrak{m} = r^m.\sin m.\varphi$; $\mathfrak{L} = -nr^{n-1}\cos(n-1)\varphi$; $\mathfrak{l} = -n.r^{n-1}\sin(n-1)\varphi$; $\sqrt{(\mathfrak{M}\mathfrak{M} + \mathfrak{m}\mathfrak{m})} = r^m$; $\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L} + \mathfrak{l}\mathfrak{l})} = -nr^{n-1}$; Daß man das Zeichen − gebrauchen muß erhellt folgendergeſtalt: Für $\mathfrak{l} = 0$ iſt $(n-1)\varphi = 2k\pi$ oder $= (2k+1)\pi$ und $\cos(n-1)\varphi = \pm 1$ das obere Zeichen für den erſten, das untere für den zweyten Fall. (391. V. VI.). Alſo iſt alsdenn mit eben der Zweydeutigkeit $\mathfrak{L} = \mp r^{n-1}$; Aber $\sqrt{(\mathfrak{L}\mathfrak{L} + \mathfrak{l}\mathfrak{l})}$ wird hier $\sqrt{nnr^{2n-2}}.\cos(n-1)\varphi^2$ und alſo ein Product aus ± 1 in einen Factor,

dentisch. Nun wird also begreiflich werden warum man irrationale rational zu machen sucht (261) wovon gegenwärtig einiges folgt.

Ueber die Integrirung der Differentiale die eine zweytheilichte Irrationalgröſſe enthalten.

meistens nach Euler Instit. calc. integr. Vol. I. Sect. I. cap. II.

399. Aufg. Die Umstände zu bestimmen unter denen sich das Differential (248) rational machen läſst.

Aufl. I. Dieses findet nach 248 (III) statt wenn $\frac{m+1}{n}$ eine bejahte ganze Zahl ist.

II. Aber auch wenn eben dasselbe eine verneinte ganze Zahl ist; da verwandelt sich der Ausdruck in $\frac{z^p dz}{(z-a)^{\frac{1-(m+1)}{n}} \cdot nb^{\frac{m+1}{n}}}$ wo die Potenz der veränderlichen Gröſſe im Divisor, einen ganzen bejahten Exponenten hat.

III. Um deutlicher auszudrucken, daß p ein Bruch seyn soll, setze man es $= \frac{\mu}{\nu}$ und $(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} = x^{\frac{n\mu}{\nu}} z^\mu$; dieses giebt $x = a^{\frac{1}{n}}$

$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{(z^\nu - b)^{\frac{1}{n}}}$, und das Differential (248)
verwandelt sich in

$$\frac{-\nu . a^{(m+1).\frac{1}{n}+\mu:\nu} z^{\mu+\nu-1} dz}{n (z^\nu - b)^{\frac{m+1}{n}+\frac{\mu}{\nu}+1}}$$

welches also rational ist, wenn $\frac{m+1}{n} + \frac{\mu}{\nu}$ eine ganze Zahl ist.

IIII. Ein paar eigentliche Brüche, deren jeder in seinen kleinsten Zahlen ausgedruckt ist, machen zusammen nicht 1 aus, wenn sie nicht einerley Nenner haben; Hievon kann man sich leicht überzeugen. Sie machen aber auch gewiß zusammen nicht 2 aus; also überhaupt keine ganze Zahl.

Wenn ein paar uneigentliche Brüche, ebenfalls jeder in seinen kleinsten Zahlen ausgedruckt sind, so besteht jeder aus einer ganzen Zahl und einem eigentlichen Bruche der sich nicht aufheben läßt. Beyder Summe also, ist die Summe von zwo ganzen Zahlen, und zween eigentlichen Brüchen wie vorhin betrachtet wurden; also keine ganze Zahl.

V. Also ist das Differential (III) nicht anders rational als wenn $n = \nu$ und noch dazu $m + 1 + \mu$ ein vielfaches davon ist.

VI. Solchergestalt läßt sich das Differential (248) rational machen, wenn entweder I, II; oder III statt findet. Das ist nicht so zu verstehn, daß das Differential wenn es durch eine der ersten Arten rational wird auch durch die zweyte rational wird. Z. E. das in 250; wo $n = 1$; $\mu = 1$; $\nu = 2$; bekäme hier nach III keinen rationalen Ausdruck.

VII. Wenn n, α, β, ganze Zahlen sind, so ist in der Voraussetzung (III) auch $\frac{m+1}{n} \pm \alpha$. $n + \frac{\mu}{\nu} \pm \beta$ ist eine ganze Zahl. Wenn also diese Voraussetzung statt findet, so läßt sich auch $x^{m \pm \alpha n} . (a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu} \pm \beta} . dx$ rational machen.

VIII. Man betrachte also nur

$x^m . (a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} dx$ wo $m < n$; $\mu < \nu$

wenn sich dieses nach (III) rational machen läßt, so läßt sich auch das Differential in (VII) rational machen.

VIIII. Läßt sich nun das Differential (VIII) rational machen, so muß es erstlich so aussehen:

$x^m . (a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} dx$, zweytens muß $m + 1 + \mu$

$+\mu = n$ seyn. Es läßt sich also folgendergestalt ausdrucken

$x^{n-\mu-1}.(a+bx^n)^{\frac{\mu}{n}}dx$ wo $\mu < n$; und sich daraus noch andere Differentiale rational machen lassen (VII)

X. Exempel. Es sey $n = 3$; die Formel

$x^{2-\mu}.(a+bx^3)^{\frac{\mu}{33}}dx$ begreift alsdenn folgende unter sich, nach dem man $\mu = 2$ oder $= 1$ setzt

$(a+bx^3)^{\frac{2}{3}}dx$; $(a+bx^3).\frac{1}{3}xdx$

XI. Nach Eulers Urtheile a. a. O. 110 §. läßt sich das Differential (248) auf keine andere Arten als auf die angeführten rational machen. Aber auch alsdenn, wenn dieses nicht angeht ist es vortheilhaft, die Integration anderer Differentiale, wo möglich auf dieses Integration zu bringen, weil man alsdenn, wenn man dieses auf irgend eine Art integrirt hätte, auch die andern integrirt wären.

400. Aufg. $\int x^{m+n}.(a+bx^n)^p\,dx$ auf $\int x^m.(a+bx^n)^p\,dx$ zu bringen.

Aufl. I. Man setze $a+bx^n = u$ also $nbx^{n-1}.dx = du$. Nun betrachte man $x^{m+1}.u^{p+1}$; davon ist das Differential $(p+1).nbx^{m+n}u^p\,dx + (m+1).u^{p+1}.x^m\,dx$. Weil im letzten Theile $u^{p+1} = u^p.(a+bx^n)$, so verwandelt sich das Differential von

$x^{m+1}.u^{p+1}$ in $(np+n+m+1).bx^{m+n}.u^p\,dx+(m+1)\,au^p x^m\,dx$; Folglich dieſer beyden Differentiale, ihre Integrale zuſammen $x^{m+1}u^{p+1}$ und wenn man hieraus das Integral von $x^{m+n}u^p\,dx$ ſucht, ſo findet ſich

$$\int x^{m+n}u^p\,dx=\frac{x^{m+1}.u^{p+1}}{(np+m+n+1)b}-\frac{(m+1).a}{(np+m+n+1)b}.\int x^m u^p\,dx$$

II. Zuſ. Es iſt auch

$$\int x^m u^p\,dx=\frac{x^{m+1}u^{p+1}}{(m+1)a}-\frac{(np+m+n+1)b}{(m+1)a}\int x^{m+n}u^p\,dx$$

Weil nun m ganz willkührlich und durch die übrigen Gröſſen gar nicht beſtimmt iſt, ſo ſchreibe man m — n ſtatt m; dieſes giebt

$$\int x^{m-n}u^p\,dx=\frac{x^{m+1-n}.u^{p+1}}{(m+1-n)a}-\frac{(np+m+1)b}{(m+1-n)a}\int x^m u^p\,dx$$

III. In I ſchreibe man m + n ſtatt m; ſo hat man $\int x^{m+2n}.u^p\,dx$ durch $\int x^{m+n}u^p\,dx$ und folglich durch $\int x^m u^p\,dx$; und eben ſo wenn man nach und nach m + 2n; m + 3n; u. ſ. w. ſtatt m ſchreibt, überhaupt

$\int x^{m\pm\alpha n}.u^p\,dx$ durch $\int x^m.u^p\,dx$;

Die

Die Integrale wo der Exponent $m = \alpha n$ ist, folgen eben so aus II.

401. Aufg. $\int x^m . u^{p+1} dx$ auf $\int x^m . u^p dx$ zu bringen.

Auflö. I. aus 400; I; ist wie daselbst gleich im Anfange

$d(x^{m+1} . u^{p+1}) = (m+1) . x^m . u^{p+1} dx + nb . (p+1) . x^{m+n} . u^p dx$ daraus folgt

$$\int x^m u^{p+1} dx = \frac{x^{m+1} . u^{p+1}}{m+1} - \frac{nb . (p+1)}{m+1} \int x^{m+n} . u^p dx$$

Setzt man nun hier statt $\int x^{m+n} u^p dx$ seinen Werth aus 400; I; so kömmt

$$\int x^m . u^{p+1} dx = \frac{x^{m+1} . u^{p+1}}{np+m+n+1} + \frac{n . (p+1) . a}{n . (p+1)+m+1} \int x^m u^p dx$$

II. Weil $p = \frac{\mu}{\nu}$ so folgt, diesen Werth im Exponenten statt p gesetzt, und aus der Gleichung in (I) das Integral gesucht das sich hier im zweyten Gliede auf der rechten Hand befindet

$$\int x^m . u^{\mu:\nu} . dx = -\frac{\nu . x^{m+1} u^{1+\mu:\nu}}{n . (\mu+\nu) . a} + \frac{n(\mu+\nu)+(m+1)\nu}{n . (\mu+\nu) . a} \int x^m u^{1+\mu:\nu} dx$$

III. Weil nun wiederum hier μ durch die übrigen Grössen gar nicht bestimmt wird, so schreibe man $\mu - \nu$ statt μ; und der Ausdruck (II) verwandelt sich in

$$\int x^m . u^{-1+\mu:\nu} dx = -\frac{\nu . x^{m+1} . u^{\mu:\nu}}{n\mu a} + \frac{n\mu + (m+1)\nu}{n\mu a} \int x^m u^{\mu:\nu} dx$$

Und so hat man nach einem Verfahren wie in 400; III; durch $\int x^m u^p dx$ auch die Integrale von $x^m u^{p \pm \beta} dx$

IIII. Ingleichen 400; III; und 401; III zusammen genommen, durch eben das Integral, die Integrale von $x^{m \pm \alpha n} . u^{p \pm \beta}$

402. Ex. Die Integrale von $\frac{x^m dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ zu finden, wo m jede bejahte ganze Zahl seyn mag.

Aufl. I. In 400; I. ist

a	b	μ	ν	p	n
1	−1	−1	+2	$-\frac{1}{2}$	2

also giebt die dortige Formel, hier

$$\int \frac{x^{m+2}}{\sqrt{(1-x^2)}} dx = -x^{m+1} \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{m+2} + \frac{m+1}{m+2} \int \frac{x^m}{\sqrt{(1-x^2)}} dx$$

II. Wenn

II. Wenn m ungerade seyn soll, so setze man zuerst $m = 1$; Nun ist $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = (1 - \sqrt{(1-x^2)})$ wenn es für $x = 0$ verschwindet. Solchergestalt ist

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^2\sqrt{(1-x^2)}}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)} + \frac{2}{3}$$

wie in 253; II. Ex. Diese algebraischen Integrale sind nähmlich schon dorten gefunden worden.

III. Ist m gerade, so ist sein kleinster Werth $= 0$; und $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \mathfrak{B} \sin x$ (281)

Also $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x\sqrt{(1-x^2)}}{2} + \frac{1}{2}\mathfrak{B} \sin x$

Setzt man nun $m = 2$ so wird

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^3\sqrt{(1-x^2)}}{3} + \frac{3}{4}\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$= -\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1.3}{2.4}x\right)\sqrt{(1-x^2)} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\mathfrak{B} \sin x$$

und so kann man diese Integrale weiter fortsetzen.

403. Ex. Die Integrale von $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ zu finden, wenn m jede ganze verneinte Zahl bedeutet.

Aufl. I. Weil eine negative Zahl, um was positives vermehrt, der o näher kömmt, oder eine kleinere negative Zahl ist, so bedienet man sich hier des ersten Ausdrucks in 400; II; es ist

daselbst	p	a	n	b
hier	$-\frac{1}{2}$	1	2	−1

und der Ausdruck wird hier:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{x^{m+1}\sqrt{(1-x^2)}}{m+1} + \frac{m+2}{m+1}\int \frac{x^{m+2}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

II. Für m = o käme was 402; III; gefunden worden. Für m = − 1 würden die Coefficienten rechter Hand, unendlich, weil nun dieses anzeigt daß die Integration auf Logarithmen ankömmt (219; I) so findet man $\int \frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}}$ folgendergestalt: $d(\sqrt{(1-x^2)}) = -\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ also ist das Differential das integrirt werden soll $= -\frac{d\sqrt{(1-x^2)}}{x^2}$; setzt man also $\sqrt{(1-x^2)} = z$; so ist es $= \frac{-dz}{1-z^2}$

Davon

Davon ist das Integral aus (359) so genommen daß es für $z = 0$ verschwindet, $\frac{1}{2} \log \frac{1-z}{1+z}$, und also $\int \frac{-dv(1-x^2)}{x^2}$ oder $\int \frac{dx}{xv(1-x^2)}$ so genommen daß es für $x = 1$ verschwindet

$$\frac{1}{2} \log \frac{1-v(1-x^2)}{1+v(1-x^2)} = \frac{1}{2} \log \frac{x^2}{(1+v(1-x^2))^2}$$
$$= -\log \frac{1+v(1-x^2)}{x}$$

III. Auf dieses logarithmische Integral werden alle gegenwärtigen Integrale gebracht, wo m eine verneinte ungerade Zahl ist. So ist für $m = -3$

$$\int \frac{dx}{x^3 dx} = \frac{-v(1-x^2)}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{xv(1-x^2)}$$

IIII. Wenn $m = -2$; so wird (I)

$$\int \frac{dx}{x^2 v(1-x^2)} = -\frac{v(1-x^2)}{x}$$

V. Auf dieses algebraische Integral lassen sich also alle die bringen, wo m eine verneinte gerade Zahl ist. So ist für $m = -4$

$$\int \frac{dx}{x^4 v(1-x^2)} = \frac{-v(1-x^2)}{3x^3}$$

$+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{(1-x^2)}}$ Dieſe Integrale ſind alſo alle algebraiſch.

VI. Man drucke x durch z (II) aus, alſo $x=\sqrt{(1-z^2)}$; $dx=-\frac{z.dz}{x}$; ſo iſt

$\frac{x^m.dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-(1-z^2)^{\frac{1}{2}.(m-1)}.dz$ und das Integral $=\frac{(1-z^2)^{\frac{1}{2}.(m+1)}.z}{m+1}-\left(\frac{m+2}{m+1}\right)\int(1-z^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}.dz$

VII. Man ſetze $z=\cos\psi$, ſo iſt das Differential $=-(\sin\psi)^{m-1}.d\cos\psi$; $=+(\sin\psi)^m.d\psi$ und das Integral $=\frac{(\sin\psi)^{m+1}.\cos\psi}{m+1}-\left(\frac{m+2}{m+1}\right)\int(\sin\psi)^{m+1}.d\cos\psi$

VIII. Für $m=0$ iſt das Differential $=\frac{-dz}{\sqrt{(1-z^2)}}=\frac{-d\cos\psi}{\sin\psi}=+d\psi$; alſo das Integral $=\psi=\mathfrak{B}\sin x$ (402; III) Eben dieſes folgt, nur durch eine weitläuftigere Rechnung, wenn man in dem allgemeinen Integrale (VII) $m=0$, ſetzt, und die 17 Fig. wie in (274) braucht.

IX. Für

IX. Für $m = -1$, oder das Differential $= \frac{-1}{1-z^2} \cdot dz$; ist

359 hie	a -1	b 0	α 1	x 1

daher das Differential $= \frac{-\frac{1}{2} \cdot dz}{1-z} - \frac{\frac{1}{2} \cdot dz}{1+z}$

davon das Integral $\frac{1}{2}$. (log (1 − z) − log (1 + z)) $= \frac{1}{2} \cdot \log \frac{1-z}{1+z} = \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \psi$ aus Trig. 19. S. 10 Zuſ.

X. Läſſt man m durch alle verneinte gerade Zahlen wachſen, ſo folgt nach o, (VIII) zuerſt $m = -2$, und von $-\frac{d \operatorname{cof} \psi}{\operatorname{ſin} \psi^3}$ das Integral $= -\cot \psi$.

XI. Für $m = -4$; iſt von $-\frac{d \operatorname{cof} \psi}{\operatorname{ſin} \psi^5}$ das Integral $= -\frac{\operatorname{cof} \psi}{3 \cdot \operatorname{ſin} \psi^3} - \frac{2}{3} \cdot \cot \psi$

XII. Seßt man zu jeder verneinten geraden Zahl, — 2; daß die nächſtfolgende verneinte heraus kömmt, ſo hat man für jedes Differential in (VII) wo m eine gerade verneinte Zahl, das Integral durch zweene Theile, davon einer unmittelbar gegeben wird, der andre ſummatoriſche

sehe durch das nächstvorhergehende, schon gefundene Integral. Aus den nach und nach kommenden Werthen von $m+1$; $m+2$; geben sich auch die bestimmten Zahlen die sich bey den summatorischen Theilen als Coefficienten befinden.

XIII. Den Werth $m=0$ ausgenommen, sind die summatorischen Theile algebraisch, Functionen von z, und $\sqrt{(1-z^2)}$. Jeder ist Integral eines Bruches, dessen Zähler $= -dz$; der Nenner, eine Potenz von $\sqrt{(1-z^2)}$ ist, deren Exponent eine bejahte ungerade Zahl ist. Dieses Differential, ist also irrational, und wird integrirt, ohne es rational zu machen.

XIV. Nun wachse m durch alle verneinte ungerade Zahlen. Für den ersten Werth dieser Art steht das Integral (IX). Für $m=-3$ ist in (VII) das Differential $= \frac{-dz}{(1-z^2)^2}$ davon das Integral $= \frac{-\cos\psi}{2.(\sin\psi)^2} + \frac{1}{2}\log\text{tang}\,\frac{1}{2}\psi$

XV. Für $m=-5$; ist das Differential $= \frac{-dz}{(1-z^2)^3}$, das Integral $= \frac{-\cos\psi}{4.\sin\psi^4} - \frac{3}{8}.\frac{\cos\psi}{\sin\psi^2} + \frac{3}{8}.\log\text{tang}\,\frac{1}{2}\psi$

XVI. Für jedes Differential also, dessen Zähler $= -dz$ ist, der Nenner eine Potenz von $\sqrt{(1$

$\sqrt{(1-z^2)}$ welche eine bejahte gerade Zahl zum Exponenten hat, findet sich das Integral; immer das wo der Exponent des Nenners um 2 grösser ist, aus dem vorhergehenden. Auch hie giebt sich ein Gesetz des Fortganges, der Zahlen die sich bey den Integralen als Coefficienten befinden.

XVII. Diese Differentiale sind alle rational. Ihre allgemeine Formel wäre $\frac{-dz}{(1-z^2)^r}$, wo r jede bejahte ganze Zahl bedeutet. Man könnte also den Bruch $\frac{1}{(1-z^2)^r}$ nach (365) zerlegen, und dann nach (387) integriren.

XVIII. Das Differential in (VII) hat das Zeichen —, weil ich es aus dem Ausdrucke dessen in (403) durch x herleitete. Begreiflich, wenn ein Differential wie (VII) mit dem Zeichen + vorkömmt, bekommen die Integrale Zeichen, denen die sie in vorstehenden Ausdrückungen haben entgegengesetzt.

404. Man findet dieser Formeln mehr, und auch allgemeine Gesetze für sie, die nicht schwer zu entdecken sind beym Euler a. a. O. Irrationalgrössen die noch mehr zusammengesetzt wären, lassen sich nicht wohl auf einfachere und rationale Gestalten bringen, oder wenn dieses angeht entdeckt sich die Reduction leicht von sich selbst.

In

In der ersten Ausgabe dieser Analysis hatte ich an diesen Stellen die Integration von $x^m. (a + bx^n)^p dx$ so vorgetragen, daß ich das Integral durch eine algebraische Reihe und einen summatorischen Theil ausgedruckt. Ich befolgte darinn: Traité du calcul integral pour servir de suite à l'analyse des infiniment petits de M. le Marquis de l'Hôpital, par M. de Bougainville le jeune, Par. 1754; 1756; 2 Quartbände P. I. ch. V. VIII; brachte aber einige Verbesserungen an. Die Stelle die dieses einnahm, habe ich dem eulerischen Verfahren eingeräumt, das bequemer und brauchbarer ist.

Differentiale, rationale und irrationale, welche sich durch Kreisbogen, und Logarithmen, integriren lassen, giebt: Harmonia mensurarum, siue analysis et synthesis, per rationum et angulorum mensuras promotae; accedunt alia opuscula mathematica per Rogerum Cotesium. Edidit et auxit Robertus Smith, Collegii S. Trinitatis ap. Cantabrigienses Socius, Astron. et Experim. Philos. post Cotesium Professor. Cantabrig. 1722, 4°. Epistola ad amicum de Cotesii inuentis, curuarum ratione quae cum circulo et hyperbola comparationem admittunt. Lond. 1722. Appendix ad epistolam

Tractatus de quadratura curuarum Is. Newton, welcher einzeln erschienen ist, sich auch bey N. Op-

N. Optice, Clarks lat. Ueberſ. Lond. 1706 befindet, enthält ebenfalls Fluxionalformeln, deren Fluenten ſich auf Flächen von krummen Linien bringen laſſen.

Integrirung der Differentialgleichungen, wo die veränderlichen Gröſſen vermengt ſind.

405. Erkl. Wenn in einer Differentialgleichung, wo y; x; mit ihren Differentialen vorkommen, Glieder ſind, die Producte aus einer Function einer veränderlichen Gröſſe in der andern Differential enthalten, ſo heiſſt die veränderlichen Gröſſen voneinander ſondern (separare indeterminatas;) aus dieſer Gleichung eine andere machen, in deren jedem Gliede, jeder veränderlichen Gröſſe Function nur in ihr Differential multiplicirt wird, oder daß die Gleichung nun ſo ausſieht $Xdx = Ydy$; wo X eine Function von x; Y eine von y iſt.

406. Zuſ. Wenn X; Y rationale Functionen ſind, läſſt ſich jeder Theil dieſer Gleichung nach 385; 397; integriren, oder $\int Xdx = \int Ydy$ finden, welches eine Gleichung zwiſchen x und y giebt. Bey irrationalen Functionen, wie 404 muß zuweilen die Integration auf die Quadratur einer krummen Linie gebracht werden.

407. Zuſ. Wenn die Integrale von Xdx und Ydy, beydes zugleich lauter mögliche Logarithmen,

men, oder lauter unmögliche, das ist, Kreisbogen sind, so giebt sich zwischen x und y eine algebraische Gleichung. Wenn sie aber zum Theil algebraisch, oder zum Theil mögliche, zum Theil unmögliche Logarithmen sind, geht solches nicht an.

408. Ex. $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1-x^2}$ giebt $\log y =$ $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$ (403; II) wenn $y = 1$ für $x = 0$ seyn soll. Daraus wird $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

409. Ex. $\frac{dx}{1+xx} = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$ giebt $\mathfrak{B}$ tang $x = \mathfrak{B}$ sin y (299; 281) $= \mathfrak{B}$ tang $\frac{y}{\sqrt{(1-yy)}}$; also $x = \frac{y}{\sqrt{(1-yy)}}$ oder $xx.(1-yy) = yy$.

Befände sich bey jedem der Exempel (408; 409) noch rechter Hand $x\,dx$; so würde bey dem ersten $\log y = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}x^2$ bey dem zweyten $\mathfrak{B}$ tang $x = \mathfrak{B}$ sin $y + \frac{1}{2}x^2$ aus deren keinem sich eine algebraische Gleichung machen läßt.

Hätte man aber $\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1-y^2}$ so käme $\frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y} = \mathfrak{B}$ tang $x = \frac{\sqrt{-1}}{2}\cdot\log$

1—

$\frac{1-x\sqrt{-1}}{1+x\sqrt{-1}}$ (328), wo man zwar die Zeichen der Logarithmen wegbringen könnte, aber eine Potenz deren Exponent unmöglich wäre machen müsste, welches wieder keine algebraische Gleichung giebt.

411. Aufg. **Wenn in einer Gleichung nicht y selbst, sondern nur desselben erstes Differential, ferner Functionen von x und desselben erstes Differential vorkommen, die veränderlichen Grössen von einander zu sondern.**

Aufl. I. Erster Fall. Wenn sie nur die ersten Potenzen der Differentiale enthält, so muß sie so aussehen: $Pdx = Qdy$; wo P und Q Functionen von x allein sind. Da ist also die Absonderung der veränderlichen Grössen sogleich geschehen, weil $\frac{Pdx}{Q} = dy$.

II. Zweyter Fall. Wenn die Differentiale auf höhere Potenzen steigen, so enthält die Gleichung Producte aus Functionen von x; 1) in Potenzen von dx allein; 2) in Potenzen von dx mit Potenzen von dy multiplicirt; 3) in Potenzen von dy allein; die Exponenten der Differentiale müssen aber zusammen allemahl eine Summe ausmachen, weil sonsten diese Producte von ver-

schiedenen Graden des Unendlich kleinen wären, und also nicht zusammen eine Gleichung geben könnten. Also lässt sich eine solche Gleichung folgendergestalt vorstellen:

(⊙) $P dx^{\alpha} + Q dx^{n} - \alpha . dy^{\alpha} + R dy^{n} = o$ da P; Q; R; Functionen von x sind; α kann andere und andere Werthe bekommen und für jeden Werth bekömmt Q auch einen andern Werth. Hier sey nun $dy = u dx$ so ist $P + Qu^{\alpha} + Ru^{n} = o$ also u vermittelst einer algebraischen Gleichung durch x gegeben. Folglich kann in der Gleichung $dy = u dx$; u als eine Function von x angesehen werden, und also kann man die veränderlichen Grössen als von einander gesondert ansehen. Betrachtet man in der algebraischen Gleichung zwischen u und x; u als die Wurzel, so lässt sich entweder diese Gleichung so auflösen, daß man die verschiedenen Wurzeln derselben durch endliche Ausdrückungen findet, wie es allemahl angeht, wenn u nur auf die erste oder auf die zweyte Potenz steigt, oder man kann auch durch das newtonische Parallelogramm, soviel unendliche Reihen finden, als es Wurzeln giebt. (Alg. 667.). In jedem Falle lässt sich jede dieser endlichen Ausdrückungen oder unendlichen Reihe statt u setzen, und y wird alsdenn durch die vorhin gelehrten Regeln zu integriren gefunden.

III. Ein leichter Fall hievon ist, wenn x nur von der ersten Abmessung in der Differentialgleichung vorhanden ist; denn da steigt es nur auf

eben

eben die Abmessung in der algebraischen Gleichung zwischen x und u und man kann also daraus dx nur durch u und du ausgedruckt finden, welcher Werth von dx in udx gesetzt, $dy = udx = Udu$ giebt, wo U eine Function von u ist, und zwar eine rationale, wenn die algebraische Gleichung zwischen x und u rational ist, da denn Udu sich allemahl nach 385; 397; integriren lässt, wenn es ein rationaler Bruch ist, oder ohne diese Kunstgriffe, wenn es eine ganze Function ist.

Ex. $xdx^3 dy - ady^4 - 2ady^2 dx^2 - adx^4 = 0$. Hier ist in 407; $P = -a = R$; $n = 4$; und nachdem $\alpha = 1$ oder 2; ist $Q = x$ oder $-2a$. Folglich bedeutet Qu^α zwey Glieder xu und $-2auu$; und die algebraische Gleichung zwischen u und x ist $-a + xu - 2au^2 - au^4 = 0$; also $x = \frac{a}{u} + 2au + au^3$; und $dx = \left(-\frac{a}{uu} + 2a + 3auu\right)du$; und dy oder $udx = -\frac{adu}{u} + 2audu + 3au^3.du$

also $y = -a \log u + auu + \frac{3au^4}{4}$

IIII. So findet man in III. eine Gleichung zwischen y und u. Ist solche blos algebraisch, so kann man sie mit der vorigen algebraischen zwi-

schen x und u verbinden, und aus beyden eine zwischen y und x machen. (Alg. 199.) Kommen aber Logarithmen hinein, so geht dieses nicht an. Man kann aber aus der algebraischen zwischen x und u, weil x nur eine Abmessung hat, für jedes angenommene u das zugehörige x finden, und wenn man für eben das u das y berechnet, so sieht man, was für x und y zusammengehören. Also nimmt man hier eigentlich nicht x nach Gefallen an, das zugehörige y zu berechnen, sondern man nimmt u nach Gefallen an, und berechnet daraus zusammengehörige x und y.

V. Es sey 20 F. LK die krumme Linie, welche der algebraischen Gleichung zwischen x und u (III) zugehört, so daß CM = x, MK = z = au. Man nehme $MN = \frac{CMKL}{a}$; so ist es $= \int u\,dx = y$. Dieses heisst die Differentialgleichung ⊙ durch die Quadratur der krummen Linie CMKL construiren; oder eine krumme Linie NB finden, deren Coordinaten CM = x; MN = y sind.

Ex. $a^3\,dx^5 - aaxdxdy^4 - x^3.dy^5 = 0$ giebt n = 5; P = a^3; α = 4; Q = − aax; R = $-x^3$; also $a^3 - a^3\,xu^4 - x^3\,u^5 = 0$ für die Gleichung der krummen Linie LK, deren Quadratur MN giebt.

412. Aufg. a; b; n sind unveränderliche Grössen, und zwar bedeutet n jede Zahl; p, q, sind

q, sind Functionen von x; Man soll in der Gleichung $ady = ypdx + by^n qdx$ (H) die veränderlichen Grössen von einander sondern.

Aufl. I. Man setze $y = zu$ wo z; u; zwo neue veränderliche Grössen sind. Also $dy = zdu + udz$; und wenn man statt y; dy; ihre Werthe setzt, verwandelt sich H in (K) $azdu + audz = zupdx + bz^n u^n qdx$. Weil nun z; u; gar nicht bestimmt sind, so kann man aus K ein Paar Glieder wählen die eine Differentialgleichung geben, das übrige Paar giebt von sich selbst auch eine solche Gleichung. Damit aber das erste Paar eine Differentialgleichung nur zwischen zwo veränderlichen Grössen giebt, setze man $a.u.dz = u.z.p.dx$ (L) da sich mit u auf beyden Seiten dividiren lässt, folglich bleibt $azdu = bz^n u^n qdx$ (M). Aus L folgt $\frac{dz}{z} = \frac{pdx}{a}$ oder $lz = \int pdx : a$ oder $z = e^{\int (pdx : a)}$ wenn $le = 1$ (232) also wird aus M; $\frac{adu}{u^n} = bz^{n-1} qdx$ (N) wo die veränderlichen Grössen von einander gesondert sind, weil z durch x gegeben ist. Aus ihr wird das Integral

$$c - \frac{a}{(n-1)u^{n-1}} \text{ oder } c - \frac{a.z^{n-1}}{(n-1)y^{n-1}} = b\int z^{n-1} qdx \text{ (O)}$$

wo c die beständige Grösse bedeutet, die bey der Integration addirt wird.

Auch $-\frac{a.\,z^{n-1}}{(n-1).\,y^{n-1}} = b.\int(z^{n-1}.q.\,dx)$

wenn man das Integral rechter Hand so nimmt daß die Conſt die beygefügt werden ſollte ſchon darinn enthalten iſt.

II) Exempel. $ady = \frac{fydx}{x} + y^n x^m dx$;

Hier iſt $p = \frac{f}{x}$; $b = 1$; $q = x^m$; alſo

$\int\frac{pdx}{a} = \frac{f}{a} lx = lz$ oder $z = x^{f:a}$.

Daraus kömmt in (O) $\int z^{n-1} q dx = \frac{1}{\mu}$

$x^\mu = c - \frac{a x^{f.(n-1):a}}{(n-1)y^{n-1}}$ wo

$\mu = \frac{f.(n-1) + (m+1)a}{a}$

III) Dieſes Exempel begreift unzähliche einzelne unter ſich. Man ſetze $m = 0$; $n = 2$; ſo wird aus $ady = \frac{fydx}{x} + yydx$ die Integrale

$\frac{a}{f+a} x^{(f+a):a} = c - \frac{a x^{f:a}}{y}$.

Setzt man hier wieder $f = 2$; $a = 1$; ſo wird von $dy = \frac{2ydx}{x} + yydx$ die Integrale: $yx^3 = 3cy - 3xx$.

IIII.

IIII. Wenn $p = h$ einer beständigen Grösse und q eine rationale ganze Function von x ist, so lässt sich $\int z^{n-1} q\,dx$ aus 242 finden. Z. E. wenn $h = 1 = a$ und $q = xx + x$ so ist $z = e^x$ und $\int z^{n-1}.(xx+x)\,dx = \frac{e^{(n-1)x}}{n-1}$.

$$\left[xx - \frac{2x}{n-1} + \frac{2}{(n-1)^2}\right]$$
$$\left[+x - \frac{1}{n}\right]$$

die oberste Zeile des zweyten Factors kömmt nähmlich heraus, wenn man 2; und die untere, wenn man 1 statt e in 242 setzt.
Dieses Product mit b multiplicirt und $= c - az^{n-1} : (n-1).\, y^{n-1}$ gesetzt giebt die Integrale O der Differentialgleichung $dy = y\,dx + b.\, y^n.(xx+x)\,dx$.

V. Wenn $(\int p\,dx : a)$ nur durch Logarithmen gegeben ist, so ist z algebraisch durch x gegeben und also kann $\int z^{n-1} q\,dx$ algebraisch, und folglich die Gleichung O zwischen x und y algebraisch seyn, wie in (II). Ist aber $\int (p\,dx : a)$ ganz, oder zum Theil algebraisch, so findet zwischen z und x folglich auch zwischen x und y keine algebraische Gleichung statt, wie in (IIII).

VI. Wenn $n = 1$ scheint die Integrale (I) was unendliches zu enthalten. Aber alsdenn ist $ypdx$ mit $yqdx$ einerley, weil p sowohl als q

jede Function bedeuten kann. Die Gleichung verwandelt sich also in $a\,dy = y\,p\,dx$ deren Integral $a \log y = \int p\,dx$ ist.

VII. Wenn y nicht höher als von der ersten Potenz vorhanden ist so ist $n = o$ oder

$$c + \frac{ay}{z} = b\int \frac{q\,dx}{z}$$

VIII. Diese Differentialgleichung brachte schon Leibniz durch Voneinandersonderung der veränderlichen Grössen auf Quadraturen. Act. Er. Mart. 1696; p. 147. Sie ist fast die einzige etwas allgemeine, wo sich die veränderlichen Grössen von einander sondern lassen, sagt Euler Inst. Calc. Int. Vol. I. Sect. 2. Cap. 1. sonst kann man solches nur in einzelnen Fällen verrichten dergleichen er da ebenfalls anführt.

IX. In $P.y^{m-1}.dy + Q.y^m.dz = R.dz$ sind P, Q, R, Functionen von z.

Die veränderlichen Grössen von einander zu sondern, und dann die Integration auf Quadraturen zu bringen lehrt Landerbeck Kongl. Vetenskaps Academiens Nya Handlingar för 1796. I. Quart. 5. Abh.

413. Aufg. Man soll die gleichartige Gleichung (Alg. 529)

$$(a.x^m + b.x^{m-1}.y \ldots + k\,y^m)\,dx + (p.x^m + q.x^{m-1}.y \quad + \omega.y^m).dy = o$$

integriren, wo nichts als x und y veränderlich ist.

Auft.

Aufl. I. Man setze $y = zx$; $dy = zdx + xdz$ wo also noch z veränderlich ist. Also

$$(a + bz \ldots + kz^m).\, x^m dx + (p + qz \ldots + \omega z^m)\, x^m z dx + (p + qz + \omega z^m)\, x^{m+1} dz = 0$$

II. Also

$$-\frac{dx}{x} = \frac{p + qz \ldots + \omega z^m}{a + (b+p)z \ldots + \omega z^{m+1}}\, dz$$

Und dieses auf 385 u. f. zu bringen

$$-\frac{\omega dx}{x} = \frac{p + qz \ldots + \omega z^m}{\frac{a}{\omega} + \frac{b+p}{\omega} z \ldots + z^{m+1}} \cdot dz$$

wo des rationalen Bruchs der in dz multiplicirt ist, sein Zähler = M; sein Nenner = N. Man kann also dieses nach a. O. integriren, und im Integrale $\frac{y}{x}$ statt z setzen.

III. Es ist also $N = (z - A).(z - B).(z - C) \ldots$ welche Factoren an der Zahl $m + 1$ seyn werden. Wenn man $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Zähler der $m + 1$ Brüche heißt die nach (360) herauskommen, so ist

$$-\frac{\omega dx}{x} = \frac{\alpha dz}{z - A} + \frac{\beta dz}{z - B} + \frac{\gamma dz}{z - C} \ldots$$

und

$$\omega \cdot l \frac{\text{Const}}{x} = \alpha \cdot \log(z - A) + \beta \cdot \log(z - B) \ldots$$

oder

$$\frac{\text{Const}\,\omega}{x^\omega} = \frac{(y - Ax)^\alpha}{x^\alpha} \cdot \frac{(y - Bx)^\beta}{x^\beta} \ldots$$

$$\text{Const}\,\omega = x^{\omega - \alpha - \beta \ldots} \cdot (y - Ax)^\alpha \cdot (y - Bx)^\beta \ldots$$

III. Exempel. $m = 1$; oder

$(ax + ky)\,dx + (px + \omega y)\,dy = 0$ und

$$M = p + \omega z;\quad N = \frac{a}{\omega} + \frac{(k+p)}{\omega} \cdot z + z^2$$

Wenn man $N = 0$ setzt, und die alsdenn herauskommende quadratische Gleichung auflöset, so erhält man

$$z = \frac{-(k+p) \pm Q}{2\omega}$$

wo $Q = \sqrt{((k+p)^2 - 4a\omega)}$

Also sind die beyden Factore, in die sich N zerfällen läßt

$$z + \frac{k + p - Q}{2\omega} = z - A$$

$$z + \frac{k + p + Q}{2\omega} = z - B$$

Daher ist

in 361	P	q	S	A
hier	$-A$	-1	$z - B$	ω

und

und hernach

361 hier	p — B	q — 1	S z — A	A β

Daraus findet sich nach dortigem Verfahren

$$\alpha = \frac{p + \omega . A}{A - B}; \quad \beta = -\frac{p - \omega B}{A - B}$$

und $\alpha + \beta = \omega$

Daher in III;

$\text{Const}\omega = (y - Ax)^{\alpha} . (y - Bx)^{\beta}$

wo A, B, α, β, durch die beständigen Grössen gegeben sind.

V. In (I) setze man $dz = o$ so kömmt

$$a + bz \ldots + kz^m \; m + 1 = o$$
$$+ p \qquad + \omega z$$

eine bestimmte Gleichung für z; die m + 1 Wurzeln hat. Nun ist $z = \frac{y}{x}$ eine Zahl, also giebt dieses m + 1 bestimmte Zahlen, und jede solche Zahl giebt eine Gleichung $y = zx$ für eine gerade Linie. Auser der krummen Linie also, welche die Integration nach (IIII) giebt, thun der gleichartigen Gleichung, auf m + 1 gerade Linien genug.

VI. Ex. Für $m = 1$. kömmt in (V) $a + (k + p) z + \omega z^2 = o$ woraus also die beyden Werthe von z folgen, die in (IIII) aus $N = o$ hergeleitet wurden.

414. Zus.

414. Zuſ. $(ax^m \ldots + kx^{m-n}y^n)^e = x^{me}.(a \ldots + kz)^{ne} = x^{ne}.Z$ wo der andere Factor kein x ſondern nur z enthält. Wenn e ein Bruch iſt, bedeutet dieſes eine Wurzelgröſſe.

415. F ſey eine gleichartige Function der beyden veränderlichen Gröſſen, die aber auch irrationale Theile enthalten mag, ſo muß erſtlich jeder ſolcher Theil für ſich gleichartig ſeyn, das iſt, die Glieder, welche zuſammen unter einem Wurzelzeichen ſtehen, müſſen eines ſoviel Abmeſſungen der veränderlichen Gröſſen haben als das andere; zweytens, müſſen dieſe Wurzelgröſſen mit ſolchen Producten der veränderlichen Gröſſen multiplicirt ſeyn, daß ſie lauter gleichartige Theile geben. So iſt $x\sqrt{(x^4 + y^4)} + y^2\sqrt[3]{(y^3 + xyy)}$ eine gleichartige Function; weil die erſte Wurzelgröſſe für zwo, die andere für eine Abmeſſung gerechnet wird. Alſo muß ſich jeder Theil von F ſo ausdrucken laſſen. $x^\alpha y^s.(ax^m \ldots + kx^{m-n}y^n)^e$ ſo daß $me + \alpha + s = \lambda$ einer Zahl, die für einen Theil ſo groß als für den andern iſt. Dieſer Theil läſſt ſich aber auch ſo ausdrucken $x^{me+\alpha+s}.Z$ (414). Alſo beſteht F aus lauter Theilen, deren jeder ein Product aus einer Function von z, in eine Potenz von x iſt, die in einem Theile wie in dem andern bleibt. Man kann alſo dieſe Potenz von x als einen gemeinſchaftlichen Factor abſondern, und F ſo ausdrucken x^λ. T wo T eine Function von z iſt.

416.

416. Wenn F, G, gleichartige Functionen von x; y; sind, die auch mit aus irrationalen Theilen bestehen, und $Fdx + Gdy = 0$; so giebt z statt y, und $zdx + xdz$ statt dy gesetzt, $x^{\lambda}. Tdx + x^{\lambda} V. (zdx + xdz) = 0$; wo V auch eine Function von z ist, wie T (415); daraus folgt $-\frac{dx}{x} = \frac{Vdz}{T + Vz}$ eine Gleichung wie die 413; I nur daß T und V auch Irrationalgrössen enthalten können.

Ex. $(x \sqrt[5]{y^4 x} + \sqrt{(x^4 + x^3 y)})\, dx + y \sqrt[3]{xyy}.\, dy = 0$. Hier ist

	für F		für G
$e =$	$\frac{4}{5}$;	$\frac{4}{5}$;	$\frac{1}{3}$
$\alpha =$	1	0	0
$\varepsilon =$	0	0	1
$m =$	5	4	3
$\lambda =$	2	2	2

also $T = \sqrt[5]{z^4} + \sqrt{(1 + z)}$; $V = z. \sqrt[3]{zz}$. Wenn also $dz = 0$ so giebt $T = -Vz$ wieder eine Gleichung für z zu Bestimmung der geraden Linien $y = zx$ die der Differentialgleichung genug thun.

Anm. Ich habe hievon in einer Vorlesung in der K. Soc. d. Wiss. umständlicher gehandelt. Sie ist die 4; in den dissertat. math. et phys. Soc. R. S. 1756. . . . 1766 exhibitis. Joh. Bernoulli hat diese Gleichungen

chungen integriren gelehrt, ohne die veränderlichen Gröſſen von einander zu ſondern, wovon ich in der Ausübung keinen Vortheil ſehe. Op. T. III. n. 136. T. IIII. n. 156. Daß ſich die veränderlichen Gröſſen von einander ſondern laſſen, hat er nicht erinnert. Inſtituzioni analitiche ad uſo della gioventu' Italiana di Donna Maria Gaetana Agneſi Milaneſe, dell' Accademia delle Scienze di Bologna; Milano 1748; 2 Quartbände. In dieſem Werke L. IV. c. 3. §. 14. p. 869 wird gewieſen wie man in ſolchen Gleichungen die veränderlichen Gröſſen von einander ſondert, auch §. 18 wie man Gleichungen, die nicht gleichartig ſind, zuweilen in gleichartige verwandeln kann. Folgendes iſt ein Exempel davon.

417. Aufg. **Die Umſtände zu beſtimmen, unter denen die Gleichung**
$(a y^n x^m + b y^q x^p) . dx + c x^r y^s dy = 0$
ſich in eine gleichartige verwandeln läſſt.

Auflöſ. Man ſetze $y = z^t$; dieſes giebt $(a z^{tn} x^m + b z^{tq} x^p) dx + tc x^r z^{st+t-1} dz = 0$ Soll dieſe Gleichung gleichartig ſeyn, ſo iſt $tn + m = tq + p = r + (s+1)t - 1$; die erſten beyden gleichen Werthe geben $t = \frac{p-m}{n-q}$ welches in dem dritten und zweyten ſtatt t geſetzt, $(s-q+1).(p-m) = (p-r+1)(n-q)$ giebt. Dieſe Vergleichung muß unter den Exponenten ſtatt finden, wenn ſich die gegebene Gleichung ſoll auf eine gleichartige bringen laſſen.
In zween Fällen geht es nicht an z^t ſtatt y zu ſetzen, 1) wenn $p = m$; alsdenn aber verwandelt ſich die vorgegebene Gleichung ſelbſt in $x^{m-r} dx =$

$dx = -\frac{cy^s\,dy}{ay^n + by^q}$ 2) wenn $n = q$ da verwandelt sie sich in $\frac{(ax^m + bx^p)\,dx}{x^r} = -cy^{s-n}\,dy$.

418. Aufg. $dp + p\,d\omega = dQ$ zu integriren, wo in Q nichts von p enthalten ist, ω aber durch eben solche veränderliche Grössen gegeben seyn kann wie Q; z. E. es könnte $d\omega = \frac{ds}{f}$ seyn, wenn dx und dy in dQ wären, da denn $ds = \sqrt{(dx^n + dy)}$. Also sind hie die veränderlichen Grössen vermengt.

Aufl. Man erinnere sich, daß von e^ω das Differential $d\omega.\ e^\omega$ ist (An. Un. §. 241) Man multiplicire also mit e^ω

$e^\omega\,dp + p.\,d\omega.\,e^\omega = e^\omega\,dQ$, so steht linker Hand das Differential von $p.\,e^\omega$, also ist

$p.\,e^\omega = \int e^\omega\,dQ$ oder $p = e^{-\omega}.\int e^\omega\,dQ$, wo also p durch die übrigen veränderlichen Grössen gegeben ist.

Man setze $\int e^\omega\,dQ = e^\omega.\,Q + P$ so ist

$e^\omega\,dQ = e^\omega.\,dQ + d\omega.\,Q.\,e^\omega + dP$ oder

$dP = -e^\omega.\,Q.\,d\omega$ und

$p = e^{-\omega}.(e^\omega.\,Q - \int e^\omega.\,Q.\,d\omega)$

$= Q - e^{-\omega}.\int e^\omega.\,Q.\,d\omega$.

Ein Exempel hievon hat Euler Principia motus fluidorum §. 53. Comment. Nou. Petrop. T. VI. p. 294.

Inte-

Integrirung der Differentialgleichungen, durch Reihen vermittelst des Newtoniſchen Parallelogramms, und anderer Methoden.

419. Aufg. Aus der Differentialgleichung zwiſchen x und y; y durch eine Reihe auszudrucken, die nach den Potenzen von x ſteigt oder fällt.

Aufl. Man nehme dx unveränderlich an, und ſetze $y = Ax^m + \ldots$ alſo $dy = mAx^{m-1} dx + \ldots$. ſo verwandelt ſich die Differentialgleichung in eine zwiſchen x und y die lauter endliche Gröſſen enthält; mit dieſer kann man alſo nach Alg. 665. verfahren.

Ex. $abdy + axdy - by - yx - aa = o$ Hier verſtehe ich, daß in die Glieder, welche kein dy enthalten, dx multiplicirt iſt. Ich ſehe nähmlich dx als die Einheit der Differentiale an, daher man in dieſer Bedeutung auch ſagen kann, es ſey $dx = 1$ Nun kömmt alſo $mabAx^{m-1} + maAx^m - bAx^m - Ax^{m+1} - aa$ die Exponenten in die Fächer geſetzt, geben

* m + 1
o m
* m − 1

Für eine ſteigende Reihe ſetze ich $m - 1 = o$, alſo $m = 1$; die Werthe o; 1; 2; geben den Unterſchied der Exponenten, oder $\delta = 1$; alſo $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 \ldots + Mx^{n-1} + Nx^n + Ox^{n+1} \ldots$ und

abdy

$$
\begin{array}{l|l}
abdy = abA + 2aBx + 3abCx^2 \ldots + (n+1)abOx^n & \\
axdy & \\
\hline
-by = & +aA \\
-xy = & +2aB - bA \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
-ay = & +nAN - bN - M
\end{array}
$$

folglich $A = a : b$; $B = (b - a) A : 2ab$; $C = (A + (b - 2a) . B) : 3ab$, und überhaupt $O = (M + (b - na) . N) : (n + 1) ab$ so daß jeder Coefficient durch die beyden nächstvorhergehenden gegeben ist.

Für eine fallende Reihe ist $m + 1 = 0$; oder $m = -1$ die Werthe sind $0; -1; -2$; also $\delta = -1$ und $y = Ax^{-1} + Bx^{-2} + \ldots\ldots + Lx^{-n+2} + Mx^{-n+1} + Nx^{-n}$ wo $A = -aa$; $B = -(b + ab) A$; $C = -(b + 2.a) . B - abA$; $N = -(b + na) M - (n - 1) abL$.

420. Wenn y nur von der ersten Abmessung, und nicht mit dy multiplicirt vorhanden ist, so läßt sich das Gesetz des Fortganges meistens leicht allgemein darthun, wie das Exempel zeigt. Sonst würde es etwas schwerer fallen, doch aber nach dem 56 gebrauchten Verfahren ebenfalls zu bewerkstelligen seyn.

421. Wenn man statt y die Reihe $Ax^m + Bx^{m+\delta} \ldots\ldots + Rx^{m+r\delta} \ldots\ldots$ setzt, die ich wie Alg. 645 nennen will; daß sich die Differentialgleichung in die Reihe C verwandelt, so wird aus jedem Theile der Differentialgleichung wie $x^x y^\varepsilon dy$ eine Reihe $\mathcal{O}$; in welcher R zuerst bey dem Exponenten $m(\varepsilon + 1) + r\delta - 1 + x$ vorkömmt. Denn in der Reihe, die aus $y^\varepsilon x^x$ wird, kömmt R zuerst bey dem Exponenten $m\varepsilon + r\delta + x$ vor, (Alg. 656.) und in der Reihe dy bey $m + r\delta - 1$. Jener Reihe Glied also, in welchem

chem R zuerſt vorkömmt, mit der Reihe dy erſtem Gliede multiplicirt, bekömmt den Exponenten $me + r\delta + \varkappa + m - 1$. Und jener Reihe erſtes Glied, mit der Reihe dy Gliede, wo R zuerſt vorkömmt, multiplicirt bekömmt den Exponenten $m + r\delta - 1 + me + \varkappa$, welche beyden Exponenten mit dem vorhin genannten einerley ſind; Eher aber kann R in ♂ nicht vorkommen.

Ich nehme allemahl r für eine ganze bejahte Zahl an. Iſt $m + r\delta < m$ ſo muß δ verneint ſeyn.

Wenn im Exempel 419; ♂ aus $ax dy$ wird, ſo iſt $e = 0$; $\varkappa = 1$; $m = \delta = 1$; Es ſey $R = B$ ſo iſt $r = 1$; und B kömmt zuerſt beym Exponenten 2 vor.

422. Wenn $m = 0$ kömmt R zuerſt bey den Exponenten $r\delta - 1 + \varkappa$ vor. In dieſem Falle verſchwindet der Reihe dy eigentliches erſtes Glied mAx^{m-1} und das, welches nun ihr erſtes wird, $\delta Bx^{\delta-1}$ giebt mit dem Gliede der Reihe $y^e x^\varkappa$ das zuerſt R hat multiplicirt, den Exponenten $\delta - 1 + \varkappa$: Aber das erſte Glied der Reihe dy das R enthält, hat den Exponenten $r\delta - 1$ und giebt mit der Reihe $y^e x^\varkappa dy$ erſtem Gliede multiplicirt den Exponenten $\delta r - 1 + \varkappa$.

423 Eine Reihe λ entſtehe aus einem Gliede der Differentialgleichung, daß kein dy enthält, und $y^\lambda x^\tau$ heiſſe, ſo kömmt in ihr R zuerſt bey dem Exponenten $m\lambda + r\delta + \tau$ oder wenn $m = 0$ bey $r\delta + \tau$ vor.

424. Eine andere Reihe wie die in 421 die aus $x^{\nu}\, y^{\pi}\, dy$ entstehe, heisse ♀, und fange sich nicht in der Reihe ☾ erstem Gliede, ♂ aber im ersten an, und sey also eine Anfangsreihe (Alg. 650) da ♀ keine ist. Wenn δ eine bejahte Zahl ist, so wird der erste Exponent der Reihe ♂ eine kleinere bejahte oder grössere verneinte Zahl seyn, als der erste Exponent der Reihe ♀; oder es ist $m(\varepsilon+1)+\varkappa-1 \lessgtr m.(\pi+1)+\nu-1$, gröſſer und kleiner, in der zweyten Bedeutung 153 genommen. Addirt man also auf beyden Seiten $r\delta$ so ist der Exponent, bey welchem R zuerst in der Anfangsreihe vorkömmt, kleiner, als der Exponent, bey dem es zuerst in ♀ vorkömmt, oder R kömmt in jener Reihe eher als in dieser vor, und ist folglich aus jener schon bestimmt, ehe es in dieser vorkömmt, imgleichen ehe es in 4 (423) vorkömmt, wenn 4 auch keine Anfangsreihe, oder derselben erster Exponent gröſſer ist als der erste der Anfangsreihe.

Ist δ eine verneinte Zahl, so erhellt eben dieses, man darf nur abziehen statt addiren, und kleiner statt gröſſer setzen.

425. Wenn δ oder m verneint, und $m+r\delta=0$ ist, so findet sich R gar nicht in der Reihe dy; Aber in der Anfangsreihe (424) kömmt es in dem Producte aus dem ersten Gliede von dy in das Glied der Reihe $y^{\varepsilon}x^{\varkappa}$ das zuerst R enthält, zuerst bey dem Exponenten $m\varepsilon+r\delta+\varkappa+m-1=m\varepsilon-1+\varkappa$ vor.

426.

426. Wenn sich bey dem Exponenten $m.(s+1)+r\delta-1+\varkappa$ noch kein Glied der Reihen (424) die keine Anfangsreihen sind befindet, so ist $R=0$ (Alg. 657.).

427. Wenn wegen 425.; R in einer Anfangsreihe, die aus einem Gliede der Gleichung entstanden ist, das dy enthält, nicht bey demjenigen Exponenten vorhanden ist, wo es zuerst vorkommen sollte, und wenn unter den Gliedern der Gleichung, die dx enthalten, keines eine Reihe giebt, in der sich R bey diesem Exponenten befindet, so ist der Coefficient der Gleichungsreihe (Alg. 649) bey diesem Exponenten nur durch schon zuvor bestimmte Coefficienten der Reihe ⊙ gegeben: Wenn diese also nicht von sich selbst $=0$ geben; so kann der Coefficient der Gleichungsreihe nicht verschwinden, und die Gleichungsreihe findet also nicht statt.

Exempel. $xxdy - y - pxx - 2x^3 - rx = 0$ giebt

3
2
1 m + 1
m

Man setze $m+1=3$ oder $m=2$ und $y=Ax^2+Bx+C+Dx^{-1}\ldots$ also

$xxdy = 2Ax^3 + Bx^2 * - D$
$-y = \quad -A - Bx - C$
u. s. w. $= -2 - p - r$

Hier ist $A=1$; $B=1+p$; und im dritten Gliede soll $1+p+r=0$ seyn: Wenn dieses

so zutrifft, so bleibt C oder D unbestimmt, und das Uebrige hat alles seine Richtigkeit; wo aber nicht, so kann man diese Reihe nicht brauchen.

Dieses kann sich also nur ereignen, wenn m und δ einander entgegengesetzte Grössen sind, und $\frac{m}{\delta}$ eine ganze verneinte Zahl ist.

428. Es sey R = A. und also r = 0; über dieses auch m = 0; so ist der Reihe dy erstes wirkliches Glied; $\delta B x^{\delta - 1}$. Die Glieder der Gleichung nun, die Anfangsreihen (424) geben, können I) theils dx theils dy; II) nur dy; III) nur dx enthalten. Im Iten Falle befindet sich B zugleich mit A schon im ersten Coefficienten der Gleichungsreihe, und folglich kann man A oder B unbestimmt lassen, und dadurch B oder A, und die folgenden bestimmen. Im IIten Falle wird A bestimmt, denn B ist ein Factor in allen Theilen, die den ersten Coefficienten der Gleichungsreihe zusammen ausmachen, also kann man diesen Coefficienten, der = 0 gesetzt wird, mit B dividiren, und eine Gleichung für A erhalten. Wollte man es nicht so machen, so könnte man auch in diesem Coefficienten B = 0 setzen, da denn A unbestimmt bliebe, und da man also auch A und C zugleich = 0 setzen könnte. Im IIIten Falle wird wiederum A bestimmt, und wenn alle Glieder, die dx enthalten, Anfangsreihen geben, so findet man ein A das statt y gesetzt, die Gleichung

chung auf o bringt, wenn $dy = o$ oder $y = A$. Dieser Werth kann zwar für die ganze Gleichung nicht richtig seyn, weil $y - 1$ eine veränderliche Grösse seyn soll, er ist aber doch richtig, wenn man die Glieder, die dy enthalten, aus ihr wegläßt.

429. Ex. Ein Exempel sey die Gleichung, welche die Columne linker Hand ausmacht; wo

$$\begin{array}{rl|l} y = & A + Bx & + Cx^2 \ldots . \\ ydy = & AB & + BBx \\ & & + 2AC \\ dy = & B & + 2C \\ yyx = & & A^3 \\ x = & & 1 \\ -f = & -f & \\ \hline o = & & \end{array}$$

Dieses Exempel giebt für den I. Fall $A = \frac{f - B}{B}$ oder $B = \frac{f}{A + 1}$. Will man es für den zweyten Fall brauchen, so setze man $f = o$; also $A = -1$ oder $B = o$.

Ein Exempel des IIten Falles wo die Reihe für y eben die Gestalt hat, ist

$$
\begin{array}{rcll}
+x^2\,y\,dy = & & +ABx^2 & +2ACx^3 \\
 & & & +BB \\
 & & & +2AC \\
 & & & +B \\
+x^3\,dy = & & & \\
+fxy^2 = & +fAAx & & \\
+gxy^2 = & +gA & & \\
+hx = & +h & & \\
+kxx = & & +k & \\
\hline
0 = & & &
\end{array}
$$

wo $fAA + gA + h = 0$. Der hieraus gefundene Werth von A thut der Differentialgleichung völlig genug, wenn $dy = 0$ und $k = 0$. Es ist nähmlich klar, daß sie sich alsdenn durch xdx dividiren läßt.

430. Weil R wo es zum erstenmahle vorkömmt, nur die erste Abmessung hat, (Alg. 647; 656;) so wird es wie Alg. 657. $= 0$, wenn sich da, wo es zuerst vorkömmt, nur Grössen, die von den Anfangsreihen herrühren befinden, und diese Grössen nicht für sich selbst verschwinden, in welchem Falle es unbestimmt bliebe.

431. Der Anfangsreihe (421) Glied, das den Exponenten $m(\varepsilon + 1) + r\delta - 1 + \varkappa$ hat, besteht aus Producten, die R von der ersten Abmessung enthalten, und aus andern, in denen sich die Coefficienten der Reihe ⊙ befinden, die vor R vorhergehen.

432. Aufg. Von $(ay + bx^{\beta} + cx^{n-1} \ldots + hx^{n-\lambda} \ldots + k)\,dx - dy = 0$ die Integrale zu finden.

Aufl. Die Exponenten geben

$$\begin{matrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \quad m \\ m-1 \end{matrix}$$

Um nun eine fallende Reihe zu haben; setze man $m = n$, also $\delta = -1$, und

$$ay = aAx^{n} + aBx^{n-1} \ldots + aLx^{n-\lambda} \ldots\ldots + aRx^{-1} + aSx^{-2}$$

$$-dy = -nAx^{n-1} \ldots - (n-\lambda+1)\,Kx^{n-\lambda} - nRx^{-2} \text{ u. s. w.} = +bx^{n} + cx^{n-1} \ldots + hx^{n-\lambda}$$

Wo $A = -b : a$; $B = (nA - c) : a$;

$L = \dfrac{(n-\lambda+1)\,K - h}{a}$ also $R = 0 = S$ und allen folgenden Coefficienten der Reihe y daß also dieser Reihe letzter Coefficient für $\lambda = n$, ist, und die Reihe endlich wird.

Goldbach hat diese Reihe aus andern Gründen gefunden. Comm. Ac. Petrop. T. I. p. 209.

Ob aber gleich $y = \dfrac{-bx^{n}}{a} + \dfrac{nA-c}{a}x^{n-1} \ldots + Q$ der Differentialgleichung genug thut, und

also als die Integrale davon angesehen werden kann; so läßt sich doch eine andere Integrale finden, wo y nicht durch eine endliche Reihe auszudrucken ist. Man findet dieses aus (412. I.) denn

das dortige a; b; p; n; q -
ist hier 1 1; a; 0; bx^n...

also das dortige $\int p\,dx$: a hier ax und $z = e^{-ax}$ also Const $+ ye^{-ax} = \int e^{-ax} q\,dx$. Dieses Integral findet man hier so. Die gefundene Reihe für y heisse T, und es sey $y = T + u$ so ist

$$\begin{aligned} a\,y\,dx &= a\,T\,dx + a\,u\,dx \\ -dy &= -a\,dT + du \\ +k\ldots &= +k \end{aligned}$$

$$0 = 0$$

Nun ist das, was sich in der ersten Columne zur rechten Seite des Gleichheitszeichens befindet, wie man nur gefunden hat $= 0$; also auch $a\,dx = \frac{du}{u}$ und $e^{ax} + \text{Const} = u$ wo sich u durch eine unendliche Reihe giebt. (239) Eine steigende Reihe durch das Parallelogramm gesucht, wird auch unendlich.

Daß die endliche Reihe nicht die völlige Integrale dieser Gleichung sey, hat auch Nicolaus Bernoulli erinnert Comm. Ac. Petrop. T. I. p. 207. Man s. auch Op. Isc. Bern. T. II. n. 82. p. 733. und daselbst Cramers Noten.

433. Aufg. z in $\alpha z + (\beta + \gamma x)\,dz - (\varepsilon + \vartheta x) = 0$ zu finden.

Aufl. I. Wenn $m = 1$, $\delta = 1$ kömmt

1
0 m
m − 1

$$\begin{array}{rcl} \alpha z & = & \alpha Ax + \alpha Bx^2 .. + \alpha Mx^{n-1} \\ + \beta dz & = & + \beta A + 2\beta B + 3\beta C .. + n\beta N \\ + \gamma x dz & = & + \gamma A + 2\gamma B .. + (n-1)\gamma M \\ - \varepsilon & = & - \varepsilon \\ - \vartheta x & = & - \vartheta \end{array}$$

also $A = \varepsilon : \beta$; $B = -\frac{(\gamma + \alpha).\, A + \vartheta}{2\beta}$;

$C = -\frac{(\alpha + 2\gamma)B}{3\beta}$; $N = -\frac{(\alpha + (n-1)\gamma)M}{n\beta}$;

Ist also $\alpha = -(n-1).\gamma$ so wird N mit allen folgenden Coefficienten der Reihe, welche z ausdruckt, $= 0$; oder diese Reihe bricht ab, wenn $-\frac{\alpha}{\gamma}$, eine ganze bejahte Zahl ist. Man nenne diese Reihe T und setze

$$\begin{array}{rcl} \alpha z & = & \alpha T + \alpha w \\ + \beta dz & = & + \beta dT + \beta dw \\ + \gamma x dz & = & + \gamma x dT + \gamma x dw \\ - \varepsilon - \vartheta x & = & - \varepsilon - \vartheta x \end{array}$$

so ist wiederum $\alpha w + (\beta + \gamma x).\, dw = 0$ und $\frac{dw}{\alpha w} = -\frac{dx}{\beta + \gamma x}$ woraus sich wieder w giebt.

II. Man

II. Man ſetze $\beta + \gamma x = u$; alſo $dx = \frac{du}{\gamma}$ und $\alpha z du : \gamma + u dz - \varepsilon du : \gamma - \vartheta u du : \gamma\gamma + \vartheta\beta du : \gamma\gamma = 0$. Wenn man hier z durch u ſuchet, findet ſich

$$\frac{\alpha}{\gamma} z du = \frac{\alpha}{\gamma} A + \frac{\alpha}{\gamma} Bu \ldots + \frac{\alpha}{\gamma} N u^n$$
$$u dz = \quad + B \quad + nN$$
$$\text{u. ſ. w.} = \frac{\vartheta\beta - \varepsilon\gamma}{\gamma\gamma} - \frac{\vartheta}{\gamma\gamma}$$

alſo $A = (\varepsilon\gamma - \vartheta\beta) : \alpha\gamma$; $B = \vartheta : (\alpha + \gamma)$. γ ferner $- \alpha : \gamma = n$ da N unbeſtimmt bleibt; oder $N = 0$; wenn man das erſte annimmt; ſtatt u ſeinen Werth ſetzt und denn N ſo beſtimmt, daß x und z zugleich verſchwinden, ſo findet man nach gehöriger Rechnung die Integrale ſo, wie ſie Joh. Bernoulli Hydraul. P. I. art. 14. Op. T. IIII. n. 186. gegeben hat.

Wollte man hier wieder dieſen gefundenen endlichen Ausdruck T; heiſſen, und $z = T + w$ ſetzen, ſo käme

$$\frac{\alpha}{\gamma} z du = \frac{\alpha}{\gamma} T + \frac{\alpha}{\gamma} w du$$
$$+ u dz = + u dT + u dw$$
$$\text{u. ſ. w.} = \text{u. ſ. w.}$$

alſo müſſte $\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{du}{u} + \frac{dw}{w} = 0$ ſeyn. Dieſes

gäbe,

gäbe, wenn x eine willkührliche beständige Grösse bedeutet; $w = x^{-n} \cdot u^n$ und also wäre x^{-n} was vorhin N war; daher hier die vorhin gefundene Integrale vollständig ist.

III. Nach (412) kann man diese Differentialgleichung wie sie in der Aufgabe ausgedrucket worden ist auch so integriren.

412	y	n	a	p	b	q
hier	z	0	1	$\frac{-\alpha}{\beta+\gamma x}$	1	$\frac{\varepsilon+\vartheta x}{\beta+\gamma x}$

also das dortige $\frac{p\,dx}{a}$ hier $-\frac{\alpha\,dx}{\beta+\gamma x}$; davon das Integral $-\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\log(\beta+\gamma x)$, daher das dortige z hier $(\beta+\gamma x)^{-\alpha:\gamma}$ und aus 412. VII.

$$\alpha + az.(\beta+\gamma x)^{+\alpha:\gamma} = \int \frac{\alpha+\vartheta x}{(\beta+\gamma x)^{1-\alpha:\gamma}}.dx$$

434. Aufg. y durch x in der Gleichung $yy + (\frac{1}{2}x^3 y + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}x^3)\,dy - xxy = 0$ auszudrucken.

Aufl. $m+2 \quad 2m+2$

$\overset{*}{m} \qquad \overset{*}{2m}$

$m = 2m$ giebt (Alg. 644.) $m = 0$; $\delta = 2$; da wird aber der Reihe $A + Bx^2 + Cx^4 \ldots$

jeder

jeder Coefficient = o. Setzt man $y = Ax^{-2} + B + Cx^2 \ldots$. so bleibt A unbestimmt, aber B wird = A − 1; C = (AB − BB): 2A u. s. w. Daß diese Reihe auch im Parallelogramm enthalten ist, erhellt so: die äussersten Fächer werden deswegen gleich gesetzt, weil sie den ersten Exponenten der Gleichungsreihe enthalten; (Alg. 650) wenn man nun m = 2m + 2 setzt, woraus m = − 2 folgt, so sind diese Fächer zwar nicht die äussersten, weil 2m unter der Linie durch sie liegt, aber der Coefficient der Gleichungsreihe, der dem Exponenten 2m oder − 4 zugehört, verschwindet von sich selbst, weil er aus den ersten Coefficienten der Reihen yy und $\frac{1}{2}$ xydy besteht, die hier AA und − AA sind, daß man also das Glied der Gleichungsreihe, das den Exponenten 2m + 2 oder − 2 hat, als das erste, und seinen Exponenten als den ersten ansehen kann. Dieses kömmt also auf die beständigen Grössen in der Gleichung an. Hätte das Glied, das $\frac{1}{2}$ xydy heisst, z. E. $\frac{3}{2}$ xydy geheissen, so wäre es nicht angegangen. Man darf hier nicht A = o setzen, wodurch sich die letztere Reihe in die erste verwandeln würde; denn dadurch würde A oder B = − 1; da doch A = o ist, und B oder $C = -\frac{1}{2.0}$ unendlich; u. s. w. Die letzte Reihe kann sich nähmlich deswegen nicht in die erste verwandeln, weil für x = o der Werth von

y in

y in der letztern unendlich, in der erstern = A wird.

435. Aufg. Durch die Fächer $\lambda m + l$; $\varphi m + f$ (Alg. 636 wo b = 1) gehe eine gerade Linie, so daß zwischen beyden in dieser geraden Linie kein anders Fach fällt. Eben diese Linie gehe auch durch das Fach $\tau m + t$. Man suchr τ; t; durch λ; φ; l; f;

Auflösung. In Alg. 636. ist $A = \lambda m + l$; $C = \varphi m + f$ also das dortige n; r; $n + \delta$; $r - q$;

hier λ; l; φ; f;

Nun erhellt aus demjenigen, was dorten bey dem Werthe von B gezeigt worden ist, daß sich jedes Fach, das in eben die gerade Linie fällt, so ausdrucken lässt: $(n + k\delta)\, m + r - kd$ wo k eine ganze Zahl bedeutet. Dieser Ausdruck giebt in den hier gebrauchten Buchstaben $(\lambda + k.(\varphi - \lambda))\, m + l - k.(l - f)$.

Ex. Wenn das Linial zugleich durch $-m + r$ und 3 geht, so ist $\lambda = -1$; $l = 5$; $\varphi = 0$, $f = 3$, und jedes Fach in dieser Linie heißt $(-1 + k).\, m + 5 - k.\, 2$. Setzt man statt m nach der Ordnung 0; 1; 2; 3, 4, 5, so werden diese Fächer $-m + 5$; 3; $m + 1$; $2m - 1$; $3m - 3$; $4m - 5$, ...

436. Wenn alle in einer wagrechten Linie liegen, also m = 0; so ist l = f (Alg. 644) also ihr allgemeiner Ausdruck $(\lambda + k.(\varphi - \lambda))\, m + l$.

437.

437. Fallen alle in eine lothrechte Linie, so ist $m = \infty$ und ihr Ausdruck $m\lambda + l - k.(l - f)$ weil $\lambda = \varphi$.

438. In den Theilen einer Differentialgleichung welche dy enthalten, habe y die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, ..$; x die Exponenten a; b; c;.. so daß diese Theile so aussehen $y^{\alpha} x^{a} dy$ u. s. w. Setzt man nun hier $A x^{m}$ statt y; so verwandeln sich die Exponenten in $m.(\alpha + 1) + a - 1$; $m.(\beta + 1) + b - 1$; $m.(\gamma + 1) + c - 1$; u. s. w. Man setze also in 435; $\lambda = \alpha + 1$; $l = a - 1$; $\varphi = \beta + 1$; $f = b - 1$; so ist für jeden andern Exponenten, der mit jenen beyden in eine gerade Linie fällt; $\gamma = \alpha + k.(\beta - \alpha)$; $c = a - k.(a - b)$ und die Reihen der Exponenten sind folgende, wo die in einem Theile der Gleichung beysammen sind, die hier untereinander stehen:

Bey y; α; β; $2\beta - \alpha$; $3\beta - 2\alpha$...
x; a; b; $2b - a$; $3b - 2a$....

439. In den Theilen der Gleichung, welche dx enthalten, seyn die Exponenten von y; π, ϱ, σ, von x; p, r, f, daß die Glieder so aussehen, $y^{\pi} x^{p} dx$... Diese verwandeln sich in $m\pi + p$; $m\varrho + r$; $m\sigma + f$; und man findet eben so, daß für jeden Exponenten, der mit den ersten beyden in eine gerade Linie fällt, $\sigma = (\pi + k.(\varrho - \pi))$. m und $f = p - n.(p - r)$.

440. I) $m.(\alpha + 1) + a - 1 = m.(\beta - a) + b - 1$ giebt $m = (b - a) : (\alpha - \beta)$;

II) m

II) $m(\alpha + 1) + a - 1 = m\pi + p$ giebt $m = (p - a + 1) : (\alpha - \pi + 1)$; III; $m\pi + p = m\varrho + r$ giebt $m = (r - p) : (\pi - \varrho)$;

441. Wenn $m.(\alpha + 1) + a - 1$; $m.(\beta + 1) + b - 1$; $m\pi + p$; in eine gerade Linie fallen, so ist in 435; $\Delta = \alpha + 1$; $\lambda = a - 1$; $\varphi = \beta + 1$; $\mathfrak{f} = b - 1$; also $\pi = \alpha + 1 + k.(\beta - \alpha)$ und $p = a - 1 - k.(a - b)$.

Ex. Es sey $\alpha = 3$; $a = 2$; $\beta = 5$; $b = 7$; so ist $\pi = 4 + 2k$; $p = 1 + 5.k$, und also fallen folgender Glieder Exponenten in eine gerade Linie $y^2 x^2 dy$; $y^6 x^7 dy$; $y^4 x$; $y^5 x^6$; $y^8 x^{11}$ ...

442. Fallen aber $m\pi + p$; $m\varrho + r$; $m(\alpha + 1) + a - 1$ in eine gerade Linie, so ist $\alpha = \pi - 1 + (\varrho - \pi).k$ und $a = p + 1 - (p - r).k$.

443. In 436 ist für (442) $r = p$; und $a = p + 1$; oder alle Exponenten von x in den Theilen der Gleichung, die dy enthalten, sind unter sich gleich, und um 1 grösser als die auch unter sich gleichen Exponenten der Theile der Gleichung, welche dx enthalten.

444. In 437. ist $\alpha = \beta$; $\pi = \varrho$ (440) und $\alpha = \pi - 1$. (441).

445. Wenn man die Reihe $\odot$ (421. und Alg. 645.) in $x^{\alpha} y^{\alpha} dy$ setzt, so entsteht daraus eine Reihe, die folgende Coefficienten hat:

I) $mA^{\alpha}+1$; II) $(m+\delta+m\alpha A)^{\alpha} B$; III) $(m+2\delta+m(\alpha-1)).A^{\alpha} C + \left((m+\delta)\alpha + \frac{\alpha.(\alpha-1)}{1.2}.m\right) A^{\alpha-1} BB$

Die Potenzen von x zu denen diese Coefficienten gehören, haben die Exponenten $m\alpha+m-1+a$; $m\alpha+m-1+a+\delta$; $m\alpha+m-1+a+2\delta$. Aus $x^{p} y^{\pi}$ aber wird auf eben die Art eine Reihe, deren Coefficienten I) A^{π}; II) $\pi A^{\pi-1} B$; III) $\left(\frac{\pi.(\pi-1)}{1.2} BB + (\pi-1).A.C\right) A^{\pi-2}$ zu den Exponenten $m\pi+p$; $m\pi+p+\delta$; $m\pi+p+2\delta$ gehören. Ist nun $m\pi+p = m\alpha+m-1+a$ so haben beyde Reihen einerley Exponenten, und ihre ersten Coefficienten kommen zusammen in den ersten Coefficienten der Gleichungsreihe, die zweyten in den zweyten, die dritten in den dritten u. s. w. Die erste Reihe stellt alle Reihen vor, die aus den Theilen der Gleichung entstehen, welche dy enthalten, und die zweyte, alle die aus den Theilen der Gleichung entstehen, welche dx enthalten.

446. Gesetzt, es fallen alle Exponenten, die Ax^{m} statt y gesetzt giebt, in eine einzige gerade Linie,

Linie, so geben alle Theile der Gleichung, Anfangsreihen; und der erste Coefficient der Gleichungsreihe = o gesetzt giebt Werthe von A, die so beschaffen sind, daß $y = Ax^m$ ein völliger Werth von y ist, welcher der Gleichung genug thut.

Gleichwohl erhellt, daß sich auch hier eine unendliche Reihe erhalten lässt. Denn wenn man ⊙ in die Gleichung setzt, so bekömmt man Reihen wie ♂ und 24 (421; 423) deren erste Exponenten erwähnter maassen alle gleich sind; weil nun die Exponenten jeder Reihe eines Theiles der Gleichung eine arithmetische Progression ausmachen, (Alg. 645) so sind alle zweyten Exponenten dieser Reihen unter sich gleich, und so auch alle dritten, alle vierten, u. s. w. was auch ♂ seyn mag. Daher geben alle zweyte Glieder der Reihen der Theile zusammen das zweyte Glied der Gleichungsreihe, alle dritten Glieder der Reihen der Theile zusammen das dritte der Gleichungsreihe, u. s. w. wo man auch die Glieder rechnen muß, die nach dem Gesetze des Differentiirens durch o multiplicirt werden und verschwinden, so wäre im Exempel 427; Bxx der Reihe xxdy zweytes; aber — D ihr viertes Glied. Hieraus also bestimmt sich ♂ durch das Parallelogramm nicht.

Aber der zweyte Coefficient der Gleichungsreihe besteht aus lauter solchen Theilen wie die

beyden Coefficienten II in 445 sind; und ist also ein Product, dessen einer Factor B ist, der andere aus gegebenen Grössen der Gleichung, wie auch den schon bestimmten A und m; und endlich mit aus δ besteht. Soll also dieser Coefficient = 0 seyn, so kann man den nur erwähnten Factor = 0 setzen: da bleibt B unbestimmt, aber δ wird durch die übrigen Grössen bestimmt. Nunmehro bestimmen sich C; D; ... aus den folgenden Coefficienten, weil C nicht ein gemeinschaftlicher Factor aller Theile des dritten ist (445) und eben so wenig D aller Theile des vierten, u. s. w.

447. Man hätte auch können B = 0 setzen; weil alsdenn im dritten Coefficienten der Gleichungsreihe alles wegfiele, was mit B multiplicirt ist, so würde er sich in ein Product verwandeln, dessen einer Factor C wäre, und man würde δ dadurch bestimmen, daß man den andern Factor = 0 setzte. Wollte man aber auch C = 0 setzen, so würde sich wiederum dieses Verfahren mit D bey dem vierten Coefficienten der Gleichungsreihe auf eine von beyden Arten vornehmen lassen, u. s. w.

Man setze $Ax^m + Rx^{m+\eta}$ statt y in die Gleichung, so ist klar, daß wenn R unbestimmt bleiben soll, η sich von eben der Grösse bestimmt wie δ in 446; weil der ganze Unterschied darinnen

nen beſteht, daß man hier η ſchreibt, wo vorhin δ ſtunde. Nun ſey $\eta = r.\vartheta$ und r eine ganze bejahte Zahl, ſo bedeutet ϑ hier den Unterſchied der Progreſſion der Exponenten der Reihe C welches Alg. 645; d hieſſe, und R iſt das vorige R. Ferner nehme man an, es ſollen B; C; u ſ w. alle bis auf die Gröſſe unter ihnen, die zunächſt vor R hergeht, $= o$ ſeyn; ſo iſt klar, daß man alsdenn $Ax^m + Rx^{m+r\vartheta}$ ſtatt der beyden erſten Theile von y in die Gleichung ſetzen darf, und alſo $r\vartheta = \delta$ wird. Die Coefficienten der Reihe C die nach R folgen, werden nun durch R eben ſo beſtimmt wie in 446 die, welche nach B folgen, durch B beſtimmt werden. Alſo giebt dieſes Verfahren einerley Reihe mit 446.

448. Das Parallelogramm giebt hier eigentlich $\delta = o$ weil alle Fächer deſſelben die Exponenten enthalten, in einer geraden Linie liegen, und alſo nicht verſchiedene Werthe haben, wie doch Alg. 665. VIII. fodert. Die andere Beſtimmung von δ, beruhet auf der Natur der Differentialgleichungen, bey denen δ durch dy allein in die Coefficienten kommen kann, und läſſt ſich daher bey algebraiſchen nicht anbringen.

449. Ex. In der gleichartigen Gleichung (413) $(ax^s \ldots + kx^{s-n}y^n \ldots) dx + (px^s \ldots + tx^{s-r}y^r + ux^{s-r-1}y^{r+1} \ldots) dy =$ ſchreibe man 445; ſtatt a; α; p; π;

hier $\varepsilon - r$; r, $\varepsilon - n$; n;
so werden die 445 gefundenen Progreſſionen der Exponenten, hier

$(m-1).(r+1)+\varepsilon$; $(m-1).(r+1)+\varepsilon+\delta$; ... $(m-1).n+\varepsilon$; $(m-1).n+\varepsilon+\delta$..;

Beyder Progreſſionen erſte Exponenten werden gleich, was auch n iſt, wenn $m = 1$; und folglich findet hier 446; ſtatt, und man darf nur $Ax + Bx^{1+\delta} + Cx^{1+2\delta}$ ſtatt y ſetzen, um δ und A; C; .... nach 446 zu beſtimmen.

Man nehme zur Erläuterung die einfachſte dieſer Gleichungen $(ax + by).dx + (px + qy)dy = 0$ ſo kömmt

$$ax = ax$$
$$by = bA + bBx^{1+\delta} \ldots.$$
$$pxdy = pA + (1+\delta)pB \ldots.$$
$$qydy = qAA + q.(2+\delta)AB \ldots$$

alſo gäbe der erſte Coefficient $= 0$; A

$$= -\frac{(b+p) \pm \sqrt{((b+p)^2 - 4aq)}}{2q}$$

für einen vollſtändigen Werth von $y = Ax$ für die Fortſetzung der Reihe aber iſt $b + (1+\delta).p + q.(2+\delta).A = 0$ oder $\delta = -(b + p + 2qA) : (p + qA)$.

Dieſes wird unendlich, wenn $p + qA = 0$; alsdenn aber iſt, wegen des erſten Coefficienten auch

$bA + a = 0$; folglich $A = 1\frac{a}{b} = -\frac{p}{q}$

oder

oder $q = \frac{bp}{a}$ und die Differentialgleichung verwandelt sich in $(axby).\left(dx + \frac{p}{a}dy\right) = o$

wo entweder $y = -\frac{a}{b}$ oder $ax + py = \text{Const.}$

450. Die Progressionen der Exponenten (449) werden auch einerley, was m auch seyn mag, wenn $n = r + 1$. Damit nun hier die Exponenten $(m-1)(r+1)+s$; $(m-1)n+s$ zugleich die ersten der Gleichungsreihe werden, so müssen die Glieder, von denen sie herrühren, jenes unter denen die dy, dieses, unter denen, die dx enthalten, das erste oder das letzte seyn. So lassen sich wenigstens in manchen Fällen noch andere Reihen finden... Man setze $n = 1$ also $r = o$; und $a = o$ so ist

$$
\begin{aligned}
b x^{s-1} y &= bA x^{m+s-1} + bB \Big\} x^{m+s-1+\delta} \\
p x^{s} dy = mpA &+ (m+\delta)\, pA \Big\} \ldots \\
c x^{s-1} y^2 &= + cAA \Big\} x^{2m+s-2} \ldots \\
q x^{s-1} y dy &= + mqAA \Big\}
\end{aligned}
$$

Hier kann man nun m und δ nach Gefallen bestimmen. Man setze z. E. $(mp + b)A = o$ oder $m = -b : p$ auch $m + s - 1 + \delta = 2m + s - 2$ oder $\delta = m - 1 = -(b + p) : p$ so bleibt A unbestimmt, aber B u. s. w. werden bestimmt.

451. Die rationalen Gleichungen, die unter 443 stehen, lassen sich so ausdrucken:
$(a + by + cy^2 \ldots)dx + (p + qy + ryy \ldots)xdy = o$ oder $Pdx + Qxdy = o$ daraus folgt $-\frac{dx}{x} = \frac{Qdy}{P}$ wovon sich die Integrale nach (385) finden lässt. Will man aber ohne diese Integrirung, y durch x ausdrucken, so geht solches nach 446 an, wenn nur so wohl Q als P aus einer endlichen Menge von Theilen bestehen. Denn wenn man $y = A + Bx^\delta + Cx^{2\delta} \ldots$ setzt, so findet man

$+ b.A^a$	$+ bB$	$.x^\delta$	$+ bC$ $.x^{2.\delta}$
$+ c.A.A$	$+ 2cAB$		$+ cBB$
.	.		$+ 2cAC$
.	.		$+ 2p\delta C$
	$+ p\delta B$		$+ 2qA\delta C$
	$+ qA\delta B$		$+ q\delta BB$
	$+ r\delta AAB$		$+ 2r\delta AC$
	.		$+ 2r\delta ABB$

Im ersten Coefficienten der Gleichungsreihe steigt A auf den Grad auf den y in P steigt. Im zweyten befinden sich alle beständigen Grössen aus P und Q. Man kann auch in Fällen, die den in 450 angezeigten ähnlich sind, nach der daselbst gegebenen Anweisung verfahren.

452. Anm. Es ist nicht unnütz diese Art y durch x auszudrucken zu wissen, ob man gleich diese Gleichungen völlig integriren kann. Denn wenn Q aus sehr vielen Theilen besteht, so ist seine Zerfällung in Factoren, welche bey der ordentlichen Integration vorausgesetzt wird, (385) der Auflösung einer sehr hohen Gleichung gleichgültig und also schwer, oft nicht einmahl in unserer Gewalt, dagegen kann A hier durch eine niedrige Gleichung gegeben seyn, und δ wird aus dem zweyten Coefficienten durch eine einfache Gleichung gefunden. Wenn man auch durch die ordentliche Integration eine algebraische Gleichung zwischen x und y findet, so kann man zu gewissen Absichten y in x durch eine Näherung ausdrucken wollen, und müsste alsdenn doch das Parallelogramm auf die Integralgleichung anwenden. Auch wird die Integralgleichung nicht allemahl algebraisch werden, wo sich die Schwürigkeit y aus x zu finden noch mehr vergrössert.

453. Die allgemeine Formel rationaler Gleichungen, die unter 444 gehören, ist $(a+bx+cxx..)ydx+(p+qx+rxx...)dy=0$ oder $Tydx+Sdy=0$ wo sich die vollkommene Integrale aus $\frac{Tdx}{S}=-\frac{dy}{y}$ finden lässt. Setzt man hier $y=Ax^m+Bx^{m+\delta}...$ so kömmt

pdy

$$p\,dy = mpAx^{m-1} + (m+\delta).\ pBx^{m+\delta-1}$$
$$a\,y = \quad a\}Ax^{m} \quad + a\}Bx^{m+\delta}$$
$$qx\,dy = + mq\} \quad + (m+\delta)q\}$$
$$bxy = + b\}Ax^{m+1} + b\}Bx^{m+\delta-1}$$
$$rxxy = + mr\} \quad + (m+\delta)r\}$$

u. s. w.

Hier lassen sich nun in manchen Fällen wenigstens Reihen wie in 450 finden. Es sey z. E. $p = o$ so kann man $a + mq = o$ und $m+1 = m+\delta$ setzen, wo A unbestimmt bleibt, das übrige aber gefunden wird.

454. Aufg. **In allen Differentialgleichungen, die nur zwey Glieder haben, von welchem Grade sie auch seyn mögen, y durch x zu finden.**

Aufl. Für ein beständiges $dx = 1$; ist der allgemeine Ausdruck dieser Differentialgleichungen $y^n.\ dy^{\pi-s}.\ d^s y - ax^x\,dx^{\pi} = o$. Nun sey $y = Ax^m + Bx^{m+\delta}$ so ist

$d^s y = m.(m-1)\ldots(m-s+1).\ Ax^{m-s}$
$+ (m+\delta).(m+\delta-1)\ldots.(m+\delta-s+1)$
$Ax^{m+\delta-s}$ und nach gehöriger Rechnung kömmt
λ statt $mn + (m-1).(\pi-s) + m - s$ gesetzt
$m^{\pi-s}.\ m.(m-1)\ldots(m-s+1)\,A^{n+\pi-s+1}$
$x^{\lambda} - ax^x$
$+(m+\delta-1)\ldots(m+\delta-s+1)$
$+(m-1)\ldots\ldots(m-s+1)\ \}(m+\delta)\{.$
$+m.(m-1)\ldots(m-s+1).\ n\ \}$
$m^{\pi-s}.\ A^{\pi-s+n}.\ Bx^{\lambda+\delta}$

daraus

daraus folgt $m = \frac{\varkappa + \pi}{n + \pi - \varepsilon + 1}$;

$A = {}^{n+\pi-\varepsilon+1}\sqrt{a} : m^{\pi-\varepsilon}. m.(m-1)\ldots(m-\varepsilon+1)$ und um δ zu bestimmen; wo B unbestimmt bleibt.

$$(m+\delta-1)\ldots.(m+\delta-\varepsilon+1)\} + (m-1)\ldots.(m-\varepsilon+1) \} \cdot (m+\delta) + m(m-1)\ldots(m-\varepsilon+1).n = 0.$$

455. Wenn m eine ganze bejahte Zahl ist, die nicht grösser ist als $\varepsilon - 1$ so ist A unendlich. Nähmlich alsdenn verschwindet in irgend einem Differentiale von y der erste Theil, der A allein enthält, weil sein Coefficient $= 0$ wird, also fällt die Voraussetzung weg, daß der erste Theil des Products $y^n. dy^{\pi-\varepsilon}. d^\varepsilon y$; A allein enthalte.

456. Für $\varepsilon = 2$, oder alle Differentialgleichungen des zweyten Grades von zwey Gliedern ist

$m = \frac{\varkappa + \pi}{n + \pi - 1}$; $A = {}^{n+\pi-1}\sqrt{a} : m^{\pi-2}. m.(m-1)$; und $(m+\delta-1)\} . (m+\delta) + (m-1)\}$

$m.(m-1).n = 0$ woraus man $m + \delta = -\frac{(m-2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m-2}{2}\right)^2 - m.(m-1).n}$ erhält.

457. Ex. Wäre hier $n = 1$ und $\varkappa = 0$ und $\pi = 2$ oder $yddy - adx^2 = 0$ so käme $m = 1$ aber

aber A unendlich. Alsdenn nähmlich wäre $y = Ax + Bx^{1+\delta}$ folglich $ddy = * + (1+\delta).\delta.Bx^{\delta-1}$; und das erste Glied von ydy wäre $(1+\delta).\delta.ABx^{\delta}$ also nicht durch A allein gegeben; wie die Auflösung annimmt. Dieses erläutert 435.

458. Ex. Für $s=2$; $n=1$; $\pi=3$ kömmt $m = \frac{x+3}{3}$; $A = \sqrt[3]{a:mm.(m-1)}$;

$$m + \delta = -\frac{(x-3)}{6} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{x-3}{6}\right)^2 - \frac{(x-3).x}{9}\right)}$$

459. Der Werth $y = Ax^m$ (454) thut der Differentialgleichung völlig genug.

460. Zus. Hier kann δ unmöglich werden. Z. E. die Grösse unter dem Wurzelzeichen in 458 ist $-\frac{(x-3).(x+1)}{12}$; sind nun beyde Factoren zugleich bejaht oder verneint, so ist diese Wurzelgrösse unmöglich.

461. Zus. Wenn $n + \pi - s + 1 = 0$ so scheint $m = \infty$ zu werden. (454) Eigentlich kömmt alsdenn $m.0 - \pi = x$; Soll sich also die Methode anbringen lassen, so muß $x = -\pi$ seyn; und alsdenn giebt sich m aus der Gleichung $m\pi \cdot s\,m.(m-1)\ldots(m-s+1) - a = 0$ und

A bleibt

A bleibt unbestimmt. Man kann auch nach 446 verfahren, welches nöthig ist, wenn nicht $\mu = -\pi$. Alsdenn setzte man nähmlich $m^{\pi-s}.m.(m-1)....(m-s+1) = o$ welches m gäbe; und $x = \lambda + \delta$ welches δ gäbe; da bliebe A oder B unbestimmt, und eines von beyden bestimmte sich, wenn man das, was in die Potenzen $\lambda + \delta$; und $\varkappa$; von x multiplicirt wird, zusammen $= o$ setzte.

461. Anm. Differentialgleichungen wie (456) auf welche des ersten Grades zu bringen, und alsdenn wenigstens zuweilen zu integriren, lehret Joh. Bernoulli Op. T. IIII. n. 162. und das hier gebrauchte Verfahren steht bey ihm das. am Ende. Eben das lehret von diesen und andern Differentialgleichungen Euler Comm. Ac. Petrop. T. III. p. 124.

462. Aufg. z in $aa\,ttddz - cczdt^2 + aaddz = o$ zu finden.

Aufl. I. Wenn $z = At^m + Bt^{m+\delta}...$ und $dt = 1$; so fallen die Exponenten m; $m-2$ in eine lothrechte Reihe (437) also giebt das Parallelogramm hier keine Reihe. Die drey Glieder der Gleichung aber geben nach der Ordnung, wie sie von der linken nach der rechten gehen, folgendes:

$$m.(m-1).aa.At^m + (m+\delta).(m+\delta-1)aaBt^{m+\delta} = ccA - ccB + aa.m.(m-1)At^{m-2}$$

Hier ist $m.(m-1).aa = cc$ also $m = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} + cc : aa)}$ und $\delta = -2$.

II. Für

II. Für eine andere Reihe mache man folgendes + m. (m − 1) aaA t^{m} − ccA + m. (m − 1). aaA t^{m-2} + (m + δ) (m + δ − 1). aaB $t^{m+\delta-2}$ Damit hier das erste Glied verschwindet, muß m = o oder m = 1 seyn: A bleibt unbestimmt, und es ist δ = 2.

III. Endlich kann man auch die ersten Glieder der Reihen, die aus − ccz; und aattddz entstehen, unter das dritte der Reihe, die aus aaddz entsteht, setzen; dessen Coefficient (m + 2δ) (m + 2δ − 1). aaC und der Exponent m + 2δ − 2 ist. So kömmt m + 2δ − 2 = m oder δ = 1 und in der Reihe aus aaddz zweytem Gliede bleibt der Coefficient (m + δ). (m + δ − 1). aaB allein, ohne andere. Dieser verschwindet, wenn m = o und δ = 1 und B bleibt unbestimmt. So bekömmt man z = A + Bt + Ct^{2} ... + Lt^{s} + Mt^{s+1} + Nt^{s+2}.., und die Gleichungsreihe wird

* * + 2aaCt^{2}.... + s. (s − 1) aaLt^{s} − ccA − ccBt − ccC..... − ccL + 2aaC + 6aaD + 12aaE... + (s + 2) (s + 1) aaN Ist hier L = o so verschwindet N; wird also A = o gesetzt, so verschwinden C; E.. alle Coefficienten bey geraden Exponenten, hingegen alle bey ungeraden, wenn B = o; daß also hierinnen die beyden vorigen Reihen enthalten sind, welche von m = o und m = 1 entstanden.

Jede

Jede bricht ab, wenn irgend einer ihrer Coefficienten = o gesetzt wird, weil N = $\frac{cc - e.(e-1).aa}{(e+2).(e+1)aa}$. L. Es sey I der Coefficient bey dem Exponenten $e-2$; so ist $L = (cc - 2)(e-3).aa) I : e.(e-1).aa$; Ist also nicht I = o so muß $cc : aa = (e-2).(e-3)$ seyn, wenn L = o seyn, und die Reihe abbrechen soll. Diese Differentialgleichung kömmt bey einer Aufgabe vor, die Euler Act. Erud. Lipſ. Iun. 1744. aufgelöſet hat.

463. Aufg. In einer Differentialgleichung des ersten Grades y durch eine nach x steigende Reihe wie in Alg. 694. auszudrucken.

I. α) Man richte die Gleichung so ein, daß ein Theil von ihr aus dy ganz allein beſteht β) Dieſes iſt allemahl möglich, denn wofern ein solcher Theil nicht von Anfange ſchon in der Gleichung enthalten iſt, ſo darf man nur die ganze Gleichung mit dem, was in dy multiplicirt iſt, dividiren. γ) Giebt es verſchiedene Theile, die dy enthalten, ſo kann man zu gegenwärtigem den wählen, wo es nur mit einer beſtändigen Gröſſe multiplicirt wird. δ) Iſt dergleichen nicht vorhanden; ſo muß man einen wählen, der x oder y enthält, und alſo damit die ganze Gleichung dividiren. ε) Kömmt alsdenn ein Theil der Gleichung, deſſen ganzer Diviſor nur x von der ersten Abmeſſung mit einer beſtändigen Gröſſe multiplicirt

tiplicirt ist, der so $\frac{adx}{bx}$ aussähe, so schreibe man $e+u$ statt x. ζ) So verwandele man die Glieder, deren Divisor x oder $b+x$ enthält, nach Alg. 6. in unendliche Reihen.

Ex. Wo $dx = 1$ (419) zu β; γ; $ady - xy - ab = 0$ giebt $dy - \frac{xy}{a} - b = 0$; zu δ); $ydy = 1 - xyy$ giebt $dy = \frac{1}{y} - xx$; zu ε); $xdy - xy - 1 = 0$ giebt, $dy - \frac{(y+1)}{e+x} = 0$ folglich $dy - (y+1).\left(\frac{1}{e} - \frac{x}{ee} \ldots\right) = 0$.

II. Alle Theile der Gleichung, welche y und dy beydes zugleich oder eines allein enthalten, schreibe man linker Hand in eine Columne untereinander, so, daß der Theil, der aus dy allein besteht, die oberste Stelle einnimmt.

III. Mit diesem Theile schreibe man in eine Zeile alle Theile der Gleichung, die nur x enthalten; so, daß zur linken Hand zuerst die niedrigsten stehen, das ist, diejenigen, wo x den gröſsten verneinten Exponenten, oder wenn keine verneinten Exponenten da sind, den kleinsten bejahten hat.

IIII. Wenn x keine verneinten Exponenten hat, so nehme man o für den ersten Theil der Reihe dy an; und also c für den ersten Theil der Reihe y, wo c die beständige Grösse bedeutet, die beym Integriren pflegt hinzugesetzt zu werden. Diese Werthe von y und dy, setze man in die übrigen Theile der Columne, und verfahre ferner wie Alg. 694; nur daß man statt des Dividirens integrirt.

V. Ex. $xdy + dy + yydx = xxdx + dx$; wo man $dx = 1$ setzt. Also kömmt

$$dy = +1 \quad + x^2$$
$$- cc - (2c+1)Bx \quad - 2C$$
$$- BB$$
$$- 2cC$$

$$xdy = \quad + B \quad + 2C$$
$$yy = +cc \quad + 2cB \quad + BB$$
$$+ 2cC$$

$$y = c + (1-cc)x - \frac{(2c+1)}{2}Bx^2 + \frac{1-2C-BB-2cC}{3}x^3.$$

Weil von der Reihe dy das erste Glied $= o$, so sind die ersten Glieder von xdy; und yy; o und cc. Das zweyte Glied der Reihe dy nun muß enthalten was in dx und nicht mit in x multiplicirt ist. In der Gleichung selbst nun befindet sich schon der Theil dx der hier in einer Zeile mit dy geschrieben ist: dazu kömmt hier noch (nach Alg. 694.) der Reihe yy erster Theil $+ cc$ aber mit entgegengesetztem Zeichen also bekömmt die Reihe

Reihe dy den zweyten Theil $1 - cc$; dieſes giebt für y den zweyten Theil $(1 - cc)x$. Man nenne deſſelben Coefficienten B; ſo ſind der Reihen xdy; yy; zweyte Glieder; $+Bx$ und $+2cBx$; die alſo, weil die Gleichung ſelbſt keinen Theil mit x allein von der erſten Abmeſſung enthielte, $-(2c+1)Bx$ zum dritten Gliede der Reihe dy geben: So wird $-\frac{(2c+1).B}{2}$ x^2 der Reihe y drittes Glied; und wenn man wiederum den Coefficienten $-\frac{(2c+1)B}{2} = C$ ſetzt, ſo ſind der Reihen ydy, yy; drittes Glieder $+2Cxx$ und $+(BB+2cC).xx$ welches mit entgegengeſetzten Zeichen zu xx das ſchon als ein Theil der Gleichung in der oberſten Zeile ſteht, addirt, $(1-2C-2cC-BB)xx$ für der Reihe dy und folglich $\frac{1-2C-2cC-BB}{3}$ x^3 für der Reihe y drittes Glied giebt: So läſſt ſich die Arbeit immer weiter fortſetzen.

VI. Hat x verneinte Exponenten, ſo nehme man für der Reihe dy erſten Theil, den niedrigſten in der Zeile (III) an, ſo giebt die Integrirung den erſten von y, und ſolchergeſtalt fähret man wie vorhin fort.

VII. Ex. $xxdy + xxy = x - 1$ giebt nach I. 3 und III.

$$dy = -x^{-2} + x^{-1}$$
$$y = \quad + 1$$
$$+ 1$$

Aus $-\frac{1}{xx}$ als dem ersten Theile von dy wird $+\frac{1}{x}$ als der erste Theil von y; und dieser mit entgegengesetztem Zeichen in die oberste Zeile zu dem schon da befindlichen $+\frac{1}{x}$ gesetzt giebt 0 für den zweyten Theil der Reihe dy. Also wird $y = \frac{1}{x}$ der völlige Werth seyn, der der Gleichung genug thut. Man könnte zwar auch aus $dy = -\frac{1}{xx} + 0$ schliessen $y = +\frac{1}{x} + 0$ aber die Rechnung wird zeigen, daß $c = 0$ seyn muß. Der Schluß thut nähmlich nicht dar, daß die beständige Grösse, die man zu $+\frac{1}{x}$ addiren kann, von 0 unterschieden seyn muß, weil die Const. (204) auch $= 0$ seyn kann, wie in 208.

VII. Eigentlich hätte man in diesem Exempel nach I 2; verfahren sollen. Die Ursache von dieser Regel ist, weil sich $\frac{a\,dx}{bx}$ nur logarithmisch integriren läßt, welches sich hieher nicht schickt.

Weil

Weil man nun in dem Exempel den Theil $+\frac{1}{x}$ von dy nicht integrirte, indem er sich selbst aufhob, so war diese Veränderung nicht nöthig.

VIII. Wäre die Gleichung $xxdy + xxy = 3x - 1$ gewesen, so wäre der Reihe dy zweytes Glied nach eben dem Verfahren wie in VI. $+\frac{2dx}{x}$ geworden, das hätte für der Reihe y zweytes Glied $2lx$ gegeben. Dieses nun kann man hier nicht brauchen, weil die Potenzen von x in der Reihe für y nach ihren Graden folgen sollen, welche Ordnung durch den Logarithmen unterbrochen wird. Daher hätte man nach I. e.

$dy + y = -\frac{1}{(b+u)^2} + \frac{3}{b+u}$ gemacht, wo sich die Theile rechter Hand in eine nach u steigende Reihe verwandeln lassen. Solchergestalt erhält man

$$dy = o + \frac{3b-1}{bb} + \frac{3b-2}{b^3}u + \frac{3b-3}{b^4}u^2 \ldots$$

$$-c \qquad -B \qquad -C$$

$$y = c + \left(\frac{3b-1}{bb} - c\right)u + \left(\frac{3b-2}{b^3} - B\right)$$

$$\tfrac{1}{2}uu + \left(\frac{3b-3}{b^4} - C\right)\tfrac{1}{3}u^3 \ldots.$$

Nähmlich $\frac{3b-1}{bb} + \frac{3b-2}{b^3}u$

$+\frac{3b-3}{b^4}u^2 \ldots = \frac{3}{b+u} - \frac{1}{(b+u)^2}$ und B ist der Reihe y zweyter Coefficient $= \frac{3b-1}{bb}$.

$-c$; so C ihr dritter $= \left(\frac{3b-2}{b^3} - B\right) \cdot \frac{1}{2}$ u. s. w. Will man hier y für ein gegebenes x haben, so drücke man x durch einen grossen Theil b und einen kleinen u aus; z. E. für $x = 1001$ setze man $b = 1000$; $u = 1$; so findet man y unmittelbar aus der Reihe für $u = 1$ d. i. für $x = 1001$.

Eine Reihe aber, die y unmittelbar durch x ausdruckte, lässt sich so nicht finden: denn wollte man $x - b$ statt u setzen, so müsste man alle Potenzen von u machen, um alle Theile zu haben, die nur b ohne eine beständige Grösse enthielten und zusammen in das erste Glied dieser neuen Reihe gehörten, u. s. w.

Das Parallelogramm gäbe hier für eine steigende Reihe $y = Ax^{-1} + \frac{x}{x} + Cx \ldots$ aber man fände für den ersten Coefficienten zwo Gleichungen $1 - A = 0$ und $A + 3 = 0$ welche nicht zusammen statt finden können; also giebt es keine steigende Reihe unmittelbar durch x.

X. Ex. Bey $dy - 1 : y = -xx$ setze man

$dy = 0 + c - c^3 x - xx + \frac{3}{2}c^5$

$-1 : y = -c + c^3 - \frac{3}{2}c^5$

$y = 1 : c + cx - \frac{c^3 xx}{2} + \frac{3c^5 - 2}{2} x^3 \ldots$

Wenn

Wenn man nähmlich $\frac{1}{c}$ für das erste Glied von y annimmt, so kömmt $-c$ für das erste von y^{-1} und also $+c$ für das zweyte von dy; daher $+cx$ für das zweyte von y; folglich von $\left(\frac{1}{c}+cx\right)^{-1}$ das zweyte Glied $+c^3x$ welches mit entgegengesetzten Zeichen das dritte von dy und folglich $-\frac{c^3xx}{2}$ zum dritten von y giebt. Ferner wird von $\left(1:c+cx-\frac{c^3xx}{2}\right)^{-1}$ das dritte Glied $-\frac{1}{2}c^5xx$, dieses mit entgegengesetzten Zeichen zu dem schon oben befindlichen gesetzt, giebt das vierte Glied von dy und also von y u. s. w.

XI. Das bisherige ist Newtons Regel Meth. of Flux. Prob. 2. nur habe ich sie etwas anders und so vorgetragen, daß man den Grund davon leichter einsehen kann. Wie sie bey dem Newton aussieht, wird folgendes zeigen: Er setzt zum voraus, daß man auf der einen Seite des Gleichheitszeichens; $\frac{dy}{dx}$ auf den andern den Werth dieses Bruches in endlichen Grössen ausgedruckt hat. Es sey $\frac{dy}{dx}=1-3x+y+xx+xy$; so ist sein Verfahren folgendes:

Die

Die Theile der Gleichung, welche nur x enthalten, schreibt er in die horizontale Zeile, und die, welche y enthalten, in die verticale Columne. Nun nimmt er für der Reihe y erstes Glied, den ersten Theil linker Hand in der Zeile, mit x multiplicirt, und mit dem Exponenten, den er nach dieser Multiplication hat dividirt, mit einem Worte, sein Integral, welches hier x ist. Dieses erste Glied braucht er, die ersten Glieder der Reihen zu erhalten, welche aus den Theilen der senkrechten Columne werden, und hier x und xx sind. Der Reihe y erster Theil x, zu $-3x$ in der obersten Zeile gesetzt giebt $-2x$; daraus folgt durch die Integration der Reihe y zweytes Glied $-xx$ und der Reihe xy zweytes Glied $-x^3$. Nun hebt sich der Reihe y zweytes Glied, mit dem ersten der Reihe xy auf, das eben den Exponenten hat, und bleibt nur xx im dritten Theile der obersten Zeile übrig, daraus durch die Integration der Reihe y drittes Glied $\frac{1}{3}x^3$ und also der Reihe xy drittes Glied $\frac{1}{3}x^4$ folgt. Die Glieder, welche den Würfel von x enthalten, betragen zusammen $-\frac{2}{3}x^3$ also wird durch die Integration der Reihe y viertes Glied; $-\frac{1}{6}x^4$ u. s. w.

Man sieht leicht, daß Newtons Verfahren nur der äuserlichen Gestalt nach von dem meinigen unterschieden ist. Ich hätte die gegebene Gleichung so eingerichtet: $dy - y - xy = 1 - 3x + xx$ und die Glieder zur linken des Gleich-

heitszeichens; hätten die Columne ausgemacht. Newton läſſt dy weg, und ſchreibt die übrigen Theile der Columne mit dem Zeichen, das demjenigen, das ſie bey mir hätten, entgegengeſetzt iſt; das ſie nähmlich bekämen, wenn ſie auf die rechte Seite, zu den Theilen die nur x enthalten, wären gebracht worden. Aus dem erſten Theile ſeiner oberſten Zeile aber, findet er das erſte Glied der Reihe für y eben ſo, wie ich es nach IIII gefunden hätte, wenn ich c = o angenommen hätte, wie Newton thut, ob er wohl auch lehret, wie man die beſtändige Gröſſe zu addiren hat. So erhält er daraus die Glieder der Reihen, welche den Theilen der Columne zugehören; dieſe Glieder aber addirt er mit den Zeichen, welche ſie durch die Rechnung bekommen, nicht mit den entgegengeſetzten, zu den Theilen der Zeile, die eben die Exponenten haben; dieſe Glieder haben nähmlich, nur erwähntermaſſen, in Newtons Rechnung Zeichen, die denen entgegengeſetzt ſind, welche ſie in der meinigen hätten. Alſo iſt meine Regel der newtoniſchen vollkommen gleichgültig.

464. Zuſ. Man kann auch ſo eine fallende Reihe erhalten. Z. E. aus $dy - y : xx = 2x + 3 - 4 : x + 1 : zx$ folgendergeſtalt:

dy =

$$dy = 2x + 3 - 4.x^{-1} + 1.x^{-2}$$

$$+1 \quad +4 \quad +c \quad -(c+1)x^{-2}$$

$$-y:x^2 = -1 \quad -4 \quad -c \quad +c+1$$

$$y \quad = xx + 4x + c - (c+1):x + (c+1):2xx....$$

Hätte ſich hier, was in $1:x$ multiplicirt iſt, nicht von ſich ſelbſt aufgehoben, ſo wäre das Verfahren auf dieſe Art nicht fortzuſetzen geweſen. (463; VII. VIII.)

465. Anm. Was von 419. bis hieher enthalten ist, habe ich in einer 1745. zu Leipzig gehaltenen Disputation: De resolutione aequationum differentialium per series; ad Newt. meth. flux. Prob. II. meditata vorgetragen. Der Gebrauch des Parallelogramms, den ich in einer vorhergehenden gezeigt, (Alg. 311.) brachte mich darauf. Ich habe indessen schon damahls in der Vorrede erinnert, daß man den Reihen keinen so hohen Werth beylegen dürfe, darüber die andern Methoden, Integrale durch endliche Ausdrückungen zu finden, zu vernachlässigen. Ich zeigte auch damahls an, was ich in Cramers Anmerkungen zu Jac. Bernoullis Werken, n. Cl. not. a. gelesen hatte, daß Herr Nicolaus Bernoulli eine allgemeinere Methode als das Parallelogramm erfunden hätte. Ich hatte damahls auf mein Befragen dieserwegen von Herr Eulern keine Nachricht erhalten können; als ich aber meine Schrift Herrn Daniel Bernoulli nach Basel schickte, hat derselbe die Gewogenheit gehabt, mir einen Auszug aus Briefen von 1733; und 1736; an Stirlingen und Cramern zu übersenden, welche diese Methode enthalten. Sie besteht kürzlich in Folgendem:

466. Aufg. **Alle mögliche Reihen, durch die sich eine Gleichung auflösen lässt, zu finden.**

Aufl. Man setze $y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} \ldots$ wo jeder Exponent kleiner oder grösser als der folgende ist, nachdem die Reihe steigen oder fallen soll. So verwandelt man die Gleichung in eine Reihe, wo die Glieder, die einerley Exponenten haben, folgendergestalt erkannt und die Exponenten und Coefficienten bestimmt werden:

Für

Für eine steigende Reihe erwähle man die Glieder, in welchen x den kleinsten Exponenten hat, wobey man verschiedene Voraussetzungen macht, daß α erstlich eine verneinte Zahl, denn 0; denn eine bejahte, bedeuten soll: Man nimmt nähmlich α nach jeder dieser Voraussetzungen zu bestimmen, wenn es nöthig ist, Theile der Gleichung mit zu Hülfe, in deren Exponenten α nicht ist. A bestimmt man wie gewöhnlich, wofern es nicht unbestimmt bleibt. So verhält man sich mit den folgenden Grössen β; γ; ... so daß α; β; γ; eine steigende Reihe ausmachen.

467. Ex. Für $rrdy^2 - rr + yy = 0$ kömmt

$$yy = Ax^{2\alpha} + 2ABx^{\alpha+\beta} + 2ACx^{\alpha+\gamma} + 2ADx^{\alpha+\delta} + 2AEx^{\alpha+\varepsilon}$$
$$+ BBx^{2\beta} + 2BCx^{\beta+\gamma} + 2BDx^{\beta+\delta} + 2BEx^{\beta+\varepsilon}$$
$$+ CCx^{2\gamma} + 2CDx^{\gamma+\delta}..$$

$$rrdy^2 = \alpha^2 A^2 r^2 x^{2\alpha-2} + 2\alpha\beta ABr^2 x^{\alpha-\beta-2} + 2\alpha\gamma ACr^2 x^{\alpha+\gamma-2}$$
$$+ 2\alpha\delta ADrrx^{\alpha+\delta-2}...$$
$$+ \beta\beta BBr^2 x^{2\beta-2} + 2\beta\gamma BDrrx^{\beta+\gamma-2}$$
$$+ \gamma\gamma CCrrx^{2\gamma-2}...$$

$$-rr = -rr$$

Man suche eine steigende Reihe.

I. Fall. Wenn α eine verneinte Zahl seyn soll, so kann nur der Exponent $2\alpha - 2$ der kleinste unter allen seyn, also müsste der Coefficient desselben, folglich entweder α, oder A; $= 0$ seyn, welches beydes nicht statt findet, und also zeigt, daß diese Voraussetzung nicht gemacht werden darf.

II. Fall. Wenn $\alpha = 0$ so ist wieder, eben der vorige Exponent der kleinste unter allen, und sein Coefficient wird $= 0$ weil $\alpha = 0$; also findet diese Voraussetzung statt, und A bleibt unbestimmt; die Gleichungsreihe aber sieht nun so aus.

$$\begin{array}{l}
AA - rr \;\Big]+ 2ABx^{\beta} \;\Big] \\
+ \beta\beta BBrrx^{2\beta-2}\Big]+ 2\beta\gamma BCr^2x^{\beta+\gamma-2}\Big] \\
+ 2ACx^{\gamma} \;\Big]+ 2ADx^{\delta} \;\Big] \\
+ BBx^{2\beta} \;\Big]+ 2BCx^{\beta+\gamma} \;\Big] \\
+ 2\beta\delta BDrrx^{\beta+\delta-2}\Big]+ 2\beta\varepsilon BErrx^{\beta+\varepsilon-2}\Big] \\
+ \gamma\gamma CCrrx^{2\gamma-2} \;\Big]+ 2\gamma\delta CDrrx^{\gamma+\delta-2}\Big] \\
+ 2\beta\zeta BFrrx^{\beta+\zeta-2}\Big] \\
+ 2\gamma\varepsilon CErrx^{\gamma+\varepsilon-2}\Big] \\
+ \delta\delta DDrrx^{2\delta-2} \;\Big]
\end{array}$$

Die Theile, welche mit Klammern zusammenhängen, bekommen, wie die Folge zeigen wird, einerley Exponenten, wo sich in den Coefficienten griechische Buchstaben befinden, da rühren die Theile von $rrdy^2$ her.

Um nun β zu bestimmen, nimmt man den Exponenten $2\beta - 2$, dessen Coefficient allein oder zusammen mit $AA - rr$; $= 0$ seyn muß.

Wenn

Wenn es allein $= 0$ seyn sollte, so müsste entweder β; oder B; $= 0$ seyn. Jenes findet nicht statt, weil $\beta > \alpha$ seyn soll. Wäre $B = 0$; und β nicht $= 0$ so hätte man keinen andern Theil der Gleichungsreihe mit $AA - rr$ in ein Glied zu bringen, als den dessen Exponent $2\beta - 2$ ist. Denn der, dessen Exponent β ist, geht also nicht dazu an, und die andern enthalten alle noch γ u. s. w. auser β, daß sich also β durch sie nicht bestimmte, wenn man einen von ihnen $= 0$ setzte. Also wäre $2\beta - 2 = 0$ oder $\beta = 1$; und weil $B = 0$; auch $AA - rr = 0$; und $A = \pm r$ und B; C; D; . . . $= 0$ oder $y = \pm r$ und $dy = 0$; welches allerdings der Gleichung auch genug thut: Aber weil man einen veränderlichen Werth von y sucht, so läßt sich nicht $B = 0$ setzen. Folglich behält man nur $2\beta - 2 = 0$ und setzt $AA - rr + BB\beta\beta rr = 0$ oder $BB = (rr - AA) : rr$.

Die Grösse γ zu bestimmen, nimmt man den Theil, dessen Exponent $\beta + \gamma - 2$ oder $\gamma - 1$. Wenn die vorhergefundenen Werthe von B; β; α; beybehalten werden, und A nicht $= 0$ seyn soll, so kann des Theiles, dessen Exponent $\gamma - 1$ ist, Coefficient für sich allein nicht $= 0$ seyn. Sonst müsste $C = 0$ seyn, und daraus folgte, daß der Theil, welcher $\beta = 1$ zum Exponenten hat, auch $= 0$ folglich A oder $B = 0$ seyn müsste, welches doch nicht angeht. Also nehme man zu dem Theile, dessen Exponent $\beta + \gamma - 2 = \gamma - 1$ ist, noch den Theil, dessen Exponent $\beta = 1$ ist,

ist, damit beyde zusammen ein Glied der Gleichungsreihe ausmachen; oder man setze $\gamma - 1 = 1$, und $\gamma = 2$ auch $2\gamma BCrr + 2AB = 0$ und $C = -A : 2rr$.

Eben so bestimmt sich δ aus dem Theile, dessen Exponent $\beta + \delta - 2 = \delta - 1$ ist, und der mit den Theilen, deren Exponenten $\gamma = 2 = 2\beta = 2\gamma - 2$ sind, zusammen $= 0$ seyn muß. Also ist $\delta = 3$ und $D = -(2AC - BB - \gamma\gamma CCrr) : 2\delta BBr$ d. i. $= -B : 6rr$ weil $2AC + \gamma\gamma CCrr = 0$. Wie vorhin bey C so wird hier auch erwiesen, daß D nicht $= 0$ seyn kann, und eben so verhält es sich mit E; F; u. s. w.

So findet man bey den folgenden Gliedern $\beta + \varepsilon - 2$ oder $\varepsilon - 1 = \delta = \beta + \gamma = \gamma + \delta - 2 = 3$ also $\varepsilon = 4$; und $E = -C : 12rr$; Ferner $\zeta = 5$; und folgendes Gesetz der Coefficienten $B = (rr - AA) : rr$; $C = -A : 1.2.rr$; $D = -B : 2.3rr$, $E = -C : 3.4rr$; $F = -E : 4.5.rr$.

Ein Bogen, dessen Sinus A ist, heisse $\mathfrak{B}$ sin A; und es sey $y = \sin(x + \mathfrak{B} \sin A)$ so ist $\frac{rdy}{\sqrt{(rr - yy)}} = dx$; (281) ferner sey auch $y = \cos(x + \mathfrak{B} \sin A)$ oder $\pm\sqrt{(rr - yy)} = \sin(x + \mathfrak{B} \sin A)$ oder $\frac{\pm rydy}{y.\pm\sqrt{(rr - yy)}} = dx$

$= dx$ also $- \frac{rdy}{\sqrt{(rr - yy)}} = dx$. Die vorgegebene Gleichung $\frac{rrdy^2}{rr - yy} = dx^2$ begreift beyde unter sich, und also bedeutet y entweder den Sinus, oder den Cosinus des Bogens, der $= x + B$ sin A ist. Nachdem also $A = 0$ oder $= r$ ist, begreift diese Reihe die beyden 286; 297; unter sich.

III. Fall. Wenn α bejaht seyn soll, setze man nur in der gefundenen Reihe $A = 0$ da die Reihe von Bx anfängt, welches soviel ist, als wäre $\alpha = 1$;

Fallende Reihen giebt es nicht, denn in der Gleichungsreihe hätte der erste Theil der Reihe, die aus yy entsteht, allein den höchsten Exponenten α; also müßte $A = 0$ seyn.

462. Anm. Man könnte diese Reihe leichter folgendergestalt finden: Man nehme der vorgegebenen Gleichung ihre Differentialgleichung $2rrdyddy + 2ydy = 0$ oder $rrddy + y = 0$. Diese giebt für $r = 1$;

$\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2} + \beta(\beta-1)Bx^{\beta-2} + \gamma.(\gamma-1).Cx^{\gamma-2}.$
$+ Ax^{\alpha}$ . . .

oder $\alpha = 0$; $\beta = 1$; $\gamma = \alpha + 2 = 2$; $\delta = \beta + 2 = 3$; $\varepsilon = \gamma + 2 = 4$ u. s. w. wo A; B; unbestimmt bleiben, und $C = -\frac{A}{\gamma(\gamma - 1)}$

$B = \frac{-R}{\delta.(\delta - 1)}$ u. s. w. Diese Reihe ist allgemei-

ner

ner als die vorige (467) wo B bestimmt war; denn jede höhere Differentialgleichung begreift mehr unter sich als eine, die nicht so hoch ist, weil man bey ihr mehrmahl integriren, und also auch mehr beständige Grössen addiren kann. (204)

469. Ex. Aus $xxddy - ny = o$ wird $(\alpha(\alpha - 1) - n) Ax^{\alpha} + (\beta(\beta - 1) - n) Bx^{\beta} + (\gamma.(\gamma - 1) - n) Cx^{\gamma} \ldots$. Setzt man hier jeden Coefficienten $= o$ so ist $\alpha\alpha = \alpha + n$ also $\alpha = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} + n)}$ und weil eben die Gleichung für β herauskömmt, so setze man $\beta = \frac{1}{2} \mp \sqrt{(\frac{1}{4} + n)}$ da alsdenn bey beyden Exponenten die obern Zeichen für eine fallende, die untern für eine steigende Reihe gelten. Nun kömmt eben die Gleichung für γ, welches also entweder α oder β seyn müsste, und weil es keines von beyden seyn soll, gar nicht vorhanden seyn kann: also muß C u. s. w. $= o$ seyn; und der Werth von y besteht nur aus den gefundenen beyden Theilen, da A und B unbestimmt bleiben.

470. Diese Methode (466) ist in der That allgemeiner als das newtonische Parallelogramm, besonders deßwegen, weil sie die Exponenten aus den Coefficienten der Differentiale bestimmt; daher sie Reihen geben kann, wo das Parallelogramm keine gäbe, und selbst wenn sie Reihen giebt, deren Exponenten mit den Exponenten der Reihen des Parallelogramms in einer Progression sind, doch diese Reihen vollständiger, nähmlich mit mehr Gliedern giebt als das Parallelogramm.

Das Parallelogramm kann z. E. $y = Ax + Bx^3 + Cx^5 \ldots$ geben, und diese Methode $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 \ldots$ wo B; D; unbestimmt bleiben, und wenn sie $= o$ gesetzt werden, die Reihe des Parallelogramms herauskömmt. Bey Gleichungen zwischen zwo veränderlichen Grössen aber, die keine Differentialgleichungen sind, kann diese Methode, soviel ich einsehe, nichts anders geben als das Parallelogramm und das Parallelogramm ist ihr da vielleicht noch vorzuziehen, weil man die Ordnung bey dem Verfahren nach demselben leichter übersieht. Man vergleiche hiemit Alg. 737 ... 739. Vielleicht hat Newton seine Regel zuerst die Gleichungen zwischen endlichen Grössen aufzulösen erfunden, und nachgehends auf Differentialgleichungen erweitert. Daß mir übrigens, ehe ich Unterricht von dieser Methode erhalten habe, nicht unbekannt gewesen ist, daß man die Exponenten aus den Coefficienten bestimmen kann, wird aus 450; 453; 454; u. s. w. erhellen. Von der Integration durch Reihen handelt Euler Inst. calc. Int. Vol. I. S. I. c. 3.

Von den Differentialen für gewisse Werthe der veränderlichen Grösse.

471. Aufg. Wenn y eine Function von x ist, das Differential von y so vollständig auszudrucken, daß die höhern Differentiale nicht weggelassen werden.

Auf-

Aufl. In dem Werthe von ym (151) sey $e = dx$ oder er sey der nächste nach dem Werthe y selbst, so ist $ym - y = dy = dy + \frac{d^2y}{1.2} + \frac{d^3y}{1.2.3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4} \ldots$ oder wenn $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx \ldots$ so ist $dy = pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 \ldots$

472. Bey den gewöhnlichen Regeln des Differentiirens werden die folgenden Glieder dieser Reihe weggelassen, weil $\frac{dy}{dx} = p + \frac{1}{2}qdx + \frac{1}{6}rdx^2 \ldots$ sich in p verwandelt, wenn dx verschwindet; daß also $dy = pdx$ die Differentialgleichung für ein verschwindendes dx ist (20). Aber wenn für einen besondern Werth von x; die Gröſſe $p = 0$ würde, so wäre dafür $dy = \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 \ldots$ und also für ein verschwindendes dx; $\frac{dy}{dx^2} = \frac{1}{2}q$ oder $dy = \frac{1}{2}qdx^2$.

Machte einerley Werth von x, zugleich p und $q = 0$; so erhellt, daß eben so $dy = \frac{1}{6}rdx^3$ seyn wird; u. s. w. In solchen Fällen verschwindet also dy in Vergleichung mit Unendlichkleinen der ersten Ordnung (11). Diese Betrachtungen kommen bey den gröſsten und kleinsten vor (155).

473. Ex. Für $y = (a - x)\,x$ ist $p = a - 2x$ $q = -2$; $r = 0$ . . . also das vollständige $dy = (a - 2x).\,dx - dx^2$. Für $2x = a$ wird also $dy = -dx^2$.

474 Man findet diesen Werth von dy für einen gewissen Werth von x z. E. für $x = a$ auch unmittelbar aus den Regeln des Differentiirens (20) so: Man setze $x - a = z$; und setze $z + dz$ statt z und ziehe den ersten Zustand von y vom zweyten ab, wobey man $z = 0$ setze.

Ex. Für $y = (x - a)^n . P + C$ wo n eine bejahte Zahl ist, und P den Factor $x - a$ nicht enthält; wird der zweyte Zustand von $y = (z + dz)^n . (P + dP) + C = dx^n . (P + dP) + C$; also wird der Werth von dy hier $P\,dx^n$ wie schon (16) vorgekommen ist. Dieses Verfahren ist oft bequemer als die Betrachtung der Reihe (472).

475. Ex. Das Differential von $y = x^x$ für den Fall zu finden, da $x = \frac{1}{e}$ (232). Weil überhaupt $dy = y . (1 + lx)\,dx$. (236) so würde dieses hier $= 0$. Man brauche also die Reihe (472); da ist $p = y\,(lx + 1)$; $q = y . (lx + 1)^2 + \frac{y}{x}$. Für $x + \frac{1}{e}$ wird also $q = \left(\frac{1}{e}\right)^{(1-e):e}$ und der gesuchte Werth von $dy = \frac{1}{2}\,e^{(1-e):e}\,dx^2$.

476.

476. Wenn die Gleichung zwischen x und y vom ersten Grade $y = \alpha x + b$ ist; also $dy = \alpha dx$; so ist $p = \alpha$ und also nie $= o$, was auch x für einen Werth hat, daher hier diese Erinnerungen nicht vorkommen. Wenn man die Sache nach 16 betrachtet wie in 474; so erhellt ebenfalls, daß $(x + dx) - x = dx$ auch wenn x in Vergleichung mit dx verschwindet.

Betrachtungen über die Differentiale der Functionen, die zwo veränderliche Grössen enthalten.

477. Lehrs. Jede gleichartige ganze oder gebrochne Function von x; y; die V heissen mag, lässt sich, wenn $y = zx$ gesetzt wird, durch ein Product aus einer Potenz von x in eine Function von z ausdrucken.

Bew. A; B; sollen zwo ganze rationale oder irrationale gleichartige Functionen von x; y; seyn, so wird $A = x^{\lambda}.Z$; $B = x^{\varkappa}.W$ daß Z; W; Functionen von z sind (415) also $\frac{A}{B} = x^{\lambda - \varkappa}.\frac{Z}{W}$. Nun kann $\frac{A}{B}$ jede Function des Lehrsatzes vorstellen, und $\frac{Z}{W} = T$ ist eine Function von z. Es sey noch $\lambda - \varkappa = n$; so ist $V = x^n.T$.

478. Wenn $dT = R.dz$ wo R eine Function von z ist, so ist $dV = nx^{n-1} T.dx + x^n R dz$. Nun soll auch $dV = Pdx + Qdy$ seyn. Weil $dy = zdx + xdz$ so ist $dV = Pdx + Qzdy + Qxdz$. Nun müssen beyde Ausdrückungen von dV noch gleich bleiben, wenn man auch entweder x oder z unveränderlich setzte, weil y durch x nicht bestimmt wird, und sich also so verändern könnte, daß z ungeändert bliebe, indem sich x ändert, oder auch umgekehrt x ungeändert bleiben kann, indem sich z ändert. Also müssen in beyden Ausdrückungen von dV, die Theile, welche dx enthalten, unter sich, und die, welche dz enthalten, auch unter sich, gleich gesetzt werden, und es ist $x^n R = Qx$; und $nx^{n-1} T = P + Qz$; die letzte Gleichung ist soviel als $\frac{nV}{x} = P + \frac{Qy}{x}$; folglich $nV = Px + Qy$. Eine merkwürdige Eigenschaft gleichartiger Gleichungen, deren Abmessung n ist.

479. Ex. $V = \frac{\sqrt{(y^e + x^e)}}{y - x}$; giebt $dV = \frac{\frac{1}{2}e.(y^{e-1}dy + x^{e-1}dx).(y-x) - (dy-dx).(y^e+x^e)}{M}$

wo $M = (y - x)^2 . \sqrt{(y^e + x^e)}$. Also $P = \frac{(1 - \frac{1}{2}e)x^e + \frac{1}{2}ex^{e-1}y + y^e}{M}$;

Q=

$$Q = \frac{(\frac{1}{2}e-1).y^e - \frac{1}{2}ey^{e-1}x - x^e}{M}$$

und der Zähler von $Px + Qy$; den gemeinschaftlichen Nenner weggelassen:

$$\begin{matrix}(1-\frac{1}{2}e).x^{e+1} & +\frac{1}{2}e & x^e y & +1 & y^e x & +\frac{1}{2}e & y^{e+1}\\ & -1 & & -\frac{1}{2}e & & -1 & \end{matrix}$$

$= (\frac{1}{2}e-1).((x^e.(y-x)) + y^e.(y-x))$
$= (\frac{1}{2}e-1).(x^e+y^e).(y-x)$ welches also mit M dividirt $Px + Qy = (\frac{1}{2}e-1).V$ giebt. Die Abmessung der Function ist nähmlich $\frac{1}{2}e$ im Dividendus, 1 im Divisor, also $\frac{1}{2}e-1$.

480. Zus. Für $n = 0$ (483) ist $Px + Qx = 0$ wäre im Exempel 484; $e = 2$ so wäre von $V = \frac{\sqrt{(y^2+x^2)}}{y-x}$ die Abmessung $= 0$. und $Px + Qy = (1-1).V. = 0$.

481. Lehrs. V sey eine Function von x; y; vermischt. Man differentiire V so, daß man nur x veränderlich setzt, und dieses Differential wieder, so daß man nur y veränderlich setzt. Zweytens differentiire man V so, daß man nur y veränderlich setzt; und dieses Differential wieder, so daß man nur x veränderlich setzt. Ich behaupte, die zweyte Differentiation werde in beyden Fällen einerley geben.

Exempel. Es sey $V = xy$; so ist
I) erstes Differ. ydx; zweytes $dydx$.
II) erstes Diff. xdy zweytes $dxdy$.

Bew. Man ſetze δx; δy; ſind endliche Gröſſen, um welche ſich x; y; verändern; und es verwandele ſich V in ϱ wenn man $x + \delta x$ ſtatt x ſetzt, aber y nicht ändert, in σ wenn man $y + \delta y$ ſtatt y ſetzt, ohne x zu ändern, und in τ wenn man zugleich $x + \delta x$ ſtatt x und $y + \delta y$ ſtatt y ſetzt. Man kann jeden Theil der Function, ſie mag nun rational oder irrational ſeyn, durch dieſe Subſtitutionen vermittelſt des Binomialſatzes in unendliche Reihen verwandeln, und die Glieder dieſer Reihen, in denen δx; δy; oder beyde zugleich, auf einerley Art vorhanden ſind, zuſammen als eines anſehen. Ferner wird ſich, wenn man V von τ abzieht, in τ alles aufheben, was weder δx, noch δy enthält, weil dieſes eben ſo in V zu finden iſt. Alſo beſteht $\tau - V$ aus folgenden Arten von Theilen: aus ſolchen, die I) nur δx; II) nur δy; III) beyde vermengt enthalten. Es läſſt ſich alſo folgendergeſtalt ausdrucken:

$$\tau - V = \alpha.\delta x + \beta.\delta x^2 \ldots \text{(I)} = a\,\delta x$$
$$+ \varepsilon.\delta y + \zeta.\delta y^2 \ldots \text{(II)} = b\,\delta y$$
$$+ \vartheta.\delta x\delta y + \eta.\delta x\delta y^2 \ldots + \varkappa.\delta x^2\delta y + \lambda.\delta x^2\delta y^2 \ldots \Big\} \text{(III)} = c\,\delta x\delta y$$

wo α; β; ε; ζ; ϑ; η; $\varkappa$; λ; Functionen von x; y; vermengt ſeyn können; a aber enthält noch

über

über dieſes ∂x; und b noch ∂y und c beydes. Nun verwandelt ſich $\tau - V$ für

$\partial y = o$ in $a\partial x = \varrho - V$
$\partial x = o$ in $b\partial y = \sigma - V$

Man ſetze ferner $y + \partial y$ ſtatt y in $a\partial x$; ſo verwandelt ſich dadurch ϱ in τ und V in σ. (Es iſt nähmlich offenbahr einerley, ob man gleich auf einmahl $x + \partial x$ und $y + \partial y$ ſtatt x und y ſetzt V in τ zu verwandeln, oder ob man dieſe beyden Arbeiten eine nach der andern vornimmt, und zuerſt V in ϱ, nach dieſem ϱ in τ verwandelt.) Solchergeſtalt verwandelt ſich $a\partial x$ in $\tau - \sigma$ welches als der zweyte Werth von $a\partial x$ angeſehen werden kann, der erſte davon abgezogen giebt $\tau - \sigma - \varrho + V$, für das, was man erhält, wenn man erſt ſucht, um wieviel ſich V verändert, wenn nur x veränderlich iſt, und um wieviel ſich dieſe Veränderung von V verändert, wenn nur y veränderlich iſt.

Nun ſetze man $x + \partial x$ ſtatt x in $b\partial y$; ſo verwandelt ſich σ in τ; V in ϱ; $b\partial y$ oder $\sigma - V$ in $\tau - \varrho$; Von dieſem zweyten Werthe der Gröſſe $b\partial y$ den erſten abgezogen, läſſt $\tau - \varrho - \sigma + V$ für das, was man erhält, wenn man erſt ſucht, um wieviel ſich V verändert, wenn nur y veränderlich iſt, und um wieviel ſich dieſe Veränderung von V verändert, wenn nur x veränderlich iſt. Es kömmt alſo in beyden Fällen einerley heraus, und da dieſes für jede Verän-

derun-

derungen von x und y richtig ist, so gilt es auch für verschwindende, oder Differentiale.

482. Ex. Wenn $V = ax^2 - bxy + cy^2$ so ist

$$r - V = \left.\begin{matrix} 2ax \\ -by \end{matrix}\right\} \delta x + a.(\delta x)^2 + \left.\begin{matrix} 2cy \\ -bx \end{matrix}\right\} \delta y + c.(\delta y)^2 - b\delta x.\delta y$$

also $\alpha = 2ax - by$; $\beta = \dot{a}$; $\varepsilon = 2cy - bx$; $\zeta = c$; $\vartheta = -b$; $\varrho - V = \left.\begin{matrix} 2ax \\ -by \end{matrix}\right\} \delta x + a.(\delta x)^2$

dessen zweyter Zustand $(2ax - b.(y + \delta y))\,\delta x + a\,(\delta x)^2$ davon der erste abgezogen $-b\delta y\,\delta x$ lässt, welches auch herauskömmt, wenn man von $\left.\begin{matrix} 2cy \\ -bx \end{matrix}\right\} \delta y + c.(\delta y)^2$ den zweyten Zustand $2cy - b.(x + \delta x)\,\delta y + c.(\delta y)^2$ macht, und davon den ersten abzieht.

483. Anm. Dieses Exempel kann 472 zu erläutern gebraucht werden. Wäre $a = c = \frac{1}{2}b$ oder $\frac{V}{a} = x^2 - 2xy + y^2$ so wäre zwar überhaupt $\frac{dx}{2a} = (x-y)\,dx + (y-x)\,dy$ aber für $y = x$ würde das Verschwindende $r - V = a.(dx - dy)^2$.

484. Will. Satz. $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ soll bedeuten, daß V so differentiiret wird, daß man nur y als veränderlich

deutlich ansieht, und alsdenn das Differential mit dy dividirt, wodurch eine endliche Grösse herauskömmt. Eben so bedeutet $\left(\frac{dV}{dx}\right)$, man soll V differentiiren daß sich nur x ändert, und das Differential das auf diese Art erhalten wird, mit dx dividiren. So ist in 481. $\left(\frac{dV}{dy}\right) = b$; $\left(\frac{dV}{dy}\right) = a$

485. Zus. Wenn $dV = Pdx + Qdy$; so ist $\left(\frac{dV}{dx}\right) = P$; $\left(\frac{dV}{dy}\right) = Q$; und aus 481. $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$

486. Wenn eine Differentialgrösse vorkömmt, wo x; y; und ihre Differentiale vermischt sind, so heisse man P; alles, was in dx und Q alles was in dy multiplicirt wird, alsdenn mache man $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ und $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$. Sind beyde nicht gleich, so kann die vorgegebene Differentialgrösse nicht durch Differentiirung einer Function von x; y; entstanden seyn, daß es also vergeblich wäre, eine solche Function, die ihr Integral seyn sollte, zu suchen.

So giebt es keine Function, weder eine algebraische noch transcendentische, deren Differen-

tial

tial $yxdx + xxdy$ wäre; weil hier $P = yx$; $Q = xx$ und $\left(\frac{dP}{dy}\right) = x$ aber $\frac{dQ}{dx} = 2x$

Von den Differentialen der Functionen, die drey veränderliche Grössen enthalten.

487. Lehrs. V sey eine Function von drey veränderlichen Grössen x; y; z; und $dV = Pdx + Qdy + Rdz$ so ist I) $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ lx

II) $\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$ III) $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$

Bew. Weil keine von den drey veränderlichen Grössen, durch die andere bestimmt wird, so kann man welche man will für unveränderlich annehmen. Dieses sey erstlich z; so ist V eine Function von zwo veränderlichen Grössen, x; y; und das Differential dieser Function $Pdx + Qdy$ und $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ (485). Nun sey y unveränderlich, also V eine Function von x; z; ihr Differential $Pdx + Rdz$ und $\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$. Endlich x unveränderlich, V eine Function

tion von y; z; ihr Differential $Qdy + Rdz$ und $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$.

488. Es sey

$dP = pdx + sdy + tdz$
$dQ = \pi dx + qdy + udz$
$dR = \varrho dx + \varphi dy + rdz$

so ist $\left(\frac{dP}{dy}\right) = s = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \pi$; $\left(\frac{dP}{dz}\right) = t = \left(\frac{dR}{dx}\right) = \varrho$; $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = u = \frac{dR}{dy} = \varphi$. also

$dP = pdx + sdy + tdz$
$dQ = sdx + qdy + udz$
$dR = tdx + udy + rdz$

489. Wenn man V so differentiirt, daß man nur eine der drey Grössen, deren Function es ist, veränderlich setzt, und dieses Differential wieder, so differentiirt, daß man nur die zweyte dieser drey Grössen veränderlich setzt, und dieses Differential wieder so differentiirt, daß man nur die dritte veränderlich setzt, so kömmt das drittemahl einerley heraus, in was für einer Ordnung man auch die drey Grössen nimmt, wie in 481. Den Beweis leichter zu übersehen, dividire man nach jedesmahliger Differentiation durch das Differential der Grösse, die man dabey veränderlich gesetzt hat. Diese drey Grössen haben aber 6 Ordnungen

[illegible] I, yzz [illegible] II, xyz [illegible] III, xzy [illegible] IV, xyy [illegible] V, xxz [illegible] VI, xxy

Für III ist $\left(\frac{dV}{dx}\right) = P$; $\left(\frac{dP}{dz}\right) = t$ und drittens $\left(\frac{dt}{dy}\right)$. Aber weil $dP = s\,dy + t\,dz$ für ein unveränderliches x; so ist $\left(\frac{dt}{dy}\right) = \left(\frac{ds}{z}\right)$.

Für V ist $\left(\frac{dV}{dy}\right) = Q$; $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = u$; und drittens

tens $\left(\frac{du}{dx}\right)$. Weil aber $dQ = sdx + udz$ für ein unveränderliches y ist, so ist $\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{ds}{dz}\right)$ Für VI ist $\left(\frac{dV}{dz}\right) = R$; $\left(\frac{dR}{dy}\right) = \mu$; und drittens $\left(\frac{du}{dx}\right)$ wie vorhin.

Wenn man nicht nach jeder Differentiation mit dem Differentiale der Grösse, die bey ihr veränderlich war, dividirt, so darf man nur dieses Differential bey der folgenden Differentiation als einen unveränderlichen Factor ansehen, und so bekömmt man bey jeder dritten Differentiation den Factor dxdydz.

490. Ex. Vom $\frac{xxy}{aa - zz}$ giebt die erste und zweyte Differentiation, nach den erwähnten Ordnungen folgendes, wo $v = aa - zz$.

I) $\frac{2xydx}{v}$; $\frac{2xdxdy}{v}$; II) $\frac{xxdy}{v}$;

$\frac{2xdxdy}{v}$; III) $\frac{2xxyzdz}{vx}$; $\frac{4xyzdxdz}{vv}$;

IIII) $\frac{2xydx}{v}$; $\frac{4xyzdxdz}{vv}$; V) $\frac{xxdy}{v}$;

$\frac{2xxzdydz}{vv}$ VI) $\frac{2xxyzdz}{vv}$;

$\frac{2xxzdydz}{vv}$; die dritte Differentiation giebt allemahl $\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$

491. Anm. Man wird eben ſo überſehn, daß in der vierten Differentiation einerley herauskömmt, in was für einer Ordnung man vier Gröſſen veränderlich nimmt, von denen V eine Function iſt, wo es 24 Ordnungen giebt; u. ſ. w.

492. Wenn 487. nicht ſtatt findet, ſo iſt $Pdx + Qdy + Rdz$ kein Differential einer Function wie 486. Man ſ. von ſolchen Gleichungen Eul. Inſt. Calc. diff. P. I. c. 9. am Ende.

493. Anm. Den wichtigen Satz (485) haben Clairaut, Fontaine und Euler jeder für ſich erfunden. S. Clairaut; ſur l'integration des equat. differentielles &c. Mem. de l'Acad. des Sc. 1740. p. 419. ed. de Holl. Nach Eulern I. C. D. P. I. c. 7. hat Karſten dieſe Lehren (481. . . . 492) mit vieler Scharfſinnigkeit und Gründlichkeit in zween zu Roſtock gehaltenen Diſputationen abgehandelt. De adfectionibus, quae omnis generis functionum, praecipue ſi tres vel adeo quatuor inuoluant variabiles differentialibus competunt, ſi eorum integrale ſit poſſibile; 1756. Regulae pro differentialibus functionibus duar. variabil. vniuerſalius et euidentius demonſtratae 1759. Nachgehends iſt eben dieſes von ihm in ſeiner Matheſi theoretica elementari et ſublimiori Sect. 26. vorgetragen worden. Bey verſchiedenen ſchweren Integrationen haben dieſe Sätze ihren Gebrauch.

Anwen-

Anwendung auf die Differentialgleichungen.

494. Lehrſ. P iſt eine Function von x und y.

Erſtens. Man integrire Pdx ſo daß nur x als veränderlich angeſehn wird, und nehme von dieſem Integrale das Differential ſo daß nur y veränderlich iſt.

Zweytens. Man differentiire P ſo daß ſich nur y ändert, und dividire dieſes Differential mit dy. Was ſo heraus kömmt, werde mit dx multiplicirt, und dieſes Product ſo integrirt daß ſich nur x ändert. Dieſes Integral multiplicire man mit dy. Ich ſage beyde Verfahren geben einerley.

Beweis. I. Pdx ſo integrirt, daß ſich nur x ändert und keine Conſt addirt wird, oder Conſt = o iſt, heiſſe V.

II. Dieſes V iſt nun eine ſolche Function von x und y daß ihr Differential, nur x veränderlich geſetzt, Pdx iſt (201) oder es iſt $\left(\frac{dV}{dx}\right) = P$ (484)

III. Dieſes V differentiire man nun auf die gewöhnliche Art daß ſich ſo wohl x als y ändern. In dieſer Bedeutung ſey $dV = Pdx + Gdy$, ſo iſt Gdy das was beym erſten Verfahren gefunden wird.

IIII. P und G, enthalten jedes x und y;

Man differentiire P ſo daß ſich nur y ändert, und dividire was herauskömmt, durch dy;

Man differentiire G so daß sich nur x ändert, und dividire was herauskömmt mit dx.

Beyde Quotienten sind gleich, (485) also

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dG}{dx}\right)$$

V. Weil $\left(\frac{dG}{dx}\right)$ bedeutet: G so differentiirt daß sich nur x ändert, und was dichergestalt herauskömmt mit dx dividirt, so bedeutet $\left(\frac{dG}{dx}\right)$. dx; man habe G so differentiirt, daß sich nur x ändert.

Also $\left(\frac{dG}{dx}\right)$. dx dergestalt integriren, daß nur x veränderlich ist, und keine andre Const als o, beyfügen, heißt G wiederherstellen.

VI. Weil $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ bedeutet: P so differentiirt daß sich nur y ändert und dann mit dy dividirt, so enthält der Ausdruck $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ kein dy sondern nur x und y.

Man multiplicire $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ mit dx, und integrire das Product dergestalt, daß nur x als veränder-

anderlich angesehn wird, füge auch keine andre Const. als o bey; So macht man mit $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ eben das was in (V) mit $\left(\frac{dG}{dx}\right)$ gemacht ward.

VII. Aber $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dG}{dx}\right)$ (IV) Wenn man bey ein paar gleichen Dingen, mit einem eben das macht was man mit dem andern macht, so giebt das eine eben das was das andre giebt.

Also: $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ nach (VI) behandelt giebt G; (V) und: $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ auf erwähnte Art behandelt, und dann mit dy multiplicirt giebt G. dy.

VIII. Diese Behandlung und Multiplication ist das was Zweytens vorschreibt;

Und G. dy ist das was Erstens fodert (III)

Also geben die Verfahren: Erstens und Zweytens, einerley.

IX. Exempel. $P = a.y + x^2 + x.y$ also $P.dx = a.y.dx + x^2.dx + y.x.dx$

$V = a.y.x + \frac{1}{2}.x^3 + \frac{1}{2}.y.x^2$ (I)

$dV = (a.y + x^2 + x.y).dx + (a.x + \frac{1}{2}x^2).dy$

$= P.dx + G.dy$ (III)

So kömmt: Erstens $(a.x + \frac{1}{2}.x^2).dy$

Ferner $\left(\frac{dP}{dy}\right) = a + x = \left(\frac{dG}{dx}\right)$

Nun werde Zweytens $a + x$ als $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ betrachtet, mit dx multiplicirt und so integrirt daß sich nur x ändert, so kömmt $a.x + \frac{1}{2}x^2$ und das mit dy multiplicirt giebt $(a.x + \frac{1}{2}x^2).dy$.

Aber $a + x$ als $\left(\frac{dG}{dx}\right)$ betrachtet mit dx multiplicirt und so integrirt daß sich nur x ändert giebt auch $a.x + \frac{1}{2}.x^2 = G$ und das mit dy multiplicirt giebt $(a.x + \frac{1}{2}x^2).dy$

So: Erstens, und Zweytens, einerley.

495. Willk. Satz. P sey eine Function von x und y zugleich, wenn man Pdx so integrirt daß man y als unveränderlich, und nur x als veränderlich ansieht, so bezeichne ich dieses folgendergestalt $\int(x)Pdx$ so ist $\int(x)yx^3dx = \frac{1}{4}yx^4$.

496. Lehrs. Z sey eine Function von x und y. Ihr Differential, wie gewöhnlich beyde veränderlich gesetzt, $= Pdx + Qdy$.

Nun setze man Pdx so integrirt daß sich nur x ändert, gebe V; dieses V so differentiirt daß sich beyde ändern, gebe $Pdx + Gdy$. So ist $dZ = Pdx + Gdy + Hdy$ dergestalt $G + H = Q$. Ich sage dieses H werde kein x enthalten sondern nur eine Function von y seyn.

Beweis.

Beweis. Aus (485) ist $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ und auch $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dG}{dx}\right)$; Folglich $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{dG}{dx}\right)$ Weil nun $Q = G + H$ so ist $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{dG}{dx}\right) + \left(\frac{dH}{dx}\right)$. Soll nun dieses $= \left(\frac{dG}{dx}\right)$ seyn, so muß $\left(\frac{dH}{dx}\right) = 0$ seyn. Das ist: H so differentiirt, daß nur x veränderlich gesetzt wird, muß ein Differential geben, das mit dx dividirt $= 0$ ist. Dieses heißt ohnstreitig soviel als H muß kein x enthalten. Eine Grösse die x enthält, so differentiirt daß man ihr x veränderlich setzt, giebt ein Product aus einer endlichen Grösse in dx, und dieses Product mit dx dividirt ist also nicht $= 0$ wenigstens nicht für jeden Werth. Allenfalls nur für gewisse bestimmte Werthe dieser Grösse, wie bey den Grössten und Kleinsten (155)

Ex. $Z = y^3 + xy^2 + x^3$ also $P = y^2 + 3x^2$; $Q = 3y^2 + 3xy$; $V = y^2x + x^3$; $dV = (y^2 + 3x^2)\,dx + 2xy\,dy$ also $G = 2xy$ folglich $Q - G$ oder $H = 3y^2$ eine Function nur von y.

nungen (Alg. 91.) I) xyz II) yxz III) zxy IIII) xzy V) zyx für I ist $\left(\frac{dV}{dx}\right) = P$; $\left(\frac{dP}{dy}\right) = s$ und die dritte Arbeit giebt $\left(\frac{ds}{dz}\right)$. Für II) hat man $\left(\frac{dV}{dy}\right) = Q$; $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = s$; und drittens wieder $\left(\frac{ds}{dz}\right)$. Für III) ist $\left(\frac{dV}{dz}\right) = Q$; $\left(\frac{dR}{dy}\right) = u$; und drittens $\left(\frac{du}{dx}\right)$. Aber wenn y unveränderlich, oder V nur eine Function von den veränderlichen Grössen x und z ist, so ist Q auch nur eine Function von ihnen, und $dQ = sdx + udz$; und $\left(\frac{ds}{dz}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)$ also giebt die dritte Arbeit in III und in II einerley. Für IIII ist $\left(\frac{dV}{dx}\right) = P$; $\left(\frac{dP}{dz}\right) = t$ und drittens $\left(\frac{dt}{dy}\right)$. Aber weil $dP = sdy + tdz$ für ein unveränderliches x; so ist $\left(\frac{dt}{dy}\right) = \left(\frac{ds}{z}\right)$. Für V ist $\left(\frac{dV}{dy}\right) = Q$; $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = u$; und drittens

tens $\left(\frac{du}{dx}\right)$. Weil aber $dQ = sdx + udz$ für ein unveränderliches y ist, so ist $\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{ds}{dz}\right)$ Für VI ist $\left(\frac{dV}{dz}\right) = R$; $\left(\frac{dR}{dy}\right) = u$; und drittens $\left(\frac{du}{dx}\right)$ wie vorhin.

Wenn man nicht nach jeder Differentiation mit dem Differentiale der Gröſſe, die bey ihr veränderlich war, dividirt, so darf man nur dieſes Differential bey der folgenden Differentiation als einen unveränderlichen Factor anſehen, und ſo bekömmt man bey jeder dritten Differentiation den Factor dxdydz.

490. Ex. Vom $\frac{xxy}{aa-zz}$ giebt die erſte und zweyte Differentiation, nach den erwähnten Ordnungen folgendes, wo $v = aa - zz$.

I) $\frac{2xydx}{v}$; $\frac{2xdxdy}{v}$; II) $\frac{xxdy}{v}$;

$\frac{2xdxdy}{v}$; III) $\frac{2xxyzdz}{vx}$; $\frac{4xyzdxdz}{vv}$;

IIII) $\frac{2xydx}{v}$; $\frac{4xyzdxdz}{vv}$; V) $\frac{xxdy}{v}$;

$\frac{2xxzdydz}{vv}$ VI) $\frac{2xxyzdz}{vv}$;

$\frac{2xxzdydz}{vv}$; die dritte Differentiation giebt alles-

mahl $\frac{4xzdxdydz}{(aa-zz)^2}$.

491. Anm. Man wird eben so übersehn, daß in der vierten Differentiation einerley herauskömmt, in was für einer Ordnung man vier Gröſſen veränderlich nimmt, von denen V eine Function iſt, wo es 24 Ordnungen giebt; u. ſ. w.

492. Wenn 487. nicht ſtatt findet, ſo iſt $Pdx + Qdy + Rdz$ kein Differential einer Function wie 486. Man ſ. von ſolchen Gleichungen Eul. Inſt. Calc. diff. P. I. c. 9. am Ende.

493. Anm. Den wichtigen Satz (485) haben Clairaut, Fontaine und Euler jeder für ſich erfunden. S. Clairaut; ſur l'integration des equat. differentielles &c. Mem. de l'Acad. des Sc. 1740. p. 419. ed. de Holl. Nach Eulern l. c. D. P. I. c. 7. hat Karſten dieſe Lehren (481. . . . 492) mit vieler Scharfſinnigkeit und Gründlichkeit in zween zu Roſtock gehaltenen Diſputationen abgehandelt. De adfectionibus, quae omnis generis functionum, praecipue ſi tres vel adeo quatuor inuoluant variabiles differentialibus competunt, ſi eorum integrale ſit poſſibile; 1756. Regulae pro differentiandis functionibus duar. variabil. vniuerſiſſimus et euidentius demonſtratae 1759. Nachgehends iſt eben dieſes von ihm in ſeiner Matheſi theoretica elementari et ſublimiori Sect. 26. vorgetragen worden. Bey verſchiedenen ſchweren Integrationen haben dieſe Sätze ihren Gebrauch.

Anwen-

Anwendung auf die Differentialgleichungen.

494. Lehrs. P ist eine Function von x und y.

Erstens. Man integrire Pdx so daß nur x als veränderlich angesehn wird, und nehme von diesem Integrale das Differential so daß nur y veränderlich ist.

Zweytens. Man differentiire P so daß sich nur y ändert, und dividire dieses Differential mit dy. Was so heraus kömmt, werde mit dx multiplicirt, und dieses Product so integrirt daß sich nur x ändert. Dieses Integral multiplicire man mit dy. Ich sage beyde Verfahren geben einerley.

Beweis. I. Pdx so integrirt, daß sich nur x ändert und keine Const addirt wird, oder Const $= 0$ ist, heisse V.

II. Dieses V ist nun eine solche Function von x und y daß ihr Differential, nur x veränderlich gesetzt, Pdx ist (201) oder es ist $\left(\frac{dV}{dx}\right) = P$ (484)

III. Dieses V differentiire man nun auf die gewöhnliche Art daß sich so wohl x als y ändern. In dieser Bedeutung sey $dV = Pdx + Gdy$, so ist Gdy das was beym ersten Verfahren gefunden wird.

IIII. P und G, enthalten jedes x und y;

Man differentiire P so daß sich nur y ändert, und dividire was herauskömmt, durch dy;

Man differentiire G so daß sich nur x ändert, und dividire was herauskömmt mit dx.

Beyde Quotienten sind gleich, (485) also

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=\left(\frac{dG}{dx}\right)$$

V. Weil $\left(\frac{dG}{dx}\right)$ bedeutet: G so differentiirt daß sich nur x ändert, und was solchergestalt herauskömmt mit dx dividirt, so bedeutet $\left(\frac{dG}{dx}\right)$. dx; man habe G so differentiirt, daß sich nur x ändert.

Also $\left(\frac{dG}{dx}\right)$. dx dergestalt integriren, daß nur x veränderlich ist, und keine andre Const als o, beyfügen, heißt G wiederherstellen.

VI. Weil $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ bedeutet: P so differentiirt daß sich nur y ändert und dann mit dy dividirt, so enthält der Ausdruck $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ kein dy sondern nur x und y.

Man multiplicire $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ mit dx, und integrire das Product dergestalt, daß nur x als verän-

änderlich angesehn wird, füge auch keine andre Const. als o bey; So macht man mit $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ eben das was in (V) mit $\left(\frac{dG}{dx}\right)$ gemacht ward.

VII. Aber $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dG}{dx}\right)$ (IV) Wenn man bey ein paar gleichen Dingen, mit einem eben das macht was man mit dem andern macht, so giebt das eine eben das was das andre giebt.

Also: $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ nach (VI) behandelt giebt G; (V) und: $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ auf erwähnte Art behandelt, und dann mit dy multiplicirt giebt G. dy.

VIII. Diese Behandlung und Multiplication ist das was Zweytens vorschreibt;

Und G. dy ist das was Erstens fodert (III)

Also geben die Verfahren: Erstens und Zweytens, einerley.

IX. Exempel. $P = a.y + x^2 + x.y$ also
$P.dx = a.y.dx + x^2.dx + y.x.dx$
$V = a.y.x + \frac{1}{2}.x^3 + \frac{1}{2}.y.x^2$ (I)
$dV = (a.y + x^2 + x.y).dx + (a.x + \frac{1}{2}x^2).dy$
$= P.dx + G.dy$ (III)

So kömmt: Erstens $(a.x + \frac{1}{2}.x^2).dy$

Ferner $\left(\frac{dP}{dy}\right) = a + x = \left(\frac{dG}{dx}\right)$

Nun werde Zweytens $a + x$ als $\left(\frac{dP}{dy}\right)$ betrachtet, mit dx multiplicirt und so integrirt daß sich nur x ändert, so kömmt $a.x + \frac{1}{2}x^2$ und das mit dy multiplicirt giebt $(a.x + \frac{1}{2}x^2).dy$.

Aber $a + x$ als $\left(\frac{dG}{dx}\right)$ betrachtet mit dx multiplicirt und so integrirt daß sich nur x ändert giebt auch $a.x + \frac{1}{2}.x^2 = G$ und das mit dy multiplicirt giebt $(a.x + \frac{1}{2}x^2).dy$

So: Erstens, und Zweytens, einerley.

495. Willk. Satz. P sey eine Function von x und y zugleich, wenn man Pdx so integrirt daß man y als unveränderlich, und nur x als veränderlich ansieht, so bezeichne ich dieses folgendergestalt $\int(x)Pdx$ so ist $\int(x)yx^3dx = \frac{1}{4}yx^4$.

496. Lehrs. Z sey eine Function von x und y. Ihr Differential, wie gewöhnlich beyde veränderlich gesetzt, $= Pdx + Qdy$.

Nun setze man Pdx so integrirt daß sich nur x ändert, gebe V; dieses V so differentirt daß sich beyde ändern, gebe $Pdx + Gdy$. So ist $dZ = Pdx + Gdy + Hdy$ dergestalt $G + H = Q$. Ich sage dieses H werde kein x enthalten sondern nur eine Function von y seyn.

Beweis.

Beweis. Aus (485) ist $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ und auch $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dG}{dx}\right)$; Folglich $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{dG}{dx}\right)$ Weil nun $Q = G + H$ so ist $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{dG}{dx}\right) + \left(\frac{dH}{dx}\right)$. Soll nun dieses $= \left(\frac{dG}{dx}\right)$ seyn, so muß $\left(\frac{dH}{dx}\right) = 0$ seyn. Das ist: H so differentiirt, daß nur x veränderlich gesetzt wird, muß ein Differential geben, das mit dx dividirt $= 0$ ist. Dieses heißt ohnstreitig soviel als H muß kein x enthalten. Eine Grösse die x enthält, so differentiirt daß man ihr x veränderlich setzt, giebt ein Product aus einer endlichen Grösse in dx, und dieses Product mit dx dividirt ist also nicht $= 0$ wenigstens nicht für jeden Werth. Allenfalls nur für gewisse bestimmte Werthe dieser Grösse, wie bey den Grössten und Kleinsten (155)

Ex. $Z = y^3 + xy^2 + x^3$ also $P = y^2 + 3x^2$; $Q = 3y^2 + 3xy$; $V = y^2x + x^3$; $dV = (y^2 + 3x^2)\,dx + 2xy\,dy$ also $G = 2xy$ folglich $Q - G$ oder $H = 3y^2$ eine Function nur von y.

497. Aufg. Das Integral Z; von $Pdx + Qdy$ zu finden, wenn P und Q sich nach 486. verhalten.

Aufl. Man mache $\int (x) Pdx = V$ (495) ist nun $G = Q$; so ist $V = Z +$ Const weil alsdenn $dV = dZ$; Ist aber dieses nicht, sondern $Q = G + H$ also $dZ = dV + Hdy$ so wird $Q - G = H$ eine Function von y allein seyn, (496) daß also $Z = V + \int Hdy$ wo das letzte Integral, weil dabey nur eine veränderliche Grösse vorkömmt, allemahl durch die Quadraturen gegeben ist.

Ex. Wenn $3x^2 y^2 dx + 2yx^3 dy + 4ay^3 = dZ$

so ist $P = 3x^3 y^2$; $Q = 2yx^3 + 4ay^3$ also $\left(\frac{dP}{dy}\right) = 6x^2 y = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ und $V = x^3 y^2$ und $dV = 3x^2 y^2 dx + 2x^3 ydy$ also $G = 2x^3 y$; $Q - G$ oder $H = 4ay^3$ und $Z = x^3 y^2 + ay^4$.

Von den Differentialgleichungen.

498. Aufg. Die Integralgleichung der Differentialgleichung $Pdx + Qdy = o$ zu finden, wenn sich P; Q; nach 486 verhalten.

Aufl. I. Nach 497. findet man Z, welches hier einer beständigen Grösse C gleich seyn muß, (22) also ist die Integralgleichung $V + \int Hdy = Const$

Im

Im Exempel 497; wenn $dZ = 0$; wäre $x^3 y^2 + ay^4 = C$.

II. Das Merkmahl welches anzeigt die Differentialgleichung lasse sich integriren ist auf Differentiale vom ersten Grade eingeschränkt. Ein allgemeiners, wenn höhere Differentiale vorkommen, hat Euler aus der Variationsrechnung hergeleitet, §. 92; der Abhandlung: de calculo variationum die sich als Appendix, bey: Institutionum calculi integralis Volumen III. befindet. Dieser Band ist zu St. Petersburg 1770 erschienen, auch daselbst 1793 von neuem herausgegeben worden, da ihm 1794, volumen quartum beygefügt ist, continens supplementa partim inedita, partim in operibus Ac. Imp. impressa.

Von And. Ioh. Lexell befindet sich ein Aufsatz: de criteriis integrabilitatis formular. differential. in Noui Commentarii Ac. Sc. Imp. Petrop. T. XV. pro anno 1770; p. 127. Lexell leitet das eulerische Kennzeichen aus den gewöhnlichen Lehren der Differentialrechnung her, und giebt viel andre wichtige Folgerungen Integrabilität betreffend.

499. Zus. Eine Differentialgleichung wo sich P, Q, nach 486 verhalten, lässt sich wenn man jeden ihrer Theile mit einer veränderlichen Grösse multiplicirt, oder dividirt, so ändern, daß dieses Verhalten nicht mehr statt findet.

Die Möglichkeit hievon ist zulänglich durch ein einziges Exempel dargethan. Bey

$nxy^{n-1}dy + y^n dx = o$ findet dieſes Verhalten ſtatt, und die Integralgleichung iſt $xy^n = Conſt.$; Wenn man aber die Differentialgleichung mit y^{n-1} dividirt ſo findet dieſes Verhalten nicht mehr bey $nxdy + ydx = o$ ſtatt.

Die Gleichung $Pdx + Qdy = o$ unterſcheidet ſich nähmlich darinnen von dem Differential $Pdx + Qdy = dZ$, daß man bey ihr alle Glieder mit welcher veränderlichen Gröſſe man will multipliciren oder dividiren darf, welches beym Differentiale nicht angeht. Man bedient ſich zuweilen ſolcher Multiplicationen, aus einer Differentialgleichung ihre Integralgleichung herzuleiten.

500. Lehrſ. Wenn bey einer Differentialgleichung, nicht $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ iſt, ſo giebt es allemahl eine veränderliche Gröſſe L; mit der man P und Q multipliciren kann ſo daß ſich die Gleichung in $L.P.dx + L.Q.dx = o$ verwandelt, und $\left(\frac{dL.P}{dy}\right) = \left(\frac{dL.Q}{dx}\right)$.

Beweis. Ich ſetze zum voraus, daß jede Differentialgleichung zwiſchen zwo veränderlichen Gröſſen eine Integralgleichung hat, aus deren Differentiation ſie entſtanden ſeyn kann. Dieſes gründet ſich darauf, weil eigentlich Differentialgleichungen nichts anders anzeigen, als das Verhalten zwiſchen verſchwindenden Veränderungen, verän-

veränderlicher Gröſſen (13) Es giebt alſo keine ſolche Differentialgleichung zwiſchen zwo veränderlichen Gröſſen ohne eine Gleichung zwiſchen den veränderlichen Gröſſen ſelbſt.

Ich nehme das nur von zwo veränderlichen Gleichungen an. $P.dx + Q.dy + R.dz = 0$, beſtimmt nicht allemahl ein mögliches Verhalten zwiſchen x; y; z; Euler Inſtit. Calc. integr. Vol. III. (1770) §. 5.

Nun kann man eine Differentialgleichung zwiſchen ein Paar veränderlichen Gröſſen haben, ohne daß man weiß wie die Gleichung zwiſchen den veränderlichen Gröſſen ſelbſt beſchaffen iſt; von dem Falle iſt hier die Rede.

Dieſe unbekannte Gleichung nun zwiſchen den veränderlichen Gröſſen ſelbſt, muß ſo beſchaffen ſeyn, daß eine gewiſſe Conſt = einer Function von x und y iſt.

Wenn man dieſe unbekannte Gleichung differentiirte, würde die Conſt aus dem Differentiale weggehen, und $o = Mdx + Ndy$ heraus kommen, wo ich weder M noch N weiß.

Daraus aber folgte $\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$ Und aus $Pdx + Qdy = o$ folgt $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$ Beydes muß einerley ſeyn, wenn $Mdx + Ndy = o$ die

die Differentialgleichung seyn soll, die aus der Integralgleichung von $Pdx + Qdy = o$ folgt,

Also ist $\frac{P}{Q} = \frac{M}{N}$

Das heisst nicht etwa $P = M$; $Q = N$; denn man weiß daß ein paar Brüche gleich seyn können ohne daß ihre Zähler einerley, und ihre Nenner einerley sind, wenn nur des einen Zähler und Nenner, Vielfache von des andern Zähler und Nenner sind.

Also sey $M = L.P$; $N = L.Q$;

Weil aber $Mdx + Ndy$ aus der wirklichen Differentiation einer Function von x und y entstanden seyn soll, so ist $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$ (486)

Folglich $\left(\frac{d\,L.P}{dy}\right) = \left(\frac{d\,L.Q}{dx}\right)$

501. Kann man den Factor L finden, so lässt sich die Gleichung $Pdx + Qdy = o$ unter der Gestalt $L.Pdx + L.Qdy = o$, nach (498) integriren.

Aber diesen Factor zu finden, ist schwer und man hat dazu bisher noch keine allgemeine Methode. Clairaut in der (493) angef. Schrift lehrt 427. S. ein Verfahren das in manchen Fällen zutrifft; erweitert auch solches auf Gleichungen die drey oder mehr veränderliche Grössen enthalten.

502.

502. Umständlich handelt hievon Eul. Inst. Calc. integr. Vol. I. §. 459. sequ., wo er auch §. 458 anzeigt wie man sich zu verhalten habe, wenn man bey den Vorschriften die ich (498) gegeben habe, $\int (x) P dx$ nicht wirklich darstellen könnte.

Bisher hat dieser Kunstgriff einen solchen Factor zu finden, kaum bey andern Gleichungen Dienste geleistet, als bey denen wo man (405) die veränderlichen Grössen von einander sondern kann. Eul. a. a. O. 447. §. Indessen ist das Verfahren mit diesem Factor, der Natur der Gleichungen gemässer, und hat andere Vorzüge, deßwegen es Hr. Euler ausführlich erklärt. Hier verstattet mir der Raum nicht mehr davon beyzubringen.

503. Sur l'integration des équations à differences partielles du premier ordre, par M. de la Grange; Nouv. Mém. de l'Ac. R. des Sc. et B. L. Année 1772; Berlin 1774; p. 352. Wenn u einer Function von mehr veränderlichen Grössen, x; y; z, ist, so heissen differences partielles von u, qui resultent de la differentiation de u en y faisant varier chacune des quantités x, y, z; ... à part, ainsi supposant que la valeur complette de du, soit représentée par $p. dx + q. dy + r. dz + \ldots$ les differens termes $p. dx$; $q. dy$; $r. dz$. — de cette differentielle seront les differences partielles du premier ordre de u.

Was

En y heißt: daſelbſt; nicht: in y. Uebrigens zeigt dieſe Stelle woher die Benennung genommen iſt; p. dx... ſind Theile des völligen Differentials und die Differentiale ſind von der erſten Ordnung.

Man bezeichnet fährt l. Gr. fort, die Coeffizienten p, q, r, bey den Differentialen dx, dy, dz, durch $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$; $\frac{du}{dz}$; So wird der vollſtändige Werth von du ſo vorgeſtellt: $\frac{du}{dx}\cdot dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}\cdot dz$. Hat man alſo eine Gleichung zwiſchen u, x, y, z; und $\frac{du}{dx}$; $\frac{du}{dy}$; $\frac{du}{dz}$ ſo iſt das eine équation à differences partielles du premier ordre von der Art ſolche Gleichungen zu integriren ſagt l. Gr. will ich neue Grundlehren geben.

Man ſieht daß ich im vorhergehenden Vortrage die Begriffe gegeben habe welche das Kunſtwort differences partielles bezeichnet, daß du ſo ſoll differentiirt werden, daß ſich nur x ändert, und was ſo herauskömmt, mit dx dividirt, daran hätte ich freylich durch das Zeichen $\left(\frac{du}{dx}\right)$ erinnert.

Auch

Auch beschäfftigt I. Gr. sich mit dem Factor von dem ich (501) rede.

504. I: Die Integrale einer Differentialgleichung, enthält allemahl eine unveränderliche Grösse, die beym Differentiiren der Gleichung zwischen den endlichen veränderlichen Grössen aus der Rechnung ging, also in der Differentialgleichung nicht zu finden ist.

Zuweilen aber findet sich eine Gleichung zwischen den endlichen veränderlichen Grössen, welche differentiirt die Differentialgleichung giebt, selbst aber die erwähnte unveränderliche Grösse nicht enthält. Eine solche Gleichung heisst Euler: Integrale particulare; Inst. calc. int. Vol. I. §. 540. Das 4 Capitel welches da anfängt, handelt: de integratione particulari aequationum differentialium.

Die Benennung lässt sich so rechtfertigen: Wenn man aus der Differentialgleichung durch gewöhnliches Verfahren die Integrale findet, so kann man der unveränderlichen Grösse welche beygefügt wird, andre und andre Werthe geben, und so andre und andre einzelne Integrale finden.

II. Exempel $a^2 . dy + y^2 . dx = a^2 . dx + x . y . dy$ Hie sieht man leicht daß $y = x$ gesetzt der Differentialgleichung genug thut, wo selbst a aus der Rechnung geht also eine Integrale herauskömmt, die gewiß nicht die vollständige seyn kann.

III)

III) Man ſetzt in dieſer Differentialgleichung $y = x + z$ ſo kömmt

$$a^2 . dz = -x . z . dx - z^2 . dx$$

Dieſes vergleiche man mit (412) ſo iſt

	y	x	a	p	b	n	q	p. dx : a	z
dorten	z	x	a^2	$-x$	-1	2	1	$-x^2 : 2.a^2$	$e^{-x^2 : 2.a^2}$

alſo die Integralgleichung

$$c - \frac{a^2 . e^{-x^2 : 2.a^2}}{z} = -\int e^{-x^2 : 2a^2} . dx$$

Setzt man $c = o$ und $z = \frac{a^2}{v}$ ſo kömmt $v = e^{x^2 : 2.a^2} . \int e^{-x^2 : 2a^2} . dx$

So druckt Euler die Integralgleichung aus, a. a. O. §. 544.

IV. In dieſer allgemeinen Integrale ſagt E. ſey die beſondre (II) enthalten, ſi conſtans integratione $\int e^{-x^2 : 2a^2} . dx$ inuecta ſumatur infinita, fit v infinita et $z = o$ vnde $y = x$.

Ich verſtehe ſeinen Ausdruck ſo; Er nimmt den erwähnten ſummatoriſchen Theil dergeſtalt daß er eine unendliche unveränderliche Gröſſe beyfügt.

Da er c nicht braucht wie ich gethan habe, ſteht ihm allerdings frey anderswo eine unveränderliche Gröſſe beyzufügen.

V. Ich geſtehe freylich daß eine unendliche unveränderliche Gröſſe mir kein recht deutlicher Begriff ſcheint. So ſchloß ich (211) ein hyperboliſcher

bolischer Raum könne nicht mit $x = o$ anfangen, weil Const eine unendliche Grösse seyn müsste.

Da keine Grösse unendlich ist nur wird (4) was wäre eine unendliche beständige?

Wenn man o als Const beyfügt, so heisst das keine beständige Grösse beyfügen, das ist bestimmt und deutlich Nichts beyfügen. Aber was Unendliches beyfügen ist nichts bestimmtes weil des Unendlichen Hälfte oder Doppeltes auch Unendlich heissen.

VI. Euler erinnert, nicht allemahl führe ein besondres Integral auf das allgemeine so leicht als (II) auf (III) z. E. in $a^3 . dy + y^3 . dx = a^3 . dx + x^3 . dx$ thue $y = x$ genug. Wenn man nun $y = x + z$ setze, komme $a^3 . dz + 3 . x^2 . z . dx + 3 . x . z^2 . dx + z^3 . dx = o$; wovon die Auflösung nicht leichter scheine, als der vorigen Gleichung ihre.

VII. Manchmahl falle es schwerer das integrale particulare zu entdecken, immer sey die Erforschung davon nützlich. Euler giebt dazu Anleitung, auch einen brauchbaren Lehrsatz §. 572. Wenn die Differentialgleichung $P . dx + Q . dy = o$ durch Multiplication mit dem Factor M integrabel gemacht wird (500) so wird $M = o$ ein Particularintegral seyn, auser wenn für diese Voraussetzung, P oder Q unendlich werden. Auch §. 574; wenn $P . dx + Q . dy = o$ durch M

dividirt, integrabel wird, ſo iſt M = o ein Particularintegral, auſer wenn dieſe Vorausſetzung P oder Q auf o bringen.

VIII. Sur les integrales particulières des equations differentielles par Mr. de la Grange. Mém. de l'Ac. des Sc. et des B. L. de Pruſſe année 1774; p. 192. Er glaubt da eine neue und vollſtändige Theorie davon zu geben, nachdem ſich auſer Eulern, d'Alembert, Condorcet, de la Place damit beſchäfftigt haben. In eben den Mém. 1779; p. 121; findet ſich de la Grange Abhandlung ſur differentes quéſtions l'analyſe, rélatives à la théorie des integrales particulières.

In Mém. de l'Ac. des Sc. de Turin Vol. V. 1790, 91; iſt unter den Mémoires préſentés der erſte: Sur les équations différentiélles du prémier degré par M. Jean Trembley, gründet ſich auf die beyden euleriſchen Lehrſätze (VII) und ſucht beſonders zu zeigen wie integralia partialia dienen den Multiplicator zu finden.

Trembleys Abh. ſur les intégrales particulières des équations differentielles findet ſich eben daſ. p. 53. Nimmt für das Particularintegral eine Reihe an, und ſucht derſelben Geſtalt und Coefficienten zu beſtimmen.

Fernere

Fernere Anwendung der Rechnung des Unendlichen auf die krummen Linien.

Quadraturen und Rectificationen, wenn die Ordinaten aus einem Puncte gehen.

Ergänzung zu 205.

505. Aufg. Wenn wie in (104) 22. F. eine Gleichung zwiſchen AP = x; CM = y; gegeben iſt, das Differential der Fläche der krummen Linie, oder den Ausſchnitt MCN unter der Vorausſetzung, daß N; M; ſich unendlich nähern, zu finden.

Auflſ. I. Dieſer Ausſchnitt fällt zwiſchen zweene Ausſchnitte von Kreiſen, die CM; CN; zu Halbmeſſern hätten, und beyde dem Winkel MCN zugehörten; das iſt zwiſchen $\frac{1}{2}$ CM. MS und $\frac{1}{2}$. CN. $\frac{CN}{CM}$. MS; zwiſchen dieſen beyden Ausſchnitten iſt der Unterſchied $= \frac{CM^2 - CN^2}{2.\ CM}$. MS

$= \frac{(NS.(2CM + NS)}{2CM}$ MS welcher sich zu dem kleinsten Ausschnitte wie NS.(2CM + NS): CM^2 verhält, und also in Vergleichung mit demselben verschwindet, wenn bey unendlicher Näherung der Puncte M; N; NS in Vergleichung mit 2CM verschwindet. Also ist das gesuchte Differential $= \frac{1}{2}$ CM. MS $= \frac{yy\,dx}{2r}$ (204) welches so integrirt, daß es für $x = o$ verschwindet, die Fläche der krummen Linie giebt die von des Winkels ACM Schenkeln, und dem Bogen der krummen Linie der zwischen diese Schenkel fällt, begränzt wird, was also hier zwischen den Bogen CM 22 F. und die gerade Linie CM fällt.

II. Dieses hat keine Schwürigkeit, wenn man bey dem ersten Umlaufe einer solchen krummen Linie um den Mittelpunct C stehen bleibt. Aber wenn sie sich zu wiederhohlten mahlen um C windet, wie die archimedische Spirallinie (Alg. 194.) muß man die Sache folgendergestalt betrachten.

III. Von einer solchen Linie sey 24 F. CMBA der erste Umlauf, A2M2B2A der zweyte; 2A3M3B3A der dritte; 3A4M ein Bogen von dem vierten; die Puncte M liegen alle in einer Ordinate, und die Puncte m in einer andern ihr unendlich nahen. Wenn man sich die Erzeugung

der

der krummen Linie wie Alg. 592 vorstellt, so heisse u der Bogen mit dem Halbmesser r, der des Winkels ACM Maaß ist. Der Winkel AC2M ist = ACM + 4R (Alg. 593.) also sein Maaß der Bogen u + p; und so der Winkel AC3M = ACM + 2. 4R und sein Maaß der Bogen u + 2p; u. s. w. Also wird für diese Winkel, x, nach und nach = u; = u + p; = u + 2p u. s. w. und weil die Ordinate eine Function von x ist, so ist CM eine Function von u; und C2M eben die Function von u + p; und C3M eben die von u + 2p u. s. w.

IIII. Ferner heisse die veränderliche erste Fläche, was von der geraden Linie CM; und der krummen CM begränzt, und nach I. gefunden wird. Wenn man in dem Integrale, das diese veränderliche erste Fläche ausdruckt, x = p setzt, so bekömmt man die ganze erste Fläche CMBAC; was nähmlich von der geraden Linie CA, und der krummen CMBA begränzt wird. An dieser Gränze CA, fängt sich die zweyte veränderliche Fläche ACM2M an, sie ist zwischen den geraden Linien CA; M2M; und den krummen CM; A2M; enthalten; Sie verändert sich, wenn sich A2M in A2m verändert, und ihr Differential ist M2M2m m̂; was zwischen den geraden Linien M2M; m2m; und den Elementen der krummen, 2M2m; Mm enthalten ist. Wenn das Integral dieses Differentials eine Function von x ist, und wenn es blos diese zweyte

veränderliche Fläche ausdrucken soll, so muß es eine solche Function von x seyn, die für $x = p$ verschwindet, weil sich diese zweyte veränderliche Fläche da anfängt, wo $x = p$; Hat man sie nun durch ein solches Integral ausgedruckt, so setzt man darinnen $x = 2p$; die ganze zweyte Fläche CA2M2B2A zu bekommen, die von den geraden Linien CA; A2A, und der krummen CMBA2M2B2A begränzt wird, und sich um die ganze erste Fläche herumwindet. An ihrer Gränze A2A fängt sich die dritte veränderliche Fläche 2AA2M3M an; u. s. w.

V. Dieses allgemein zu machen, sey 2A3M3B3A die $(n-1)$te Umwindung der Linie um C; so daß jede ihr zugehörige Ordinate C3M; eine Function von $x = u + (n-2)p$ ist. Aus III nähmlich ist für jede Umwindung, die Ordinate einer Function von x + einem Vielfachen von p durch eine Zahl, die eins weniger ist, als die Zahl der Umwindung. So ist also 3A4M, ein Bogen der nten Umwindung, dessen Ordinate C4M eine Function von $x = u + (n-1)p$; und 2A3A4M3M die nte veränderliche Fläche, deren Differential 3M4M4m3m so muß integrirt werden, daß es für $x = (n-1)p$ verschwindet.

VI. Es bedeute φx die Function von x, durch welche die Ordinate ausgedruckt wird. Weil nun $dx = du$; so ist 4MC4m =

(φ (u

$\frac{(\varphi(u+(n-1)p))^2 \cdot du}{2r}$ und $3MC3m =$ $\frac{(\varphi(u+(n-2)p))^2 \cdot du}{2r}$ (I) also das Differential $3M4M4m3m =$ $\frac{(\varphi(u+(n-1)p)^2)^2 - (\varphi(u+(n-2)p))^2}{2r}$ du das ist: man muß in dem Ausdruck, der y durch x giebt, x erstlich $= u + (n-1)p$; denn $= u + (n-2)p$ setzen; beyde Werthe quadriren, und das letzte Quadrat vom ersten abziehen. Der Unterschied mit $\frac{du}{2r}$ multiplicirt, giebt dieses Differential, welches man so integriren muß, daß es für $x = (n-1)p$ verschwindet. Weil nun in der veränderlichen Grösse, welche durch dieses Integral ausgedruckt wird, $x = u + (n-1)p$ ist, so folgt, daß $u = o$ für $x = (n-1)p$ ist, und daß man also das Integral so nehmen muß, daß es für $u = o$ verschwindet. Nachdem man es so genommen hat, setze man darinnen $u = p$ so hat man die ganze nte Fläche.

VI. Die erste Fläche aber muß man aus I finden, und kann V dabey nicht brauchen. Denn wollte man $n = 1$ setzen, so wäre zwar $EM = \varphi u = \varphi(u + (n-1)p)$ aber es gäbe keine Ordinate, die $\varphi(u+(n-2)p)$ das ist hier $\varphi(u-p)$ wäre.

Exempel.

506. Bey der archimedischen Spirallinie (Alg. 580.) ist $y = \frac{rx}{p}$. Folglich das Differential der ersten Fläche $= \frac{rrx \times dx}{2rpp}$ welches die erste veränderliche Fläche $= \frac{rx^3}{6pp}$, und also für $x = p$; die ganze erste Fläche $= \frac{rp}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{rp}{2} = \frac{1}{3}$ des Kreises, in dem die Spirallinie beschrieben ist, giebt.

Ferner ist $\varphi x = \frac{rx}{p}$ also das Differential $(505; V) = \frac{rr}{pp}((u + (n-1)p)^2 - (u + (n-2)p)^2) \cdot \frac{du}{2r} = (2pudu + (2n-3)p^2 \cdot du) \cdot \frac{r}{2pp}$; davon das Integral $= (u + (2n-3) \cdot p) \cdot \frac{ur}{2p}$; welches sich für $u = p$ in $(n-1) \cdot rp$ verwandelt.

Die ganze zweyte Fläche ist also $= rp =$ dem Sechsfachen der ganzen ersten, und jede ganze folgen-

folgende Fläche, ist ein Vielfaches der zweyten durch eine Zahl, die um eins weniger ist als die Zahl der Fläche. (Archimed von den Spirallinien 27. Satz.)

507. Bey unzähligen Spirallinien (Alg. 596.) ist $y = \left(\frac{r}{p}\right)^{n:m} . x$. Dieses giebt die erste Fläche $= \frac{x^3}{6} \sqrt[m]{\left(r^{2n-m} : p^{2n}\right)}$, und die Verhältniß der ersten ganzen Fläche zur Fläche des Kreises wie $1 : 3 \sqrt[m]{\left(\frac{r}{p}\right)^{2m-2n}}$ $\left(\frac{1}{3}\right)$

Für $m = 2$; $n = 1$ wird sie $= 1 : \frac{3r}{p}$ Hier ist $\varphi x = \frac{r}{p} x^{n:m} x$ woraus man nach 505; V; die folgenden Flächen finden könnte, nur daß man die Verwirrung zu vermeiden, statt des einen n einen andern Buchstaben brauchen müßte.

508. Wenn die Abscisse x einer paraboliſchen Linie, der die Ordinate $(a^\delta . x^\varepsilon) 1 : (\delta + \varepsilon)$ zugehört, in einen Kreisbogen gekrümmt wird, so entstehen unzählige paraboliſche Spirallinien, davon die (107) für $\delta = \varepsilon = 1$ ein Exempel ist. Also ist für sie $y = r - \varkappa x^e$ wo $\varkappa = \sqrt[\delta+\varepsilon]{a^\delta}$ und $e = \varepsilon : (\delta + \varepsilon)$.

Dieſes giebt die erſte Fläche $= \frac{rx}{2} - \frac{xx^{e+1}}{e+1} + \frac{xxx^{2e+1}}{2.(2e+1).r}$.

Für (107) iſt $e = \frac{1}{2}$; $x = \sqrt{a}$; Es ſey $a = rr$: p ſo iſt die erſte Fläche $= rx.\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{x}{p}} + \frac{x}{4p}\right) = \frac{1}{12} rp$ für $x = p$; Dieſe Fläche iſt alſo der ſechſte Theil der Kreisfläche.

509. Aufg. In (505) das Differential MN des Bogens der krummen Linie zu finden.

Aufl. Die Sehne MN nähert ſich unendlich ihrem Bogen; (68) das Quadrat der Sehne aber beſteht aus den Quadraten eines Perpendikels von M auf CN; und des Stückes der Linie CN, das zwiſchen dieſem Perpendikel und dem Puncte N liegt. Wenn ſich nun N; M; einander unendlich nähern, ſo nähert ſich das Perpendikel unendlich dem Kreisbogen MS (96) $= \frac{y\,dx}{r}$ und das Stück auf der Linie CN; dem Unterſchiede CN — CM $= dy$; alſo der Bogen MN dem Werthe $ds = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{yydx^2}{rr}\right)}$ welches integrirt,

grirt, daß das Integral = o für x = o wird, die Länge des Bogens der krummen Linie giebt, der zwiſchen die Schenkel des Winkels ACM fällt.

Exempel.

Die logarithmiſche Spirallinie.

510. I. Wenn der Winkel CMT 22 F. den die Tangente einer krummen Linie mit ihrer Ordinate macht, durch die ganze krumme Linie unveränderlich iſt, ſo ſetze man ſeine Tangente (104) $\frac{y\,dx}{r\,dy} = m$ dieſes giebt $\frac{dx}{mr} = \frac{dy}{y}$ daß alſo die Kreisbogen die man hier für Abſciſſen annimmt, Logarithmen der Ordinaten ſind, daher dieſe Linie ihren Nahmen erhalten hat. Aus 104 kömmt für ſie $CT = my$.

II. Weil $\frac{x}{mr} = ly +$ Conſt und man r gewiß ſo nehmen kann, daß der Kreis die krumme Linie irgendwo ſchneidet, und folglich ſein Halbmeſſer eine Ordinate von ihr wird; ſo ſey CA dieſer Halbmeſſer in der Lage, da er zugleich eine Ordinate iſt; folglich iſt $x = o$ für $y = r$; und $o = lr +$ Conſt alſo $\frac{x}{mr} = l\,(y : r)$.

III. Mit dem bejahten x wächſt auch $l\,(y : r)$ und folglich y ohne Ende. Für verneinte x wird $y : r$

y : r ein Bruch, der immer abnimmt, je gröſſer die verneinten x werden, aber nur verſchwindet, indem das verneinte x unendlich wird. (244) Sind nähmlich die bejahten x, Bogen, die von A nach der rechten Hand zu gerechnet werden, wie AP, ſo muß man die verneinten nach der linken Hand zu rechnen wie AQ; beyde aber können ohne Ende fort wachſen, und den Umkreis zu wiederhohlten mahlen enthalten. Weil nun y nicht eher verſchwindet, als wenn das verneinte x unendlich wird, ſo muß ſich die Ordinate, aus der Lage CA nach der linken Hand drehen, und auf dieſe Art unzählich vielmahl um C drehen, ehe M in C rückt, das iſt, die krumme Linie kömmt nach unzählich vielen Wendungen, die ſie nach der linken Hand von CA zu anfängt, und immer ſo um C fortſetzt, erſtlich in C.

IIII. Aus (509) wird $ds = dy. \sqrt{(1 + mm)}$ folglich $s = y\sqrt{(1 + mm)}$ wenn s den Bogen CM der krummen Linie von C an gerechnet bedeuten ſoll, weil alsdenn s und y zugleich verſchwinden müſſen. Dieſer Bogen alſo, der unzählig viele Wendungen um C macht (III) iſt doch nur einer beſtimmten geraden Linie gleich, nähmlich der Tangente MT wie daraus, daß ſie $= \sqrt{(CT^2 + CM^2)}$ vermöge (510. I.) folgt. Jacob Bernoulli hat dieſes entdeckt. Specimen alterum calc. differentialis; Act. Er. Lipſ. Iun. 1691. Op. Iac. Bern. n. 42.

V. Das

V. Das Differential der Fläche wird aus 505; $\frac{1}{2}$ mydy also die Fläche $\frac{myy}{4} = \frac{1}{2}\Delta CMT$. Die Fläche fängt hier von C an, weil sie $= o$ für $y = o$ ist, und begreift die unzählichen Windungen um C (II) in sich.

Zur Construction der Linie.

VI. Aus $\frac{x}{m.r} = \log\frac{y}{r}$ kömmt $\frac{x}{m.r} \cdot \log e = \log\frac{y}{r}$ und $e^{\frac{x}{m.r}} = \frac{y}{r}$. Das giebt y wenn x angenommen ist.

VII. Nimmt man aber y an, so findet sich aus $\log\frac{y}{r}$ das zugehörige x.

VIII. Da kann man nun fragen was $\frac{x}{m.r}$ für einem Winkel am Mittelpuncte des Kreises gehört.

Dieser Winkel sey $=$ n Graden, so ist $\pi : \frac{x}{m.r} = 180 : n$; also $n = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{x}{m.r}$

IX. Will man briggische Logarithmen brauchen n zu berechnen, so ist $\log\frac{180^\circ}{\pi} = -\log 1^\circ = +1{,}7581226$ (Geom. 44 S. 7. Zus. IX.)

X. Exem-

X. Exempel. Es sey $m = 1$; $y = 10.\ r$ so ist (An. Un. 226) $\frac{x}{r} = 2{,}302585\ldots.$

Nun nehme ich

log brigg 2,3026 = 0,3622185

1,7581226

log n = 2,1203411

giebt den Winkel = 131°, 92

= 131° 55′, 20 = 131° 55′ 12″

XI. Exempel für (VI) m = 1 gesetzt.

Man setze der Bogen x messe einen Winkel von 50 Graden. So ist

log 1 = 0,2418774 — 2 (Geom. 44. S. 7. Zus.)

log 50 = 1,6989700

$\log \frac{x}{r} = 0{,}9408474 - 1$

gehört zu 0,87272; also $\frac{y}{r} = e^{0{,}87272} = \sqrt[100000]{e^{87272}}$

XII. Will man briggische Logarithmen brauchen, so hat man

$0{,}87272 \cdot \log \text{brigg } e = \log \text{brigg } \frac{y}{r}$

Nun ist aus 230; 231; 232; log brigg

$e = \frac{1}{\log \text{nat } 10}$

$= 0{,}4342948\ldots.$

Das

Das alſo müſſte man mit 0,87272 . . . . multipliciren.

XIII. Die Multiplication verrichte ich mit briggiſchen Logarithmen ſo:

log brigg 0,43429 = 0,6377798 — 1

$$\log \text{brigg } \frac{x}{r} = 0{,}9408474 - 1$$

$$\log \text{brigg des} \left(\log \text{brigg } \frac{y}{r} \right) = 0{,}5786272 - 1$$

$$\log \text{brigg } \frac{y}{r} = 0{,}37899$$

So iſt $\frac{y}{r} = 2{,}3933$

XIV. Unmittelbar wäre 0,87272 = log nat $\frac{y}{r}$ das zeigt an $\frac{y}{r}$ falle zwiſchen 2 und 3. Proportionaltheile gäben etwas genaueres.

XV. Man ſetze y = 0, 1. r So iſt (VI) x = — log nat 10 oder — x = log nat 10

— x = 2,302585509299 . . . Nun für r = 1

131° = 2,28638132011

0,01620377288

55′ = 0,01599885147

0,00020492141

42″ = 0,00020362174

0,00000129967

Alſo x = — 131° 55′ 42″

So

So gehört zu $y = 0,1.r$; ein Bogen rückwärts genommen $= 131° 56' 37''$

Berechnung des Bogens der zu $y = 0,0000001.r$ gehört.

XVI. log nat 1000000 = 2. log nat 1000

log nat 1000 = 6,907755278982

log nat 1000000 = 13,815551055796 4

Dieser Logarithme verneint ist $= \frac{x}{r}$. Also

$$-\frac{x}{r} = 13,815551035796 4$$

2. 360° =	12,566370614358
	1,249180441438
71° =	1,239183768915
	0,009996672523
34′ =	0,009890199094
	0,000106473429
22″ =	0,000106659009
	— 0,000000185580

So gehört zu diesem y, ein Bogen rückwärts 2 ganze Umkreise, und dazu 71° 34′ fast 22″

XVII. Die Ordinate aus dem Bogen nach (VI) zu berechnen, dient in Vega logarithmisch-trigonometrischen Tafeln (Leipzig 1797; 2. Quartbände) im II. B. die III. Tafel, 141 u. f. S. Potenzen der Grundzahl h = 2,718... des natürlichen logarithmischen Systems für alle Hundertheile von 0,01, bis 10,00 nebst den briggischen

schen Logarithmen eben dieser Potenzen; oder: Umgekehrte Tafel der natürlichen Logarithmen, welche für alle Hunderttheile der natürlichen Logarithmen, von 0,01 bis 10,00 die zugehörigen Zahlen nebst ihren gemeinen Logarithmen enthält. Hr. Vega nennt h, was ich e nenne; Seine Tafel giebt in meiner Bezeichnung, e^n für $n =$ jeder Menge von Hunderttheilen von 0,01 bis 10,00; auch den briggischen Logarithmen dieser Potenz von e.

XVIII. Wenn sich ein Punct der Spirale in CA befindet, so ist $\frac{x}{r}$ ein vielfaches von $2.\pi$, durch eine bejahte oder verneinte Zahl, nachdem der Punct auserhalb oder innerhalb des Kreises (II) liegt.

XIX. Man frage wo eine Spirale innerhalb des Kreises zum ersten mahle in CA kömmt, wenn für sie der Winkel $CMT = 60$ Grad.

So ist in VI; bey e der Exponent $= -\cot 60^\circ . 2.\pi$.

Es sind aber die briggischen Logarithmen von

$\cot 60^\circ = 9{,}7614394 - 10$

$2.\pi = 0{,}7981799$

$\cot 60^\circ . 2\pi = 0{,}5596193$

Dieser briggische Logarithme gehört zu 3,6276; auf eine Potenz dieses Exponenten, soll man e

erheben, und mit derſelben den Halbmeſſer dividiren, ſo giebt der Quotient wie weit der Punct wo die Spirallinie C A ſchneidet vom Mittelpuncte iſt. Vegas Tafel giebt die Potenzen von e deren Exponenten 3,62; und 3,63 ſind, auch jeder briggiſchen Logarithmen. Der erſten ihrer iſt = 1,5721460; von o abgezogen giebt er = 0,4278540 — 2 welches zu 0,026782 gehört. Eben ſo behandelt giebt der zweyten Potenz briggiſcher Logarithme 0,026516. So liegt der Einſchnitt der Spirale näher beym Mittelpuncte als um 0,026782; weiter vom Mittelpuncte als um 0,026516 des Halbmeſſers.

XX. Zur Berechnung, wie ſich die Spirale dem Mittelpuncte nähert wenn ſie innerhalb des Kreiſes zum zweyten, dritten mahle in C A kömmt, ſetze man wenn ſie zum erſten mahle hinein kömmt, heiſſe ihr Abſtand vom Mittelpunct = c (n) und c (n + 1) wenn ſie zum (n + 1)ten mahle hinein kömmt. So iſt (XVIII) r. $e^{-n.2.\pi:m} = c(n)$ und r. $e^{-(n+1).2.\pi:m} = c(n+1)$ alſo $\frac{c(n+1)}{c(n)} = e^{-2.\pi:m}$ Dieſe Abſtände werden alſo in einer geometriſchen Progreſſion kleiner.

XXI. Allgemein zeigt ſich geometriſche Progreſſion bey y, welche Vielfachen eines und deſſelben Bogens gehören (VI)

Man

Von der Krümmung.

Erkl. Zwo Tangenten einer krummen Linie bey M; N; 21; 22 F. schneiden einander in H. Wenn sich die Berührungspuncte M, N, einander unendlich nähern, so verwandelt sich der spitzige Winkel, den diese Tangenten mit einander machen MHD in den Krümmungswinkel an dieser Stelle.

§ 12. Zus. Man kann sich vorstellen, es sey der Winkel, den ein paar nächst auf einander folgende Elemente der krummen Linie mit einander machen (68).

§ 13. Zus. Weil die Puncte M; N; sich einander unendlich nähern, so kann man sie allemahl so nahe annehmen, daß zwischen sie in den Bogen MN kein Wendungspunct (112) fällt, wenn sie nicht selbst in einen Wendungspunct zusammen gehen.

§ 14. Zus. Wenn die Abscisse AP um das Stück Pp zunimmt, indem der Punct, welcher die krumme Linie beschreibt, aus M in N kömmt, so muß MHN ein stumpfer Winkel seyn, der zween rechten unendlich nahe kömmt. Denn in dem Dreyecke, MHN, nehmen die beyden andern Winkel NMH; MNH; unendlich ab (68). Der Bogen MN fällt also allemahl in den stumpfen Winkel der Tangenten, und der Krümmungs-

winkel MHD als die Summe zweyer unendlich abnehmenden Winkel wird unendlich klein.

515. Zuſ. Aber die krumme Linie kann auch eine ſolche Geſtalt haben, daß die Abſciſſe nicht beſtändig zunimmt, indem ein Punct in der krummen Linie aus M in N kömmt. Die 26 F. zeigt dieſes mit MEN; oder MeN; die Abſciſſe wird nähmlich wachſen, ſo lange der Punct aus M in E oder e geht, aber wieder abnehmen, wenn er aus E oder e nach N zu geht.

516. Erkl. Eine ſolche Stelle wie E oder e 26 F. heiſſt eine Spitze oder Rückkehrpunct (cuſpis ſ. punctum reflexus, *point de rebroussement*) weil daſelbſt die krumme Linie wieder nach der Gegend zugeht, wo ſie hergekommen iſt. Der Unterſchied zwiſchen E und e kömmt darauf an: MeE liegt unter ſeiner Tangente MH; aber NE über ſeiner NH; da ſind beyde Bogen gegen einander erhoben. (110) Ne liegt unter NH; iſt alſo gegen Me hohl, aber Me gegen ihn erhoben. Man kann dieſe Rückkehrpuncte E; e; von der erſten und zweyten Art nennen. Anendl. 474; iſt von der erſten Art.

Anm. Der Abt de Gua hatte wieder den Marquis de l'Hopital, geläugnet, daß es Rückkehrpuncte von der zweyten Art gebe, Euler aber hat den Streit für den Marquis entſchieden. Mem. de l'Ac. de Pruſſe 1749. p. 203.

517. Wenn (Alg. 474; III. Taf. 20. F.) die Abſciſſen auf AB genommen würden, ſo wüchſen

sie, indem der beschreibende Punct aus M in G geht, obgleich bey D ein Rückkehrpunct wäre. Das widerspricht aber der Erklärung nicht, denn für dieselbe ist genug, daß man Abscissen so annehmen kann, wie sie zum voraussetzt, und das liesse sich gleich bewerkstelligen, wenn man die Abscissen auf einer Linie nähme, die mit BD parallel ist.

§ 18. Aufg. Den Krümmungswinkel an einer Stelle, wo kein Rückkehrpunct ist, zu finden.

Aufl. I. Man setze erstlich der Bogen sey gegen die Abscisse AO 21 F. oder den Mittelpunct C. 22 F. hohl; das ist, der Bogen MN falle zwischen die Tangenten und die Abscisse oder den Mittelpunct (70) die Sehne MN falle zwischen die Abscisse oder den Mittelpunct; und H.

II. Für parallele Ordinaten (77) $THD = OTH - ODH$; Wenn aber die Abscissen von P nach p zu wachsen, und M; N; einander unendlich nahe rücken, so ist $OTH - ODH$ dem Differentiale des Winkels entgegengesetzt, den die Tangente mit der Abscisse macht. Denn dieses Differential wäre OTM als sein erster Zustand, von den zweyten ODN abgezogen.

(13). Nun ist tang $MTO = \frac{MP}{PT} = \frac{dy}{dx}$ (77) also nach 299 das Differential von $MTP; =$

$\frac{dx.\,ddy - dy.\,ddx}{dx^2.(1 + dy^2 : dx^2)}$ also (267)

$THD = \frac{dy.\,ddx - dx.\,ddy}{ds^2} = -\frac{dp}{1+pp}$

wenn $p = \frac{dy}{dx}$.

Da $ds.\,dds = dy.\,ddy + dx.\,ddx$ so setze man ds unveränderlich; das giebt $ddy = -\frac{dx.\,ddx}{dy}$ und $ddx = -\frac{dy.\,ddy}{dx}$; daraus wenn sich die Länge der krummen Linie immer gleichviel ändert $THD = +\frac{ddx}{dy} = -\frac{ddy}{dx}$

III. Für Ordinaten aus einem Puncte (104) wo $CP = r$; $CM = u$; $MHN = 4R - CMH - CNH - MCN$ (G. 13 G. 6. 3.) aber $CMH = 2R - CMT$; $CNH = CND$; folglich $MHN = 4R - 2R + CMT - CND - MCN$; und $2R - MHN$ oder $THD = CND - CMT + MCN$; Wenn sich nun die Puncte N; M; einander unendlich nähern, so verwandelt sich $CND - CMT$ in $dCMT$; und MCN in $\frac{dx}{r}$; Es ist aber alsdenn $tang\,CMT = \frac{CT}{u} = \frac{u\,dx}{r\,du} = \frac{u}{rp}$ wenn $du = p\,dx$; also $THD =$ (104)

r.(p

$\frac{r.(pdu - udp)}{r^2 p^2 + u^2} + \frac{dx}{r}$; wo $dp = \frac{dxddu - duddx}{dx^2}$

Man kann hier welches Differential man will, unveränderlich setzen.

Sollte der Winkel $MCN = \frac{dx}{r}$ unveränderlich seyn, so wäre $ddx = 0$; $dp = \frac{ddu}{dx}$ und $\frac{du}{dx}$ statt p gesetzt, kömmt der Krümmungswinkel

$THD = \frac{(r^2.(2du^2 - uddu) + u^2 dx^2)dx}{r.(r^2 du^2 + u^2 dx^2)}$

III. Hier sey $PM = y$; also $CM = r + y$ so ist $dy = du$; $ddy = ddu$; $p = dy : dx$ u. s. w. und $THD = \frac{rpdy - r.(r+y)dp}{r^2 p^2 + (r+y)^2} + \frac{dx}{r}$. Wächst hier r unendlich, so verwandelt sich der Kreisbogen AP; in die Abscissenlinie 21 F. (S. 20. S. 20. Z.) auf welche die Ordinaten MP senkrecht stehen (96) daß also MCN oder $\frac{dx}{r}$ wegfällt, und es wird nach (9) $THD = -\frac{dp}{pp+1}$ (wie in II.)

V. Der Krümmungswinkel ist hier allein dTMC; obgleich derselbe an sich (S. 6 Erkl.) unendlich klein ist, so verschwindet doch in Vergleichung mit ihm der unendlich kleinere $\frac{dx}{r}$ welcher herauskömmt, wenn man was unendlich kleines mit was unendlich grossem dividirt, und also ein Unendlichkleines der zweyten Ordnung ist (u)

VI. Einen erhabenen Bogen (I) stellt die 23 F. vor. Das Viereck CMHN hat in derselben bey H einen Winkel, der auf der Seite, nach welcher C zu liegt, wo nähmlich der kleine Kreisbogen um ihn gezogen ist, gemessen, über 2R beträgt (69). Wenn man diesen Winkel unter MHN versteht, so ist wie in III. noch MHN = 4R — CMH — CNH — MCN = 2R + CMT — CND — MCN aber alsdenn ist nicht THD = 2R — MHN sondern = 2R — (4R — MHN) = MHN — 2R = CMT — CND — MCN welcher Ausdruck dem vorigen II entgegengesetzt ist. Also wird THD = $\frac{rudp - rpdu}{rrpp + uu} = \frac{dx}{r}$; der Ausdruck für parallele Ordinaten folgt hieraus (IIII).

VII. So findet man also, wie weit die Lage der Tangente an M, von der Lage der Tangente an N unterschieden ist, welches ohne Zweifel anzeigt, um wieviel der Weg eines Punctes, der

den

den Bogen MN beſchreibt, in N von ſeinem Wege in N unterſchieden iſt, d. i. wie viel ſich dieſer Weg gekrümmt hat. (G. 6. Erkl.) weil ſich aber dieſer Krümmungswinkel ſelbſt nicht angeben läſſt, wenn M; N; ſich einander unendlich nähern, ſo beſteht die Kenntniß, die uns Gegenwärtiges von der Krümmung giebt, darinnen, daß wir auf dieſe Art die Krümmungen an zwo Stellen einer krummen Linie, oder zwoer verſchiedenen krummen Linien mit einander vergleichen können, die Verhältniß dieſer Krümmungen nähmlich wird ſich durch endliche Gröſſen ausdrucken laſſen, wenn man in dem Ausdrucke des Krümmungswinkels alle Differentiale durch ein einziges ausdruckt, und dieſes Differential in den beyden Werthen, welche der Ausdruck des Krümmungswinkels für die erwähnten beyden Stellen bekömmt, einerley ſetzt, daß man damit dividiren kann.

VIII. Will man alſo, wie natürlich iſt, zweene gleichlange Bogen der krummen Linie mit einander vergleichen, und ſehen, wie vielmahl einer krümmer als der andere iſt, ſo muß man für dieſes Differential dz annehmen. Es iſt aber (aus §92; und §18; III.) $ds = \frac{dx\sqrt{(rrpp+uu)}}{r}$

alſo $\frac{dx}{r} = \frac{ds}{\sqrt{(rrpp+uu)}}$ und pdx oder

$du = \frac{prds}{\sqrt{(rrpp + uu)}}$. Weil ferner p allemahl durch x; y; gegeben seyn muß, ohne daß sich dy; dx; darinnen befinden, denn sonst bestimmte es die Verhältniß dy: dx nicht, so ist dp allemahl durch die ersten Differentiale der Coordinaten gegeben, ohne daß man höhere nöthig hat, und läßt sich also allemahl durch ds ausdrucken, daher THD sich allemahl durch ds ausdrucken läßt.

VIII. Für parallele Ordinaten ist (266)

$dx = \frac{ds}{\sqrt{(1 + pp)}}$; $dy = \frac{pds}{\sqrt{(1 + pp)}}$.

519. Die Tangenten bey M; N; (518) bleiben allezeit noch verschieden, so nahe auch diese Puncte einander rücken. Daher wird ihr Winkel, wenn er sich in den Krümmungswinkel verwandelt, auch ein unendlich kleines der ersten Ordnung; die Lagen der Tangenten kommen nähmlich einander näher, als die Lagen zwoer Linien, deren Unterschied sich angeben läßt, einander kommen können. Aber in dem Rückkehrpuncte 26 F. müssen die beyden Bogen völlig einerley Tangente haben, weil dieser Punct beyden Bogen gemein und ein einziger Punct ist. Wie nähmlich 25 F. E der Punct ist, wo der Bogen MNE aufhört, und der Bogen E$\mu\nu$ anfängt, und wie es an dieser gemeinschaftlichen Gränze beyder Bogen, nur eine einzige Tangente giebt,

so

so giebt es auch nur eine bey deren Rückkehrpuncte E oder e 26 F. als der gemeinschaftlichen Gränze der Bogen ME; EN; oder Me; eN; Stellt man sich also an den beyden Bogen ME; NE; die Tangenten MH; NH; vor, und läßt M; N; in E oder e zusammenrücken, so muß ihr Winkel MHN nicht nur ein Unendlichkleines von der Art des Krümmungswinkels (518) sondern in Vergleichung mit diesem selbst unendlich klein, oder = o werden. Giebt es an einem Puncte zwo oder mehr verschiedene Tangenten, so gehören die Bogen daselbst zu verschiedenen Schenkeln, wie bey C Alg. III. Taf. 22. F. S. Alg. (493.)

520. Aufg. Den Rückkehrpunct zu finden.

Aufl. I. Man suche einen Ausdruck für den Winkel MHN unter der Voraussetzung, daß sich M; N; beyde dem gesuchten Rückkehrpuncte E unendlich nähern, und setze diesen Ausdruck = o (519).

II. Es ist nähmlich NHM = NMT — MNH; NMT = CMN — CMT; CMN = 2R — CNM — MCN; ferner MNH = CNH — CNM; also NHM = 2R — MCN — CMT — CNH = CND — CMT — MCM; Weil nun ein Punct, der die krumme Linie beschreibt, auf dem Wege MEN oder MeN aus M in N kommen kann, so lassen sich CM; CN; für zwo nach einander folgende Ordinaten, und MT; ND; für zwo nach einander folgende Tangenten,

genten, und CND; CMT; für zweene nach einander folgende Winkel der Ordinaten mit den Tangenten annehmen. Daher, wenn sich die Puncte M; N; beyde dem Puncte E; und folglich einander selbst unendlich nähern; so wird CND — CMT = dCMT; und MCN = $\frac{dx}{r}$; also kömmt $MHN = \frac{r.(pdu - udp)}{rrpp + uu}$ $\rightarrow \frac{dx}{r}$ (518; III) welches = o gesetzt (519) rr. (pdu — udp) = (rrpp + uu) dx giebt, wo wegen der gegebenen Gleichung der krummen Linie; du und dp sich durch dx ausdrucken lassen, daß man also mit dx dividiren kann, und eine Gleichung zwischen lauter endlichen Grössen, wo alles veränderliche durch x oder u gegeben ist, erhält. Diese Gleichung, mit der für die krumme Linie, welche auch nur x und u enthält, nach (Alg. 199) verglichen, giebt eine bestimmte Gleichung für das x, oder das u das zum Rückkehrpuncte gehört.

III. Für parallele Ordinaten wird $MHN = -\frac{dp}{1+pp}$ wie in 518; IIII; weil die ersten Theile der Ausdruckungen für MHN (II) und THD (518); III) einerley sind, also kann man für den Rückkehrpunct dp = o das ist eigentlich $\frac{dp}{dx} = o$ setzen (519).

IIII.

IIII. Die Bedingung (519) daß MHN in Vergleichung mit andern Krümmungswinkeln verschwinden soll, läßt sich hier auch erhalten, wenn nicht $dp = o$ aber $p = \infty$ ist; welches also auch den Rückkehrpunct zu finden kann gebraucht werden.

V. In II giebt die Voraussetzung $p = \infty$ dieses nicht, weil da noch der Theil $-\frac{dx}{r}$ des Winkels MNH bleibt.

VI. Aus 519. folgt nur soviel, daß diese Voraussetzungen beym Rückkehrpuncte statt haben, aber nicht, daß sie an keiner andern Stelle einer krummen Linie statt haben: Also darf man aus ihnen nicht allemahl sicher auf einen Rückkehrpunct schliessen. Wenn man aber durch sie nach (II) eine gewisse Abscisse bestimmt hat, so darf man nur den Gang der krummen Linie nach (Alg. 329) ein wenig untersuchen, um zu sehen, ob diese Abscisse einem Rückkehrpuncte zugehört.

521. Aufg. Zu entscheiden, ob die krumme Linie gegen die Axe 21 F. oder den Mittelpunct 23 F. hohl oder erhaben ist.

Aufl. I. Weil THD in beyden Fällen 518; III; VI; herauskömmt, wenn man das kleinere von dem gröſſern abzieht, so ist er beydemahl bejaht; Sein Ausdruck aber in 518; VI; ist dem in 518 III; entgegengesetzt. Jeder Ausdruck giebt also für seinen Fall etwas bejahtes, und für

den

den entgegengesetzten etwas verneintes. Wenn man also überhaupt für den Ausdruck des Krümmungswinkels den aus §18; III; annimmt, so ist die krumme Linie gegen C hohl oder erhaben, nachdem dieser Ausdruck einen bejahten oder verneinten Werth giebt.

II. Bey parallelen Ordinaten 21 F. ist MN gegen die Axe AP hohl, oder erhaben, nachdem $-dp:(1+pp)$ bejaht oder verneint, (§18. IIII) das ist, nachdem dp verneint oder bejaht ist. Aber gegen die Axe αΠ wird eben die krumme Linie erhaben seyn. Sind nun die Ordinaten PM; pN; bejaht, so sind ΠM; πN verneint, weil der Bogen MN unter αΠ liegt, wenn er über AP liegt; indem also die Abscisse αΠ eben wie AP zunimmt, so nimmt die verneinte Ordinate ΠM ab; das ist, p ist für ΠM bejaht (23) wie für PM; und dp als das Differential von $\frac{NS}{MS}$ bleibt auch einerley für AP und für αΠ. Also ist die krumme Linie gegen die Axe αΠ erhaben oder hohl, nachdem dp verneint oder bejaht ist. Hiebey nimmt man dx als bejaht an, weil man AP als die erste Abscisse, und AP' als die zweyte ansieht, oder bejahte Abscissen wachsen lässt. Wäre dx verneint, so müsste p für einerley dy mit dem, was dem bejahten dx zugehörte, einen entgegengesetzten Werth bekommen, und eben so dp. Man kann sich aber

die

die Mühe dieſe Mannichfaltigkeiten zu unterſcheiden erſparen. Denn wenn man die Frage der Aufgabe für verneinte x beantworten ſoll, darf man ſich nur vorſtellen, daß ſie abnehmen, oder das gröſſte verneinte als das erſte, und das kleinere als das zweyte anſehen, ſo bekömmt man allemahl bejahte dx. Iſt alſo für bejahte dx.

die Ordinate, und dp ſo iſt die krumme Linie gegen die Axe

bejaht	verneint	hohl
	bejaht	erhaben
verneint	verneint	erhaben
	bejaht	hohl

oder die krumme Linie iſt gegen die Axe hohl, oder erhaben, nachdem Ordinate und dp, entgegengeſetzte, oder nicht entgegengeſetzte Gröſſen ſind,

oder nachdem $\frac{dp}{y}$ verneint oder bejaht iſt.

§22. Wenn dx unveränderlich iſt, wie man hier ohngeachtet §18 VIII annehmen darf, weil die Abſicht nicht iſt, zweene Krümmungswinkel zu vergleichen, ſo iſt in §21 II; bey bejahten Ordinaten — ddy für die hohle krumme Linie bejaht, für die erhabene verneint; folglich ddy für jene verneint, für dieſe bejaht, das iſt, bey der hohlen krummen Linie 21 F. nehmen für zunehmende Abſciſſen, der Ordinaten Differentiale ab, wenn die Ordinaten ſelbſt zunehmen, oder zu,

wenn

wenn die Ordinaten abnehmen (23). Für die erhabene findet das Gegentheil statt.

523. Anm. CT 19 F. sey der krummen Linie DMF Asymptote; die Weiten von der Asymptote MQ, ER, FT als Ordinaten betrachtet, müssen unendlich abnehmen; Sie können aber für gleiche Zunahmen der Abscisse QR = RT nicht gleich viel abnehmen, oder es kann nicht MQ − ER = ER − BT seyn, sonst müsste, wenn dieses beständig fortdauerte, die Ordinate MQ in einer endlichen Entfernung von Q, die sich durch ein Vielfaches der Grösse QR ausdrucken liesse, bis auf Nichts abgenommen haben, oder gar verneint geworden seyn: Noch weniger dürfen die folgenden Ordinaten stärker abnehmen als die vorhergehenden, so daß ER − FT > MQ − ER wäre: Also bleibt nur das übrig, daß die folgenden Ordinaten weniger als die vorhergehenden abnehmen, oder MQ − ER > ER − FT; das heisst; wenn die Puncte M; E; F; sich einander unendlich nähern; dx ist beständig und die Differentiale abnehmender Ordinaten nehmen selbst auch ab. Folglich ist nach (516) jede krumme Linie, die eine Asymptote hat, gegen die Asymptote erhaben; wie schon (110) aus andern Gründen dargethan worden.

Exempel bey parallelen Ordinaten.

524. Für die Kegelschnitte (Alg. 362; 389) ist $p = \frac{b.(a \mp 2x)}{2ay}$ (85) folglich

$dp = \frac{b}{2a}.\left(\frac{\mp 2ydx - (a \mp 2x).dy}{y^2}\right)$; oder weil $dy = \frac{b.(a \mp 2bx)}{2ya}dx$; $dp = \frac{b}{2a}$

[$\mp 2y$

$$\left\{\mp 2y - (a \mp 2x).\frac{b.(a \mp 2bx)}{2ay}\right\}.\frac{dx}{y^2} =$$

$$= \frac{bdx}{4a^2y^3}.(\mp 4ay^2 - (a \mp 2x).(ab \mp 2bx);$$

wo $-(a \mp 2x) = \pm 2x - a$ aber

$$\mp 4ay^2 = \mp 4a.bx \mp 4a.\mp\frac{bxx}{a}$$

$$= \mp 4abx + 4bxx$$

dazu $\mp 2abx - 4bxx - aab$

$\mp 2abx$

also $dp = -\frac{bbdx}{4y^3} = -\frac{bb}{4y^3}.\frac{ds}{\sqrt{(1+pp)}}$

also der Krümmungswinkel (§18 IIII) $= \frac{+bbds}{4y^3.(1+pp)^{3:2}}$

§25. Der Kreis ist eine Ellipse, wo $b = a$;

also $p = \frac{a-2x}{2y}$ und $1 + pp =$

$$\frac{4yy + aa - 4ax + 4xx}{4yy} = \frac{aa}{4yy}$$

also der Krümmungswinkel $= aads : 4y^3$.

$\frac{a^3}{8y^3} = \frac{2ds}{a} = \frac{ds}{\frac{1}{2}a}$ = dem Winkel am Mittelpuncte, dessen Maas der Bogen von der Länge ds ist, (G. 44 S. 11. B.) wie in (96).

§26. Die Normallinie jeder krummen Linie MO 1. F. heisse w so ist $w = y\sqrt{(1 + pp)}$ (92) also der Krümmungswinkel jedes Kegelschnittes $= \frac{bbds}{4w^3}$.

Bey der Parabel ist $w = \frac{\sqrt{(4yy + bb)}}{2}$ also ihr Krümmungswinkel $\frac{2bbds}{(4bx + bb)^{3:2}}$ Für die Abscissen $\frac{1}{4}$ b; und b; sind die Krümmungswinkel $\frac{2bbds}{2\sqrt{2}.b^3}$ und $\frac{2bbds}{5\sqrt{5}.b^3}$ also verhalten sich die Krümmungen wie $5\sqrt{5} : 2\sqrt{2} = \sqrt{125} : \sqrt{8} =$ ohngefähr $\sqrt{15}, 62 : 1 = 3, 9 : 1$ oder die Krümmung über dem Brennpuncte ist ohngefähr 4 mahl gröſſer als über dem Ende der viermahl gröſſern Abscisse. Am Scheitel ist der Krümmungswinkel $\frac{2ds}{b}$ und verhält sich zu dem über dem Brennpuncte wie $2\sqrt{2} : 1 = \sqrt{8} : 1 = 2, 8 : 1$. Der Krümmungswinkel für jedes endliche x verhält sich zum Krümmungswinkel bey einer unendlichen Abscisse $=$

$$\frac{1}{(b.(4x + b))^{3:2}} :$$

$$\frac{1}{(b.\infty\infty)^{3:2}} = 8.\infty^{3:2} : (4x + b)^{3:2}$$

oder

oder die Krümmung der Parabel nimmt unendlich ab, indem die Abscisse unendlich zunimmt; der Krümmungswinkel nimmt nähmlich beständig ab, indem die Abscisse wächst, und gleiche Bogen der Parabel, sind desto weniger krumm, je weiter sie vom Scheitel liegen; daher wird der Schenkel der Parabel immer weniger und weniger krumm, je weiter er sich hinaus erstreckt.

§25. Bey jedem Kegelschnitte ist $\frac{dp}{y} = -\frac{bb\,dx}{4y^4}$ allemahl für bejahte dx verneint, oder der Kegelschnitt allemahl gegen die Axe hohl (§21. II.)

§26. Bey der neilischen Parabel (268) ist

$$p = \frac{2a^{\frac{1}{2}}}{3}\, y^{-\frac{1}{2}};\quad dp = -\frac{a^{\frac{1}{2}}}{3}.\, y^{-\frac{3}{2}}\, dy =$$

$$-\frac{p\sqrt{a}}{3\sqrt{(y^3.(1+pp))}}.\, ds;\quad \text{also} -\frac{dp}{1+pp}$$

$$= \frac{+p\sqrt{a}.\,ds}{3\,(y.(1+pp))^{\frac{1}{2}}} = \frac{6\sqrt{a}.\,ds}{\sqrt{(y.(9y+4a)^3)}}$$

$$= \frac{6a^{\frac{1}{3}}\,ds}{x^{\frac{1}{3}}.[4a^{\frac{2}{3}}+9x^{\frac{2}{3}}]^{\frac{3}{2}}}$$

§27. $p = \frac{2ax}{3yy} = \frac{2axx}{3yyx} = \frac{2y}{3x}$;

also $dp = \frac{2}{3} \cdot \frac{xdy - xdy}{xx} = \frac{2}{-3xx}$.

$\left(\frac{2y}{3} = y\right) dx = -\frac{2ydx}{9xx}$; also

$\frac{dp}{y} = -\frac{2dx}{9xx}$ und die krumme Linie beständig gegen die Axe hohl (§21. II.) Wenn man p und dp aus §26 brauchen wollte, so würden die zweydeutigen Wurzelgrössen Ungewißheiten verursachen, die man wenigstens mit mehr Mühe entscheiden müsste, daher ich sie hier zu vermeiden gesucht habe.

§28. Weil $\frac{y}{x} = \sqrt[3]{\frac{a}{x}}$; so wird $\frac{y}{x}$ unendlich, wenn x unendlich abnimmt, alsdenn aber scheinet der Krümmungswinkel unendlich groß zu werden. Man muß aber bedenken, daß ds und x unendlichklein vom ersten Grade und $\sqrt[3]{x}$ vom Grade $\frac{1}{3}$ sind, folglich der Krümmungswinkel ein Unendlichkleines vom Grade $\frac{2}{3}$ wird. Es sey $ds = \frac{m}{\infty}$; $x = \frac{n}{\infty}$ so ist der Krümmungswinkel

$6\sqrt[3]{a} \cdot \frac{m}{\infty} : \frac{\sqrt[3]{n}}{\infty^{1:3}} \cdot 8a =$

$\frac{1}{4} \cdot m$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{m}{\sqrt[3]{a\,a\,n.\,\infty^{2:3}}}$

529. Wo sich ein solcher Krümmungswinkel wie 528 findet, da sagt man, die Krümmung sey unendlich groß. Der Krümmungswinkel ist in Vergleichung mit andern Krümmungswinkeln unendlich groß, und doch in Vergleichung mit endlichen Winkeln unendlich klein, wie das Gesetz der Stetigkeit (G. 6. Erkl.) erfodert. Dieses kann beysammen bestehen, wenn er ein Unendlichkleines einer niedrigern Ordnung als der ersten ist (11).

Exempel zu 518. bey Ordinaten aus einem Puncte.

530. Bey der archimedischen Spirallinie sey die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise $= 1 : \pi$ und in (Alg. 580.) $y = u$; so ist ihre Gleichung $u = \frac{x}{2\pi}$ also in 518; III. $p = \frac{1}{2\pi}$; $dp = 0$; und $THD = \frac{2r\pi du}{rr + xx} + \frac{dx}{r}$

$= \frac{2rr + xx}{r.(rr + xx)} \cdot dx = \frac{(2rr + xx).\,2\pi ds}{(rr + x2)^{3:2}}$

(518; VIII.)

Also verhalten sich die Krümmungen für $x = o$ und $x = 2r\pi$ oder beym Anfange der Spirale

und am Ende ihrer erſten Umwindung, wie $\frac{2rr}{r3}$:

$$\frac{2rr + 4rr\pi\pi}{(rr + 4\pi\pi)^{3:2}} = (1 + 4\pi\pi)^{3:2}:$$
$$(1 + 2\pi\pi)$$

§31. Bey der paraboliſchen Spirale (107) iſt $r - u = \sqrt{ax}$; alſo $p = -\frac{1}{2}a^{1:2}.x^{-\frac{1}{2}}$; $dp = \frac{+\sqrt{a}}{x\sqrt{x}}dx$. Wenn man alles durch u ausdruckt, weil ſich die Linie u mit den Linien r; a; leichter vergleichen läſſt als der Bogen x, ſo findet man den Krümmungswinkel

$$\left(\frac{r^2\,a.(r-2u)}{(r-u).(rraa+4uu.(r-u)^2)} + 1\right).\frac{dx}{r}$$

wo man ſtatt $\frac{dx}{r}$ ſeinen Werth

$$\frac{2\,ds.(r-u)}{\sqrt{(rraa+4(r-u)^2.uu)}}$$

ſetzen kann. Soll hier der Krümmungswinkel, bey einem bejahten dx bejaht oder die krumme Linie gegen C hohl ſeyn, ſo iſt (571) für $r > u$; $rraa.(r-2u) + (r-u).(rraa + 4uu(r-u)^2)$ bejaht, oder wenn $r = 1$ geſetzt wird $u^5 - 3u^4 + 3u^3 - uu + \frac{3}{4}aau - \frac{1}{2}aa > 0$.

Von

Von dem Wendungspuncte. (112)

§32. Aufg. **Den Wendungspunct einer krummen Linie zu finden.**

Aufl. I. Wenn MN 25 F. hohl, und $\mu\nu$ erhaben ist, so liegt der Durchschnitt der Tangenten, H, über der Sehne MN; und η unter $\mu\nu$. Wenn also die Berührungspuncte an dem hohlen Theile M; N; dem erhabenen immer näher und näher rücken, und der Durchschnitt H also nach und nach fortrücken soll, bis er auf die andere Seite der Sehne fällt, so muß er entweder von der Sehne sich immer weiter und bis in das Unendliche entfernen, oder ihr immer näher und näher kommen. (G. 12 S. 12 Z.) In jenem Falle würde der Winkel MHN immer weniger und weniger stumpf und nähme bis auf nichts ab, also wüchse sein Nebenwinkel MHD bis auf 2R. Dieses läßt das Gesetz der stetigen Krümmung nicht zu (G. 6. Erkl.) und also findet der zweyte Fall allein statt. Da nimmt nun der Winkel MHD immer mehr und mehr ab, und wie er allezeit als ein Krümmungswinkel, in Vergleichung mit andern endlichen Winkeln verschwindet, so muß dieser Krümmungswinkel hier so weit abnehmen, daß er in Vergleichung mit andern Krümmungswinkeln verschwindet. Also muß (nach §18; III) für die Stelle des Wendungspunctes, $rr\,(pdu - udp) + rr.(pp + uu).dx = 0$ seyn. Beynahe wie (§20. II.)

II. Für parallele Ordinaten (§ 18. IIII.) ist entweder $\frac{dp}{dx} = 0$ oder $p = \infty$; wie (§ 20; III; IIII.)

III. Also giebt einerley Verfahren Wendungspuncte, oder Rückkehrpuncte, weil die Voraussetzung zwar allemahl bey einem Wendungspuncte, aber nicht allein bey ihm statt findet, wie § 20 VI; wo man auch sieht, was man zu Entscheidung dieser Zweydeutigkeit zu thun hat. Denn wenn die Stelle kein Rückkehrpunct ist, so ist sie eine Wendung, zuweilen auch beydes zugleich wie E 26 F.

Exempel für parallele Ordinaten.

§ 33. Bey den paraboliſchen Linien (163) ist $\frac{dp}{dx} = m.(m-1)x^{m-2} + (m-1).(m-2)px^{m-3} + (m-2).(m-3)qx^{m-4} \ldots + 2f = x$. Also hat eine solche Linie vom Grade m; m — 2 Beugungspuncte, die durch die Auflösung dieser Gleichung gefunden werden.

Wenn $m = 3$ so ist $6x + 2p = 0$ oder der Beugungspunct befindet sich bey der Abscisse $-\frac{1}{3}p$.

§ 34. Bey der krummen Linie Alg. 474; wird $p = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a^2}{a-x}}$; welches $= \infty$ für $x = a$ wird. Für den daſigen Rückkehrpunct (§ 20. II.)

§ 35. I.

535. I. Es sey $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^3}$ (Eul. Introd. L. II. §. 333.). Hier kann man $\sqrt{x}$ nicht mit dem Zeichen — nehmen, sonst würde der andere Theil des Werthes von y; welcher $= \sqrt{(x\sqrt{x})}$ ist, unmöglich. Also findet die Zweydeutigkeit der Zeichen nur vor der Wurzelgröſſe, die diesen andern Theil ausmacht, statt, und weil x nicht verneint werden kann ohne die Wurzelgröſſen unmöglich zu machen, auch die Biquadratwurzel aus x^3 nur zweene mögliche Werthe hat; so gehören jedem x nur zwey y zu, deren Unterschied auf die Zweydeutigkeit der Zeichen vor der Biquadratwurzel ankömmt.

II. Man setze $\sqrt[4]{x} = u$ und $x = u$ auch $du = \frac{dx}{4x^{3:4}} = \frac{dx}{4u^3}$ so ist $y = u^2 \pm u^3$ und $dy = (2 \pm 3u).udu$ also $\frac{dy}{dx}$ oder $p = \frac{1}{2uu} + \frac{3}{4u}$; und $dp = -\frac{du}{u^2}\cdot\left(\frac{1}{u} + \frac{3}{4}\right)$ oder $\frac{dp}{dx} = -\frac{(4 \pm 3u)}{16u^6}$

III; Jedes u giebt nur ein x; Man kann also zuerst die u nach Gefallen annehmen, so giebt sich für jedes u das zugehörige x; und das diesem zugehörige y.

IIII; Weil in dem Werthe von y (II) nur der Würfel von u sein Zeichen ändert, wenn u verneint wird, so findet man die beyden Werthe, welche y für jedes u oder x bekömmt, aus der Gleichung für y (II) durch den Gebrauch des doppelten Zeichens, so daß man u allemahl als bejaht annimmt.

V. Ich will das erste y nennen, das $= uu(1+u)$ und das zweyte, das $= uu(1-u)$ ist. Dergleichen sollen CE; CD; 27 F. seyn. So ist für

u	$= 0$;	$\frac{2}{3}$;	1;	$\frac{4}{3}$;	2;
x	$= 0$;	$\frac{16}{81}$;	1;	$2\frac{56}{81}$;	16;
erstes y	$= 0$;	$\frac{20}{27}$;	2;	$\frac{112}{27}$;	12;
zweytes y	$= 0$;	$\frac{4}{27}$;	0;	$-\frac{10}{27}$;	-4;

VI. Das erste y wächst mit u oder x ohne Ende. Das zweyte muß für einen Werth von u, der zwischen 0 und 1 fällt, ein grösstes werden. Es ist nähmlich für die Reihe der zweyten y; die Grösse $p = \frac{1}{2u} \cdot \left(\frac{1}{u} - \frac{3}{2}\right)$ also nach (155) $p = 0$ wenn $u = \frac{2}{3} = AC$ 27 F.

VII. Für $u < 1$ oder $x < 1$ sind beyde Ordinaten bejaht. Für $x > 1$ bleibt es die erste, aber die zweyte wird verneint, und diese verneinten Ordinaten wachsen mit u, oder x; ohne Ende.

VIII. Für die erste Ordinate ist $\frac{dp}{dx}$ $= -\frac{(4+3u)}{16u6}$ allemahl verneint; und y bejaht;

jaht; also der Schenkel AEF den sie giebt, gegen die Axe beständig hohl (521. II;) Für die andere ist $\frac{dp}{dx} = -\frac{(4-3u)}{16u^6}$ verneint, so lange $u < \frac{4}{3}$ oder $x < \frac{256}{81}$ ist, für grössere u und x aber bejaht; aber die Ordinate CD für jede Abscisse von o bis AB = 1 bejaht, und also der Schenkel, den sie giebt; zwischen dieser beyden Abscissen Gränzen A und C hohl; ferner die Ordinate von der Abscisse = 1 ohne Ende fort verneint, wie GH und weil von dieser Abscisse an bis an $\frac{256}{81}$ noch dp verneint ist, so ist der Theil BH dieses Schenkels, der sich mit der Abscisse 1 oder bey B anfängt, und bis an die $\frac{256}{81}$ = AG geht, erhoben: Weil aber von da dp bejaht wird, da die Ordinate verneint bleibt, so ist alles Folgende dieses Schenkels HK hohl, also in K ein Wendungspunct, wo $\frac{dp}{dx} = o$ (532)

VIIII. Diese krumme Linie FEADBHK hat bey A einen Rückkehrpunct ohne Wendungspunct eine Spitze von der zweyten Art (516). 27 F.

Exempel für Ordinaten aus einem Puncte.

536. In der paraboliſchen Spirallinie (531) ist der Wendungspunct da, wo die Gröſſe = o wird, die an dem Ende von 531; > o gesetzt wurde.

wurde. Wenn man mit Jacob Bernoulli am (90) angef. O. den Umfang des Kreises oder $2r\pi = \frac{rr}{a}$ setzt, damit für $x = 2r\pi$; die Ordinate $= o$ wird, so ist $a = \frac{1}{2}$ r. $\frac{1}{\pi}$ wo man für $r = 1$; aus (G. 44 S. 53.) $a = 0,159154943..$ und $aa = 0,025332...$ also $u^5 - 3u^4 + 3u^3 - u^2 + 0,01899u - 0,01266 = o$ bekommt. Setzt man in (531) $r = 1$; $u = 1 - y$; und was herauskömmt $= o$; so bekömmt man $y^5 - 2y^4 + y^3 + \frac{3}{4}a^2 y - \frac{1}{4}a^2$, wenn nun hier $y = \frac{1}{6}$ so sind die drey ersten Glieder dieses Ausdruckes $\frac{25}{6^5} = 0,00322...$ Die beyden letzten $\frac{1}{4}aa. - \frac{1}{2}$ welches sich für $a = \frac{r}{2\pi}$ in $-$ $0,00316...$ verwandelt. Alle fünf Glieder zusammen geben also $+ 0,00006$ und da dieses etwas sehr geringes ist, so ist (nach Alg. 319) für den Wendungspunct beynahe $u = \frac{1}{6}$; folglich der Bogen AP 22 F. oder $x = \frac{(r-u)^2}{a}$ beynahe $= \frac{1}{36} : \frac{1}{2\pi} = \frac{2\pi}{36}$ und weil 2π der ganze Umfang ist, so ist ACM $= 10$ Gr.

537. Aufg.

537. Aufg. Bey parallelen Ordinaten zu finden, unter was für Umständen ein Wendungspunct vorhanden ist, wenn $dy = o$.

Aufl. Man setze dx unveränderlich, und $= 1$ (419) so ist der Wendungspunct der Hauptlinie, (127) bey der Abscisse, bey welcher $dp = o$ (532) also die Ordinate p der ersten Differentiallinie ein Grösstes oder Kleinstes wird (155). Wird nun allemahl $dy = o$ angenommen, und es ist $ddy = o$; so findet dieses statt, und der Hauptlinie Ordinate ist kein Grösstes oder Kleinstes, (155; III) aber es giebt einen Wendungspunct.

Ist auch $d^3 y = o$; aber nicht $d^4 y$ so ist der ersten Differentiallinie Ordinate kein Grösstes oder Kleinstes (155. V.) also hat die Hauptlinie keinen Wendungspunct; aber ein Grösstes oder Kleinstes (155; VIII.)

Ist auch $d^4 y = o$ aber nicht $d^5 y$ so hat die erste Differentiallinie ein Grösstes oder Kleinstes (155; VIII.) also die Hauptlinie einen Wendungspunct, aber kein Grösstes oder Kleinstes.

So erhellt überhaupt, daß für $dy = o$; die Hauptlinie entweder einen Wendungspunct, oder ein Grösstes hat, nachdem die Anzahl der nächst folgenden höhern Differentiale von y die für eben die Abscisse verschwinden, 1; 3; ... ungerade, oder o; 2... gerade ist. Mac Laurin Treat on Flux. Book I. art. 261. wo man auch gleich darauf Betrachtungen über die Spitzen (516) antrifft.

Vom

Vom Krümmungskreise.

538. Erkl. NV = MN 28 F. sind Sehnen einer krummen Linie, und K ist der Mittelpunct eines Kreises durch M; N; V; Wenn sich V; M dem Puncte N unendlich nähern, so heisst dieser Kreis der Krümmungskreis (circulus curuaturae s. osculator;) und sein Halbmesser der Halbmesser der Krümmung (radius osculi).

539. Sind NH; MH; Tangenten der krummen Linie wie 22 F. so ist HNW gewiß eine Tangente des Krümmungskreises; weil die Puncte M; V; beyde auf einer Seite dieser geraden Linie liegen. (Alg. 449.)

540. Also wenn MKN = $\varkappa$ heisst; MNH = R — MNK und MNK = R — $\frac{1}{2}\varkappa$ folglich MNH = $\frac{1}{2}\varkappa$.

541. HMN; WNV; sind zweene nächst nach einander folgende Winkel der Tangenten mit den Sehnen. Wenn die Sehnen anfangs endlich sind, sind diese Winkel endlich; Es sey WNV = HMN + δHMN; wo δHMN bedeutet, was zu HMN kömmt, damit WNV daraus wird. Weil sich nun diese Winkel wie alle übrige Grössen nach dem Gesetze der Stetigkeit verändern müssen; so nimmt der Quotient $\frac{\delta HMN}{HMN}$ unendlich ab, indem V; N; M; sich einander unendlich nähern.

542. Man

542. Man ſetze die Sehnen MN = NV. Nun iſt HNM, = 2R — WNV — MNV; aber MNV = 2. MNK = 2. (R — ½ ϰ) = 2R — ϰ alſo HNM = ϰ — WNV = ϰ — HMN — ∂HMN folglich

$$\frac{HNM + HMN}{HMN} + \frac{\partial HMN}{HMN} = \frac{\varkappa}{HMN};$$ Aber HNM + HMN = THD; alſo nähert ſich (542) der Quotient $\frac{THD}{HMN}$ unendlich dem Quotienten $\frac{\varkappa}{HMN}$ oder es wird THD = ϰ.

543. Aufg. Den Halbmeſſer der Krümmung zu finden.

Aufl. I. Aus Trig. 8. S. iſt $MK = \frac{\frac{1}{2}MN}{\sin \frac{1}{2}\varkappa}$; Wenn ſich nun M; N; einander unendlich nähern, ſo verwandelt ſich MN; in ds; und $\sin \frac{1}{2}\varkappa$ in $\frac{1}{2}\varkappa$ (286) = ½ THD (542) alſo wird MK $= \frac{ds}{THD}$ wo der Diviſor aus 518. bekannt iſt.

II. Es iſt nähmlich der Halbmeſſer der Krümmung = z, für parallele Ordinaten, wo $ds = dx\sqrt{(1 + pp)}$ aus 518; IIII;

$$= -(1 + pp)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dx}{dp} = \frac{ds^3}{dyddx - dxddy}$$ (542. II.)

III. Alſo

III. Also wenn dx unveränderlich ist

$$z = -\frac{ds^3}{dx\,ddy}$$

IIII. Wenn ds unveränderlich ist; also dyddy + dxddx = o; $z = \frac{dyds}{ddx} = -\frac{dxds}{ddy}$

V. Für Ordinaten aus einem Puncte, ist z. ds = dx. $\sqrt{}$(rrpp + uu) (509) wenn dorten y = u; dy oder du = pdx gesetzt wird, also

$$z = \frac{(rrpp + uu).\,dsdx}{r.\,(pdu - udp)\,dx + rds^2}$$

VI. Wenn man hierinn aus §18 IIII; den Werth von dp; und aus hier V; den von $ds = \frac{\sqrt{(r^2\,du^2 + u^2\,dx^2)}}{r}$ setzt, so findet man

$$z = \frac{rds^3}{dxds^2 + du^2\,dx + ududdx - udxddu}$$

VI. Ist hier du unveränderlich, so ist

$$z = \frac{rds^3}{dx\,(ds^2 + du^2) + ududdx}$$

VII. Ist ds unveränderlich, so kömmt

$$z = \frac{rdsdy}{2dydx + yddx}$$

VIII. Ist dx unveränderlich, so kömmt

$$z = \frac{rds^3}{dx.\,(ds^2 + du^2) - udxddu}$$

Wenn

Wenn man daraus $ddu = \frac{r^2 dsdds - ududx^2}{r^2 du}$ wegschafft, so erhält man

$$z = \frac{rds^2 du}{dx.(2dsdu - uddds)}$$

VIIII. Setzt man $u = r + y$ und alsdenn $r = \infty$ so verwandelt sich V in II. wie bey §. 18 IIII.

X. Die krumme Linie ist hohl oder erhaben, nachdem diese Ausdrückungen für den Halbmesser der Krümmung bejahte oder verneinte Werthe geben. (hier I und §. 21.) Der Mittelpunct der Krümmung liegt nähmlich auf der hohlen Seite der krummen Linie. Wenn also eine krumme Linie nach einer Gegend hohl, und die andere nach eben der Gegend erhaben ist, so haben die Halbmesser der Krümmung entgegengesetzte Lagen.

XI. Die Formel (V) hat Cramer in den Anmerk. über Jac. Bernoullis Werke. T. I. n. §. 8. p. 579. not. n. synthetisch erwiesen. In meinem Lehrbegriffe der Optik 2. B. II. Th. §. C. habe ich eine Analysis davon unter den gewöhnlichen Voraussetzungen der Rechnung des Unendlichen gegeben.

XII. Die Normallinie wie MO 1. F. heisse $w = \sqrt{\left(yy + \frac{yydy^2}{dx^2}\right)}$ (92) $= y\sqrt{(1 + pp)}$; so ist $z = -\left(\frac{w}{y}\right).3\frac{dx}{dp}$.

XIII. Am Scheitel, wie bey C 1 F. ist der Krümmungskreis ein Kreis durch C der mit der krummen Linie die verschwindende Ordinate PM gemein hat, also sein Durchmesser $CO = CP + PO = CP + \frac{PM^2}{CP} = \frac{PM^2}{CP}$ für verschwindende PM und CP, wenn er endlich seyn soll, denn da muß $\frac{PM^2}{CP}$ ein endlicher Quotient seyn, weil CP verschwindet. Von diesem Verfahren den Krümmungskreis zu finden, handeln umständlicher Iac. Bernoulli Op. n. 193. art. 22. Io. Bernoulli Lect. Hospital. 17; 18; Op. T. III.

XIIII. Wenn p sich durch x allein ohne y, oder durch y allein ohne x ausdrucken läßt, wird sich aus §43; II; z am bequemsten finden lassen, wenn man nähmlich die gegebene Ordinate oder Abscisse statt y oder x setzt.

Wäre aber p durch y und x zugleich gegeben, und man hätte eine algebraische Gleichung zwischen x und y; so liesse sich aus dieser Gleichung, mit der, zwischen p, x, y, zusammen genommen, entweder x oder y wegschaffen, und also eine dritte zwischen p und x, oder zwischen p und y, welches von beyden man wollte erhalten.

Bey jeder algebraischen krummen Linie also giebt es eine algebraische Gleichung zwischen p und x.

Man

Man ſetze $\frac{dp}{dx} = q$, ſo iſt bey jeder algebraiſchen Linie, q durch x und p gegeben. Wenn man alſo die Gleichung zwiſchen x und y; und die zwiſchen q, x, p, verbindet, ſo erhält man eine zwiſchen q und x;

544. Weil HNK = R (539) ſo iſt HMK = 3R — MHN — x (G. 13 S. 6. Z.) = 3R — (2R — x) — x (542) = R, alſo TMH auch eine Tangente des Kreiſes. Folglich fallen beyde Bogen durch M und N; der krummen Linie ihrer und des Krümmungskreiſes ſeiner, innerhalb des Dreyecks MHN (68) und weil dieſes Dreyeck ſich einer geraden Linie MN, unendlich nähert, (532) ſo nähern ſich beyde Bogen einander unendlich. Alſo kann kein Bogen eines andern Kreiſes zwiſchen dem Krümmungskreiſe und der krummen Linie durch M oder N gehen. In dieſer Bedeutung zeigt der Kreis die Krümmung der krummen Linie an, wie die Tangente ihre Richtung (G. 41. S. Anm.) Auch ſtimmt damit überein, daß MHD zugleich der Krümmungswinkel des Kreiſes und der krummen Linie iſt, wenn beyder gemeinſchaftliche Tangenten MH; NH; ſind, woraus weiter folgt, was ſchon vorhin dargethan worden: daß MHD = x (96).

545. Der Winkel, den zwo Tangenten an beyden Endpuncten eines Kreisbogens mit einander machen, iſt allemahl dem Winkel des Aus-

schnittes gleich, wie man leicht übersieht, wenn man MN 2 F. für einen endlichen Kreisbogen annimmt, der K zum Mittelpuncte hätte. Sind also zweener Kreise Halbmesser C; c; und man nimmt auf ihnen Bogen, deren Längen V; v; sind, so verhalten sich die Winkel der Tangenten an beyden Kreisen, wie $\frac{V}{C} : \frac{v}{c}$ (G. 44. S. 11. Z.) $= c : C$ wenn $V = v$. Wenn sich also diese Winkel in Krümmungswinkel verwandeln, so verhalten sich die Krümmungswinkel bey zwo krummen Linien, oder an zwo Stellen einer krummen Linie, verkehrt wie die Halbmesser der Krümmung; wobey zum voraus gesetzt wird, daß die beyden Elemente, deren Krümmung man solchergestalt vergleicht, gleich lang sind.

546. Anm. Man nehme nichts an, als daß MK; NK; Perpendikel auf die Tangenten NH; MH; sind; so ist $MK = \gamma (HK^2 - MH^2)$ also $\frac{MK}{HK}$

$= \gamma \left(1 - \frac{MH^2}{HK^2}\right) = 1 - \frac{MH^2}{2HK^2}$

$+ \frac{3 . MH^4}{8 . HK^4} \ldots$ (46. wenn $m = \frac{1}{2}$) folglich

$\frac{HK - MK}{HK} = \frac{MH^2}{2HK^2} - \frac{3 . MH^4}{8 . HK^4} \ldots$

Wenn nun MH unendlich abnimmt, so nähert sich MHK unendlich einem rechten Winkel, und also wird $\frac{MK}{MH}$ unendlich (Fig. 4. Erkl. 2. Zus. also ist MK end-

lich,

lich, und folglich auch KH, daher verschwindet $\frac{MH}{HK}$ oder der Unterschied zwischen HK und MK verschwindet in Vergleichung mit MK, folglich auch in Vergleichung mit dx; dy; ds; zu denen MH endliche Verhältnisse hat. Also können KH; KM; als zweene Halbmesser eines Kreises angesehen werden. Dazu ist nähmlich bey ein paar Linien nicht genug, daß ihr Unterschied in Vergleichung mit ihnen verschwindet, sonst wären CM; CN; 22 F. dergleichen, sondern eine Linie, die in einer andern Lage, wie KM in der Lage, KH, noch ein Halbmesser eines Kreises seyn soll, muß sich nicht verändern, indem sich sonst jede dem Puncte M zugehörige Linie, in eine unterschiedene dem andern Puncte zugehörige verändert. Linien können also, als Halbmesser eines Kreises angesehen werden, wenn beyder Unterschied, wie hier HK - MK, ein Unendlichkleines der zweyten Ordnung, wie hier $\frac{MH^2}{2HK}$ ist. Eben die Schlüsse lassen sich von NK und HK machen, also sind KM; KH; KN; drey Halbmesser eines Kreises, der der Krümmungskreis seyn wird.

Exempel für parallele Ordinaten.

547. Für die Kegelschnitte ist aus 524.

$$1 + pp = \frac{\pm 4abx^2 + 4aabx + aabb + 4bb + 4abb}{4.(aabx \pm abxx)}$$

daraus folgt (543. II;) $- (1 + pp)^{3:2} \frac{dx}{dp}$

$$= + \frac{\left(\begin{matrix}\pm 4abxx + 4aabx + aabb \\ +4bb \quad \pm 4abb \quad .\end{matrix}\right)^{3:2} = z}{2a^3\,bb}$$

Die obern Zeichen für die Hyperbel, die untern für die Ellipse.

Für die Parabel, da a unendlich wird;

$$z = \frac{(aa.(4bx + bb))^{3:2}}{2a^3.bb} = \frac{(4x+b)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{b}}$$

Für alle Kegelschnitte ist $dp = -\frac{b^2\,dx}{4y}$ (524) also $z = \frac{4w^3}{bb}$ (543; XIII.)

Für den Scheitel ist nach 543 XIII; $\frac{yy}{x}$ oder $b + \frac{bx}{a} = b$ also $z = \frac{1}{2}b$ oder der Halbmesser der Krümmung am Scheitel jedes Kegelschnittes ist dem halben Parameter gleich, wie auch der allgemeine Ausdruck für z; wenn $x = 0$, giebt. An dem Mittelpuncte ist bey der Ellipse $x = \frac{1}{2}a$ und $z = ((4bb - 4ab).\frac{1}{4}aa + 4ab.(a-b).\frac{1}{2}a + aabb)^{3:2} : 2a^3\,bb$ oder $= a\sqrt{ab} : 2b$

An dem Mittelpuncte der Hyperbel ist $x = -\frac{1}{2}a$ und der Zähler des Halbmessers der Krümmung

mung $= (-2a^3 b)^{3:2}$ unmöglich, weil da nichts von der krummen Linie ist.

Die Krümmungen der Ellipse am Scheitel und über dem Mittelpuncte verhalten sich (545) wie $\frac{a\sqrt{ab}}{2b} : \frac{1}{2}b = a\sqrt{a} : b\sqrt{b} = a^3 : c^3$ (Alg. 366.)

548. MB 29 F. sey eine Tangente an der krummen Linie ML Puncte M; MT aber eine nach Gefallen gezogene gerade Linie, mit der BLEF parallel gehe, und die krumme Linie in L; einen Kreis aber der MG zur Sehne und MB ebenfalls zur Tangente hat, in E und F schneide. Nun ist im Kreise $BM^2 = BE.BF$ (Trig. 16. S.) Wenn aber BF mit einer parallelen Bewegung, der MT unendlich nahe rückt, so nähert sich BF unendlich der Grösse MG; und da allemahl $\frac{BM^2}{BE} = BF$; so wird dieser Quotient in dem nur erwähnten Falle $= MG$. Man setze, aus der Natur der krummen Linie sey $\frac{BM^2}{BL} = w$ und w sey eine solche Grösse, die sich in MG verwandele, wenn BLEF der MT unendlich nahe rückt, oder man suche den Werth $\frac{BM^2}{BL}$ wenn MB verschwindet, und nehme MG demselben gleich. Nach dieser Voraussetzung werden die Puncte L und

E ſich einander unendlich nähern, wenn L; E; unendlich nahe an M rücken; das iſt, ein Kreis, der MG zur Sehne hat, wird die krumme Linie ML in M wo er mit ihr einerley Tangente MB hat, dergeſtalt berühren, daß kein anderer Bogen eines andern Kreiſes, durch M, zwiſchen ſeinem Bogen ME und dem Bogen der krummen Linie ML durchgehen kann. Denn thäte dieſes ein Bogen eines andern Kreiſes, ſo ſonderte er die genannten beyden Bogen dergeſtalt ab, daß die Puncte, L in dem einen und E in dem andern, einander nicht ſo nahe als man will, oder unendlich nahe rücken könnten, weil ſie auf verſchiedenen Seiten des Punctes liegen müſſen, in welchem BLEF zwiſchen L und E den andern Kreis ſchneidet; und dieſer Durchſchnittspunct des andern Kreiſes mit BF; kann dem Puncte L nicht unendlich nahe rücken, wo der andere Kreis nicht aus MB; ML; ſo wie der erſte beſtimmt wird, d. i. mit ihm einerley iſt.

Dieſer Kreis alſo, der MB zur Tangente und MG zur Sehne hat, iſt der Krümmungskreis. Er iſt gegeben, denn ſein Mittelpunct K muß ſich in zwo gegebenen Linien befinden; in einem Perpendikel auf die Tangente durch M; und in einem andern, das die Sehne in V halbirt. Weil nun $KMV = R - BMG$; ſo iſt $MK = \frac{\frac{1}{2}MG}{\sin BMG} = \frac{e}{2m}$ wenn $MG = e$ und $\sin$

BMG

BMG = m. So betrachtet Mac Laurin den Krümmungskreis; Treat on Flux. Chap. XI. Man sieht leicht, wieviel ähnliches dieses mit §43 XIII. hat.

Exempel.

§49. Dieses auf die Parabel anzuwenden suche man erstlich die Gleichung für die Parabel, wenn die Abscissen auf einen Durchmesser (Alg. 462.) genommen werden, und die Ordinaten mit der Tangente am Scheitel des Durchmessers, oder dem Orte, wo er die Parabel schneidet, parallel gehen. CMN 1 F. sey eine solche Parabel; CO die Axe, b der Parameter für die Axe; MS ein Durchmesser, dessen Weite von der Axe MP = f gegeben ist. So ist PT = 2. CP (84) = $\frac{2ff}{b}$ und $MT = \sqrt{(PT^2 + MP^2)} = \frac{f\sqrt{(4ff + bb)}}{b} = \frac{fg}{b}$. Nun sey N ein willkührlicher Punct der Parabel; durch N gehe eine Linie mit der Tangente MV parallel und schneide den Durchmesser MS in H; so ist $SH = \frac{NS.PT}{MP} = \frac{NS.2f}{b}$; $NH = \frac{NS.MT}{MP} = \frac{NS.g}{b}$; ferner $(NS + f)^2 = b.(CP + PQ = b.(CP + MS)$ also $\frac{NS^2 + 2f.NS}{b} = MS$; Nun sey

$MH = m$; $NH = n$; so ist $m = MS - SH = \frac{NS^2}{b}$; $n = \frac{NSg}{b}$; also NS^2 oder $bm = \frac{bbnn}{gg}$ oder $\frac{gg}{b} m = nn$ daß also der Parameter für diesen Durchmesser $= \frac{4ff}{b} + b$ ist.

Nun ist also in (548) MI der Durchmesser, $MB = n$; $BL = m$; und $e = \frac{gg}{b}$ = dem Parameter des Durchmessers. Ferner sin $BMG = \frac{MP}{M\Gamma}$ der 1. F. $= \frac{b}{g}$ und der Krümmungshalbmesser $= \frac{gg}{b} : \frac{2b}{g} = \frac{g^3}{2bb} : \frac{(4b.\,CP + bb)^{\frac{3}{2}}}{2bb}$ wie 547

550. MI sey die Axe der neilischen Parabel, weil für sie $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{\frac{x}{a}}$ so verschwindet dieser Quotient, wenn x verschwindet, und die krumme Linie steht im Anfange der Abscissen, welches hier M ist. auf die Axe senkrecht. Also ist $m = o$ und MK müsste in die Axe fallen. Ferner ist $\frac{MB^2}{BL} = \frac{y^2}{x} = \frac{ax}{y} = a\sqrt[3]{\frac{x}{a}}$ welches für $x = o$ verschwin-

verschwindet. Die Sehne MG oder der ihr gleiche Halbmesser der Krümmung verschwinden also; das ist: so klein auch der Halbmesser eines Kreises ist, den man aus einem in der Axe angenommenen Mittelpuncte durch den Anfang der Abscissen M beschrieben hat, so geht doch zwischen diesem Kreise und der krummen Linie noch jeder anderer durch, den man aus einem Mittelpuncte in der Axe, mit einem kleinern Halbmesser durch M beschreibt; Es giebt also hier eigentlich keinen Krümmungskreis, oder man muß sagen, sein Halbmesser sey o oder unendlich klein, wie die unendliche Krümmung daselbst erfodert. (529. 545.)

551. Bey der cubischen Parabel, wo $y^3 = aax$ ist; hat man $\frac{y}{x} = \frac{aa}{yy}$ welches für die verschwindenden Coordinaten unendlich wird, daß also wiederum die krumme Linie am Scheitel auf ihre Axe senkrecht steht. Ist also MB ihre Tangente am Scheitel, so ist $m = 1$ und $\frac{MB^2}{BL} = \frac{yy}{x} = \frac{aa}{y}$ welches für das verschwindende y unendlich wird. Der unendliche Halbmesser der Krümmung zeigt hier eine Krümmung an, die in Vergleichung mit andern Krümmungen unendlich klein ist. (545)

Für

Für diese krumme Linie ist nach (521); $p = \frac{aa}{3yy}$ und $dp = -\frac{2aady}{3y^3} = -\frac{2a^4dx}{9y^5}$ also $\frac{dp}{y} = -\frac{2a^4dx}{9y^6}$ folglich die krumme Linie allemahl gegen die Axe hohl. Da sie nun für bejahte Abscissen nur bejahte, und für verneinte Abscissen nur verneinte Ordinaten hat, also die Axe im Anfange der Abscissen, und zwar erwiesener Maassen senkrecht schneidet, so muß sie, um gegen die Abscisse auf beyden Seiten hohl zu seyn, im Scheitel einen Wendungspunct haben, wo der Krümmungswinkel in Vergleichung mit andern Krümmungswinkeln verschwindet (532).

Fragen, die mit dem Krümmungskreise zusammenhängen.

552. Die Stelle zu finden, wo eine gegebene krumme Linie die Krümmung eines gegebenen Kreises hat, setze man z (543) einer gegebenen Grösse f, gleich.

Bey der Parabel (547) giebt $\frac{(4x+b)^{3:2}}{2\sqrt{b}} = f$; $x = \sqrt[3]{\frac{1}{16}\,b\,ff} - \frac{1}{4}\,b$. So ist für die Stelle, wo der Halbmesser der Krümmung $= 4b$ ist, die Abscisse $= \frac{3}{4}\,b$.

553. Die grösste oder kleinste Krümmung findet man, wenn man mit dem Halbmesser z; nach

nach 155 verfährt, daß jetzo z heißt, was vor den y war. Es sey für eine Parabel $aay = x^3$; also $p = \frac{3xx}{aa}$; $dp = \frac{6x\,dx}{aa}$; und aus (543; II.) $z = -\frac{(a^4 + 9x^4)^{3:2}}{6a^4x}$. Weil nun das Zeichen — blos die Lage des Halbmessers der Krümmung, und daß die krumme Linie gegen die Axe erhoben ist, angezeigt, (543. X.) so sieht man z als bejaht an, wenn nur von der Grösse, nicht von der Lage die Rede ist, und da ist folglich

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(45x^4 - a^4).\sqrt{(a^4 + 9x^4)}}{6a^4xx}$$

welches für $x = a:\sqrt[4]{45}$ verschwindet. Ferner giebt dieser Ausdruck $\frac{6a^4\,dz}{dx} = (45x^2 - a^4x^{-2}).(a + 9x^4)^{\frac{1}{2}}$ weiter differentiirt $\frac{6a^4\,ddz}{dx^2} = (2a^8x^{-3} + 180a^4x + 1620x^5):\sqrt{(a^4 + 9x^4)}$ welches bejaht ist, daß also für $x = a:\sqrt[4]{45}$ der Halbmesser der Krümmung ein Kleinstes, und folglich die Krümmung daselbst die grösste ist. (155. III) Hätte man den Halbmesser verneint behalten, so wären seine Differentiale verneint geworden, welches zu dem entgegengesetzten unrichtigen Schlusse hätte verleiten können.

können. Wiewohl eine kleine Aufmerksamkeit auch da (nach 153) würde gezeigt haben, daß die Zeichen der Differentiale, welche nach 543 bejahte Kleinste oder Grösste anzeigen, umgekehrt verneinte Grösste oder Kleinste zu erkennen geben.

554. Anm. Aus $y^5 = aax^3$ wird $p = \frac{3}{5}\sqrt[5]{\frac{aa}{xx}}$ und $dp = -\frac{6}{25}dx\sqrt[5]{\frac{aa}{x^7}}$ also $z = \frac{(25x^{4:5} + 9a^{4:5})^{3:2}}{30a^{2:5}}$ und $\frac{dp}{y} = -\frac{6dx}{25xx}$ also die krumme Linie beständig gegen die Axe hohl. (521) Weil nun $\frac{y}{x} = \sqrt[5]{\frac{aa}{xx}}$ für $x = 0$ unendlich wird, so schneidet die krumme Linie im Anfange der Abscissen die Axe senkrecht, und muß also da einen Wendungspunct haben, wo also der Halbmesser der Krümmung nicht $= 0$ sondern unendlich seyn sollte. (551) Diese Schwürigkeit hat Jac. Bernoulli gehoben Act. Er. Lipſ. 1697. Sept. oder Op. n. 76.

Exempel zu 543 bey Ordinaten aus einem Puncte.

555. Für die archimedische Spirale ist (543. I. und 530) $z = \frac{(rr + xx)^{3:2}}{(2rr + xx).2\pi}$.

556. Für die logarithmische Spirale, (510) ist $\frac{ydx}{r} = mdy$; also $ds = dy.\sqrt{(1 + mm)}$. folglich nach 543 VIII. $z = \frac{y\sqrt{(mm + 1)}}{m}$

Halb-

Halbmeſſer der Krümmung für die Radlinie.

557. I. Weil für ſie z. F. der Bogen $FL = LP$ (Alg. 610.) ſo muß man ſuchen dieſe Eigenſchaft durch eine Differentialgleichung zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten auszudrucken, da es keine algebraiſche geben kann. Es ſey $FM = x$; $MP = y$; ſo iſt $y - ML = FL$ alſo $dy = dFL + dML$; Dieſe letzten beyden Differentiale aber finden ſich durch x aus der Natur des Kreiſes. Wenn $FE = 2r$; ſo iſt $LM^2 = 2rx - xx$ alſo $dLM = \frac{(r-x)\,dx}{LM}$ und $\sqrt{(dx^2 + dLM^2)}$ oder $dFL = \frac{r\,dx}{LM}$; alſo iſt die Gleichung für die Cycloide $dy = \frac{(2r-x)\,dx}{\sqrt{(2rx-xx)}}$; daraus giebt ſich alſo $\frac{dy}{dx}$ oder p; und ferner $1 + pp = \frac{4rr - 2rx}{2rx - xx}$ und $dp = \frac{r.(x-2r)}{(2rx-xx)^{3:2}}$ und $z = \frac{(4rr-2rx)^{3:2}}{r.(2r-x)} = 2\sqrt{(4rr-2rx)} =$ der doppelten Sehne LE.

II. Für $x = o$ oder bey F iſt $z = 4r$; Aber für $x = 2r$; oder bey A verſchwinden zugleich Zähler und Nenner dieſes Ausdruckes: Alſo nach

(374)

(374) der Werth von z für dieses x; $= 3 \cdot \sqrt{(4rr - 2rx)} = 0$; und die Krümmung bey A unendlich.

§. 58. $\text{tang } Pqm = \frac{Mm}{dPM} = \frac{dx}{dFL - dML}$

Die Tangente des Winkels Ppm den die Radlinie in p mit der Ordinate pm macht, ist $\frac{dx}{dy} = \pm \frac{\sqrt{(2rx - xx)}}{2r - x}$. Für $x = 2r$ giebt dieses $\frac{0}{0}$; wo auch noch zweifelhaft seyn könnte, ob sich dieser Ausdruck für $\frac{dx}{dy}$ daselbst anbringen liesse, weil LM da verschwindet: Ich betrachte daher die Sache so: Es ist überhaupt $\text{tang } Ppm = \frac{Mm}{Ll + lm - LM}$. Nun sey $x = 2r - e$ wo e unendlich abnehmen mag. So ist für jedes e; $LM^2 = 2re - ee$. Wenn nun e unendlich abnimmt, so wird $pm = AE$; und $lm = 0$ und PM stellt die nächste Ordinate der Ordinate der Radlinie über AE vor; wie LM die verschwindende Ordinate des Kreises, die zunächst über dem Puncte E befindlich ist, wo die Ordinate des Kreises $= \sigma$ ist; also verwandelt sich Mm in e; und $lm - LM$ in $- LM$ und da überhaupt $Ll^2 = Mm^2 + (lm - LM)^2$ ist,

so

so wird hier $Ll^2 = ee + LM^2 = 2re$ Ferner $LM = \sqrt{2re} - \frac{ee}{2\sqrt{2re}}$ .... wo die folgenden Glieder höhere Potenzen von e enthalten; also der Nenner der tang Ppm oder $Ll - LM = \frac{ee}{2\sqrt{2re}}$ .... und folglich tang $Ppm = e : \left(\frac{e\sqrt{e}}{2\sqrt{2r}} \ldots\right)$ so daß die folgenden Glieder des Divisors immer höhere Potenzen von e enthalten; also tang $Ppm = 1 : \left(\frac{\sqrt{e}}{2\sqrt{2r}} \ldots\right)$ das ist unendlich, wenn e verschwindet. Also macht die Radlinie mit AE einen Winkel, der unendlich wenig von einem rechten unterschieden ist. Eben solche Winkel machen auch alle Kreise, die aus Mittelpuncten in AE durch A beschrieben werden. Aber jeder von diesen Kreisen, so nahe man auch seinen Mittelpunct bey A nimmt, ist weniger krumm als die Radlinie. (557) Also gehen alle diese Kreise, so klein man auch ihre Halbmesser annimmt, zwischen ihrer gemeinschaftlichen Tangente und der Radlinie durch, oder die Radlinie ist da krümmer als jeder Kreis, und macht mit der dasigen Tangente einen grössern Berührungswinkel als irgend ein Kreis mit der seinigen machen kann, obgleich auch ihr Berüh-

rungswinkel unendlich klein ist. Man s. von dergleichen Berührungswinkeln Newton Method of Flux. Prob. V. art. 39.

Rectification der Radlinie, Gleichung zwischen ihrer Abscisse und ihrem Bogen; und Quadratur eben dieser Linie.

559. I. Aus dem Werthe von dy (557) folgt $\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$ oder $ds = \sqrt{2r.x^{-\frac{1}{2}}}.dx$; also $s = 2\sqrt{2rx}$ oder $ss = 8rx$; Wo s den Bogen FP bedeutet, der für $x = o$ verschwindet, oder sich gerade über dem Puncte E der die Grundlinie (Alg. 602.) halbirt, in dem Puncte F anfängt, der um des beschreibenden Kreises (Alg. 602.) Durchmesser $FE = 2r$ über der Grundlinie erhoben ist.

Christoph Wrenn, hat zuerst die Vergleichung der Bogen der Radlinie mit einer geraden Linie gefunden. Phil. Trans. n. 98; Nov. 17; 1763.

Es war die erste gegebene Linie, die rectificirt ward. Neil (269) suchte eine Linie die sich rectificiren ließ Ph. Tr. a. a. O.

II. Für $x = 2r$ ist der Bogen der halben Cycloide, $FA = 4r =$ dem vierfachen Halbmesser des beschreibenden Kreises.

III. PMmp als das Differential der Fläche ist $= (FL + LM)\,dx$; Nun ist FL: Bogen $\sin \frac{LM}{r} = r : 1$ (Trig. 19. S. Anm. u. 1. S.)

also $FL = r. \mathfrak{B} \sin \frac{\sqrt{(2rx - xx)}}{r}$ welches ich $= rq$ setzen will. So ist das Element der Fläche $= rqdx + LMdx$. Das Integral des letzten Theiles oder $\int LMdx$ ist $FLM = \frac{1}{2} r. FL - \frac{(r-x).LM}{2} = \frac{1}{2}. r. r. \mathfrak{B} \sin (LM : r) - \frac{1}{2} (r - x). LM$ das Integral des ersten Theiles oder $\int rqdx$ sey $= rqx + rt$ so ist, wenn man auf beyden Seiten differentiirt $dt = -xdq = -\frac{xdx}{\sqrt{(2rx - xx)}} (281) = \frac{(r-x)dx}{\sqrt{(2rx - xx)}} - \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - xx)}}$ also $t = LM - r. \mathfrak{B} \sin (LM : r)$; folglich das völlige Integral, so genommen, daß es für $x = o$ verschwindet, oder die Fläche $FMP = \int rqdx + \int LMdx = rq. (x - \frac{1}{2} r) + \frac{1}{2} LM. (r + x) = FL. (x - \frac{1}{2} r) + \frac{1}{2}. LM. (r + x)$.

IIII. Dieses giebt für $x = 2r$; die Fläche $FEA = FLE. \frac{3}{2} r =$ dem Dreyfachen des Halbkreises FLE. Die ganze Fläche der Radlinie ist also dreymahl so groß als die Fläche des Kreises, der sie beschreibt.

V. Man ziehe durch F; P; Parallelen mit EA; EF; die einander in G begegnen; so ist $FMPG = xy$ wo y aus 557. bekannt ist; davon FMP (III) abgezogen läßt den Raum $FGP = \frac{1}{2}$.

(r. FL — (r — x). LM) = dem Abſchnitte FLM. Wenn alſo FG verlängert wird, bis ſie einer Parallele durch A mit EF begegnet, ſo ſchlieſſen dieſe beyden Parallelen mit APE einen Raum ein, der der Fläche des Halbkreiſes FLE gleich iſt.

VI. Wenn $x = \frac{1}{2} r$ iſt $LM = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ und der Bogen FL = 60 Gr; und der Raum FMP $= \frac{3rr\sqrt{3}}{8}$. Man ziehe die Sehne FL, ſo iſt $\Delta FLM = \frac{rr\sqrt{3}}{8}$ das Dreyeck aber, das ein paar Linien aus des Kreiſes FLE Mittelpuncte, mit der Sehne FL machen, hat zu ſeiner Höhe (die Sehne für die Grundlinie angenommen,) $\frac{r\sqrt{3}}{2}$; und alſo zum Innhalte $\frac{rr\sqrt{3}}{4}$ $= 2\Delta FLM$. Folglich iſt dieſes Dreyeck zwiſchen den beyden Halbmeſſern und der Sehne, ſo groß als der Raum FMP — ΔFML oder als der Raum zwiſchen der Sehne, der geraden Linie PL, und der krummen FP.

VII. Wenn man von FMP den Abſchnitt FML abzieht, ſo bleibt für den Raum zwiſchen den Bogen FL und FP; und der geraden Linie PL, der Werth, FL. (x — r) + LM. r. Dieſer Raum wird alſo = rr für x = r.

VIII.

VIII. Wie also die Räume der Cycloide überhaupt betrachtet durch die Quadratur des Kreises müssen gefunden werden, so giebt es unter jeden der beyden Arten (IIII; VII) einen, der algebraisch gegeben ist.

VIIII Anm. Von solchen krummen Linien, wo die unbestimmte Quadratur überhaupt transcendentisch ist, für eine gewisse Stelle aber einen algebraischen Raum giebt, handelt umständlicher Joh. Bern. Lect. Hosp. 4; 5; 6; das hier Gelehrte, welches Hugen bey der Cycloide bemerkt hat, ist oben daselbst Lect. 25. allgemeiner von krummen Linien, deren die gemeine Cycloide eine einzige Art ist erwiesen.

X. Anm. Die Geometern heissen Monden (lunulas) einen Raum, der zwischen zween Bogen krummer Linien enthalten ist, da eine ihre erhabene Seite der Höhlung der andern zukehrt, wie hier der Raum zwischen den Bogen FPA und FLE wäre, den man mit Krafften Comm. Ac. Petrop. T. VI. p. 156. einen offenen Mond und wenn die krummen Linien einander zweymahl über einer gemeinschaftlichen Sehne schnitten, einen geschlossenen nennen könnte. Hippocrates aus Chios hat einen solchen Mond zwischen Kreisbogen quadrirt, es hilft aber diese Erfindung nichts zur bestimmten oder unbestimmten Quadratur des Kreises. Krumme Linien zu finden, deren Monden sich quadriren lassen, hat Kraft a. a. O. allgemein gelehrt. Von Monden zwischen Kreisbogen, meine geometrischen Abhandlungen, II. Sammlung 16. Abh.

Wie die Veränderung der Krümmung gemessen wird.

560. Wenn man die Differentiale zweener Halbmesser der Krümmung an zwo von einander

entfernten Stellen der krummen Linie mit einander vergleicht, so sieht man, wie vielmahl schneller sich die Krümmung an einer Stelle als an der andern ändere. Es wird aber jeder Halbmesser von dem ihm nächsten, mehr oder weniger unterschieden seyn, nachdem die Puncte der krummen Linie, zu denen diese beyden nächsten Halbmesser gehören, weiter von einander oder näher beysammen sind; und also bestimmt die Entfernung dieser Puncte, d. i. ds oder dx oder dy, das Differential des Halbmessers von jeder Stelle. Um also die Vergleichung gehörig anzustellen, so könnte man ds oder dx oder dy veränderlich setzen. Man kann aber die Vergleichung so anstellen, daß man den Quotienten $\frac{dz}{ds}$ für zwo Stellen der krummen Linie sucht. Dieser zeigt an, wie sich die Veränderung des Halbmessers der Krümmung an jeder Stelle, zu der Veränderung des Bogens der krummen Linie verhält, und dient also die Verhältnisse der Veränderung der Krümmung zur Veränderung des Bogens an zwo Stellen mit einander zu vergleichen, und zu sehen, ob sie sich gleichförmig oder ungleichförmig, schnell oder langsam ändert. Newton Meth. of flux. Prob. VI. nennt dieses die Beschaffenheit der Krümmung (qualitatem curuaturae).

Exem-

Exempel.

561. Bey der Parabel ist aus 547; $dz = 3\sqrt{\frac{4x+b}{b}}\cdot dx$; $ds = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4x+b}{x}}$ folglich $\frac{dz}{ds} = 6\sqrt{\frac{x}{b}}$. Die beyden Werthe dieses Quotienten für Abscissen die sich wie $\frac{1}{2}$ und 2; verhalten, verhalten sich wie die Wurzeln aus $\frac{1}{2}$ und 2 das ist, wie 1 : 2 also verändert sich die Krümmung bey der ersten Abscisse halb so schnell als bey der zweyten, die viermahl so groß ist.

562. Bey der logarithmischen Spirale (556) kömmt $\frac{dz}{ds} = \frac{1}{m}$ also verändert sich ihre Krümmung überall gleichviel, oder wie Newton sagt, ihre Krümmung ist gleichförmig ungleichförmig (aequabiliter inaequabilis); eben wie die Bewegung fallender Körper gleichförmig ungleichförmig ist.

Von der Evolution.

563. Erkl. Ein vollkommener biegsamer Faden, sey um die erhabene Seite der krummen Linie ACQ 305. gewunden, wobey ich annehme, daß dieser Bogen der krummen Linie beständig nach einer Seite zu hohl, nach der andern erhaben ist, und keinen Wendungs- oder Rückkehr-

punct hat; Nun winde man den Faden dergestalt ab, daß das Theil von ihm, das nicht mehr um die krumme Linie liegt, wie CE; in eine gerade Linie ausgespannt ist. So beschreibt der Endpunct des Fadens eine krumme Linie AEM; welche man aus der Abwickelung der Linie ACQ erzeugt (ex evolutione genitam) wie ACQ die abgewickelte oder Evolute (evolutam) nennt.

564 Zus. Der Faden berührt in jeder Lage CE die Evolute ACQ; und die gerade Linie CE ist dem Bogen AC der Evolute gleich.

565. Lehrs. Der Linie AEM Tangente an E, steht auf CE (564) senkrecht.

Bew. E; M; sollen zwo Stellen der Linie AEM seyn, welchen die Lagen des Fadens CE; QM zugehören, die einander in N schneiden. Weil der Faden in beyden Lagen die Evolute berührt, (564) und die Evolute beständig nach einer Seite hohl ist, (563) so ist der Bogen CQ gegen die geraden Linien CN; QN; erhoben, und fällt zwischen sie und seine Sehne (70). Man ziehe des Bogens EM Sehne, und suche den Winkel NEM; dieser Winkel, für den Fall, da sich E und M, folglich auch C und Q einander unendlich nähern, ist der Winkel der Tangente bey E; mit CE; (68).

Also sey der Bogen AC oder die gerade Linie EC = u; der Bogen AQ oder die gerade Linie QM = u + e; Ferner CN = f; QN = g;

und

und die Sehne EM = k; so ist EN = u + f; MN = u + e − g; und (Trig. 20. S.) Cos $NEM = \frac{(u+f)^2 + kk - (u+e-g)^2}{2(u+f).k}$.

Der Zähler hievon wird 2u. (f + g − e) − (e − g)² + ff + kk. Wenn sich nun Q und C einander unendlich nähern, so nähert sich die Summe f + g unendlich der Sehne CQ (532) das ist, dem Bogen CQ oder e; also f unendlich dem Werthe e − g; und der Zähler unendlich dem Werthe kk und 2 (u + f). k unendlich dem Werthe 2uk und der Cosinus unendlich dem Werthe $\frac{k}{2u}$, das ist, einem verschwindenden Werthe, also CEM einem rechten Winkel.

566. Wenn man aus jedem gegebenen Puncte E; der Linie AEM eine Tangente ihrer Evolute, EC; ziehen kann, so darf man nur auf CE in E ein Perpendikel setzen, um die Tangente der Linie AEM in E zu haben.

567. Wenn E und M sich einander unendlich nähern, so wird N der Mittelpunct der Krümmung für EM; (546) aber N fällt in den Bogen CQ (565) also ist die Evolute der geometrische Ort (Alg. 697) aller Mittelpuncte der Krümmung für AEM.

568. Wenn ME; CQ; auch endliche Bogen und CK; QK; Perpendikel auf die Lagen

des Fadens sind, so ist K = 2R — CNQ (S. 13. S. 6. Z.) = ENM; oder zwo Normallinien, an zwo willkührlichen Stellen E; M; der Linie AEM; machen eben den Winkel, den zwo Normallinien an den beyden jenen zugehörigen Stellen C; Q; der Evolute ACQ machen. Das heisst, die zusammengehörigen Bogen der Evolute und der Linie AEM; haben einerley Weite (amplitudinem).

569. Wenn die Puncte M; E; und folglich auch Q; C; unendlich nahe zusammen rücken, so verwandeln sich, EM in ds; EN oder EC in den Halbmesser der Krümmung für E (545) den ich wie (543) z nenne; CQ oder MQ — EC in dz; (567) CK in den Halbmesser der Krümmung der Evolute bey C der w heissen mag. Also ist $\frac{ds}{z} = \frac{dz}{w}$ (568) oder $\frac{w}{z} = \frac{dz}{ds}$ = dem Maasse der Veränderung der Krümmung (560) die Veränderung der Krümmung jeder Linie AME, bey E; verhält sich also wie die Tangente des Winkels CEK wenn C der zu E gehörige Punct ihrer Evolute, und K der Mittelpunct der Krümmung der Evolute bey C ist.

569. Der Faden kann beym Anfange der Abwickelung, in A, schon eine bestimmte Länge haben, wie AF 31 F. wo er doch AC berühren muß; Alsdenn ist CE = dem Bogen AC + AF. In der 30 F. ist AF = 0.

570.

570. Aufg. Aus der Gleichung für die Linie FE 31 F. die für ihre Evolute zu finden.

Aufl. Man ziehe beyder gemeinschaftliche Abscissenlinie DL und nehme rechtwinklichte Coordinaten der Linie FE; DB = x; BE = y; zwischen denen die Gleichung gegeben ist: der Evolute AC; DL = v; LC = t; zwischen denen die Gleichung gesucht wird. Ferner sey EC = z; EO = w. Nun ist EO: EB = EC; EB + LC also $y + t = \frac{zy}{w}$ und $t = \frac{z - w}{w} \cdot y$ (A) Ferner EO: OB = EC: BL oder $v - x = \frac{z.py}{w}$ (B) Aus der Gleichung für ∝E nun, sind w; p; z; durch x und y gegeben; also läßt sich (B) auf eine Gestalt (C) bringen, wo sie nichts veränderliches als x; y; v; t; enthält. Aus (C) mit der Gleichung für ∝E verglichen, läßt sich y wegschaffen, und eine Gleichung (D) machen, die nichts veränderliches als x; v; t; enthält. Eben so läßt sich aus (A) mit der Gleichung für ∝E verglichen, y wegschaffen, und eine Gleichung (E) finden, die nur v; t; x; enthält, aus E mit D verglichen, läßt sich endlich x wegschaffen, und eine Gleichung F zwischen v und t finden.

570. Jeder algebraischen Linie Evolute ist algebraisch.

571. Weil die Länge des Bogens der Evolute AC = z + c ist, und z sich bey jeder algebraischen

braischen Linie algebraisch finden läßt, (543) so läßt sich die Evolute jeder algebraischen Linie, unbestimmt rectificiren; und man kann also unzählich viel algebraische Linien finden, die sich rectificiren lassen.

572. Aber umgekehrt wird FE nicht algebraisch seyn, wenn sich die Evolute nicht algebraisch rectificiren läßt, ob sie gleich algebraisch ist. Denn jeder algebraischen Linie Tangente ist der Lage nach algebraisch gegeben. Ist also CE eine solche Tangente, und gäbe es eine algebraische Gleichung zwischen DB und BE so ist der Punct E, folglich die Länge CE; folglich der ihr gleiche Bogen AC; algebraisch gegeben.

Exempel zu 570; 571;

573. Die Evolute der Parabel zu finden, D sey der Scheitel der Parabel, oder F 31 F. so ist nach 547; $z = \frac{(4x + b)^{3:2}}{2\sqrt{b}}$; $py = \frac{1}{2}b$; $w = \frac{1}{2}\sqrt{b}.\sqrt{(b + 4x)}$ also (D) $v - x = \frac{4x + b}{2}$ oder $v - \frac{1}{2}b = 3x$; (E) $t = \frac{4x\sqrt{x}}{\sqrt{b}}$ also $16x^3$ oder $btt = \frac{16.(v - \frac{1}{2}b)^3}{27}$ und für $FA = \frac{1}{2}b$ ist $t = 0$; Nennt man also die Abscissen $AL = r$ so ist $r = v - \frac{1}{2}b$ und $\frac{27}{16}btt = r^3$, oder die Evolute der apollonischen Para-

Parabel, ist eine neilische (268) rectificirte, deren Parameter $\frac{27}{16}$ des Parameters der apollonischen ist. Wegen $t = \pm \frac{2}{3} r \sqrt{(r : 3b)}$ hat sie ähnliche Hälften eine unter die andere über der Axe AL; deren jede abgewickelt eine Hälfte der Parabel über und unter der Axe giebt. Daß $FA = \frac{1}{2} b$ rührt daher, weil der apollonischen Parabel Krümmungshalbmesser am Scheitel so groß ist (547).

574. Suchte man die Evolute eines Kreises vom Halbmesser r, so wäre $z = r = w$; also (570) $t = 0$; und $py = r - x$; also $v - x = r - x$ oder $v = r$; die Evolute verwandelt sich nähmlich hier in des Kreises Mittelpunct.

575. Aufg. Wenn die Evolute AC 31 F. gegeben wird und die Länge des Fadens CE allemahl $CA + AF$ (569) ist, die krumme Linie FE zu finden.

Aufl. Es sey $AF = c$; $AL = r$; $LC = t$; $FB = x$; $BE = y$; $CE = s + c$; So ist $OL = \frac{tdr}{dt}$ (564; 77) und $OC = \sqrt{(OL^2 + LC^2)} = \frac{tds}{dt}$; und $\frac{CE.\,LC}{OC}$ oder $EH = \frac{(s+c)\,dt}{ds}$

Folglich EB oder (M) $y = \frac{(s+c)\,dt}{ds} - t$ und

BL oder $CH = \frac{EC.\,OL}{OC} = \frac{(s+c).\,dr}{ds}$ folglich

FA

FA + AL — BL oder FL — BL oder (N) $x = c + r - \frac{(s + c)\,dr}{ds}$. Ist nun die Gleichung für die Evolute gegeben, so ist $\frac{dr}{ds}$ durch r und t; gegeben; und lässt sich die Evolute rectificiren, so ist s auch durch r und t gegeben: In jeder der beyden Gleichungen (M); (N) bleiben also vier veränderliche endliche Grössen x; y; r; t; aus (M) mit der Gleichung für die Evolute verbunden lässt sich t wegschaffen und eine Gleichung (O) machen, die nur y; x; r; enthält: Eben eine solche Gleichung (P) lässt sich aus (N) mit der Gleichung für die Evolute verbunden machen; und aus (O) und (P) verbunden, lässt sich r wegschaffen, und eine Gleichung zwischen x y finden. Dieses aber geht nicht an, wenn nicht s sich durch r; t; ausdrucken lässt. (572)

576. Ex. Die Linie FE zu finden, die aus Abwickelung der neilischen Parabel entsteht, wo $ftt = r^3$;

Hier ist $t = \frac{r^{3:2}}{f^{1:2}}$ also $\frac{dt}{dr} = \frac{3r^{1:2}}{2f^{1:2}}$ und $ds = dr.\sqrt{\left(1 + \frac{9r}{4f}\right)}$ also wie in 268; $s = \frac{1}{27}.(4f + 9r).\sqrt{\left(4 + \frac{9r}{f}\right)} - \frac{8}{27}f$ und (M) $y =$

$y = (s+c).\,3\sqrt{\frac{r}{4f+9r}} - t$; (N); $x = c + r - \frac{(s+c).\,2\sqrt{f}}{\sqrt{(4f+9r)}}$, wo man noch den Werth von s an seine Stelle setzen muß. Es erhellet also, daß verschiedene krumme Linien herauskommen, nachdem c von anderer und anderer Grösse angenommen wird. Ist $c = \frac{8}{27} f$ so kömmt $y = \frac{1}{27}. \frac{(4f+9r)^{3:2}}{\sqrt{f}}. \frac{3\sqrt{r}}{\sqrt{(4f+9r)}} - t = \frac{1}{2}.(4f+9r).\sqrt{\frac{r}{f}} - t = \frac{4}{3}\sqrt{fr}$; und $x = \frac{1}{2} r$ woraus man die Gleichung für die apollonische Parabel (573) erhält, daß $b = \frac{16}{27} f$. In andern Fällen kommen mehr zusammengesetzte Linien heraus.

577. I. AC sey ein Kreis, dessen Halbmesser $= e$; und $2er - rr = tt$. Die Linie, welche durch Abwickelung des Kreises entstehet, läßt sich folgendergestalt leicht verzeichnen: An den Punct C des Kreises, dessen Bogen AC ist, ziehe man eine Tangente CE; und nehme $CE = c +$ dem Bogen AC; so ist E in dieser Linie. Weil nun $\frac{e-r}{t} dr = dt$; und $\frac{edr}{t} = ds$ so ist (M)

$y = \frac{(s+c).(e-r)}{e} - \sqrt{(2er - rr)}$; (N)

$x = c$

$x = c + r - (s + c).\ \frac{\sqrt{(2er - rr)}}{e}$ Gäbe es nun eine algebraische Gleichung zwischen x und y; so liesse sich aus derselben mit (M) vereinigt eine zwischen x; s; r; und aus dieser letztern mit (N) vereinigt eine zwischen s und r machen, wieder (Alg. 616.)

II. ACQ 30 F. sey ein Kreisbogen um den Mittelpunct K; aus dessen Abwickelung AEM entstehe, wo $c = o$; der Bogen AC sey $= w$; und $CQ = dw$; so kann man nach (567) EM als einen Kreisbogen ansehen, der C zum Mittelpuncte hätte, und das Maas des Winkels N $= CKQ$ (568) wäre. Also ist $\frac{EM}{w} = \frac{dw}{e}$. Daraus folgt $AM = \frac{ww}{2e}$; auch ist das unendlich kleine Dreyeck $MNE = \frac{1}{2}w.\frac{wdw}{e}$ folglich die Fläche zwischen der geraden Linie QM, und den Bogen, AM der abgewickelten Linie, und AQ des Kreises, $= \frac{w^3}{6e}$ Für $w = 2e\pi$ wo $1 : \pi$ die Verhältniß des Durchmessers zum Umfange ist; giebt sich die Länge der durch die Abwickelung des ganzen Kreises entstandenen krummen Linie

Linie $= \frac{4ec\pi\pi}{2c} = 2e\pi\pi$ oder sie ist die dritte Proportionallinie zum Durchmesser und zum Umfange des Kreises, von dem sie entsteht, oder auch, sie ist $2e\pi.\pi$, dem halben Umfange eines Kreises gleich, dessen Halbmesser $2e\pi$, der Umfang des vorigen Kreises, als der letzte Krümmungshalbmesser der Linie AEM wäre. Dieses neuen Kreises Fläche wäre $2e\pi.2e\pi\pi = 4ee\pi^3$, dreymahl so groß als $\frac{8e^3\pi^3}{6c}$ die Fläche zwischen der ganzen aus der Abwickelung entstandenen Linie, ihren letzten Krümmungshalbmesser, und dem abgewickelten Kreise.

III. Weil ein unendlicher Faden unzählich vielmahl um den Kreis könnte seyn gewickelt gewesen, so lässt sich diese Abwickelung unzählich vielmahl wiederhohlen, daß jedesmahl ein neues Stück der abgewickelten Linie herauskömmt. Sie windet sich also nach Art einer Spirallinie unzählich vielmahl um den Kreis herum, woraus ebenfalls erhellt, daß sie transcendentisch ist. (Alg. 577.)

IIII. Ich habe dieses Exempel angeführt zu zeigen, wie leicht sich oftmahls Quadraturen und Rectificationen durch die Abwickelung finden lassen, die sonst viel schwerer zu entdecken wären. Ein anderes hieher gehöriges Exempel nächst diesem giebt Joh. Bernoulli Lect. Hosp. 20.

Methode die krummen Linien zu finden, die ihren Evoluten ähnlich sind.

578. Erkl. Wenn F; A; und E; C; 31 F. zwey Paare zusammengehöriger Puncte sind, daß nähmlich F; E; die Endpuncte der Tangenten AF; uud CE = FA + AC sind; und wenn sich alsdenn die Halbmesser der Krümmung bey F; A; beständig wie die bey E; C; oder allemahl wie 1 : n verhalten, so heisst die krumme Linie FE; ihrer Evolute AC; ordentlich ähnlich (directe similis) und 1 : n die Verhältniß der Aehnlichkeit.

579. Der Halbmesser der Krümmung bey E sey = r; so ist der bey C = nr; des Bogens FE Element sey = ds; also der Winkel am Mittelpuncte des Krümmungskreises $= \frac{ds}{r}$ = dem Winkel am Mittelpuncte des Krümmungskreises bey C (568) also ist der Kreisbogen, welcher diesen letzten Winkel misst, oder des Bogens AC Element $= \frac{ds}{r} \cdot nr = nds$ und der Bogen AC = ns + Const.

580. Lehnsatz. Alle ähnliche krumme Linien lassen sich als ähnliche Vielecke von unzählich viel Seiten ansehen, weil sich ihre Bogen

Bogen Elementen, die proportionirt seyn und gleiche Winkel machen müssen, unendlich nähern. (68) Also sind bey allen ähnlichen krummen Linien, gerade Linien proportionirt, die auf ähnliche Art wie Alg. 387. bestimmt, oder nach ähnlich liegenden Puncten (G. 39. S.) gezogen werden; und ähnlich bestimmte Paare von Linien, machen gleiche Winkel.

581. Erkl. Der Linie AMB 32. F. Evolute sey bma; so daß A; M; B; und b; m; a; zusammengehörige Puncte sind. Verhalten sich nun die Halbmesser der Krümmung bey A und B; wie die bey a und b; das ist, verkehrt wie die Halbmesser der Krümmung an den zugehörigen Puncten der Evolute, so heisst AB ihrer Evolute verkehrt ähnlich. Die Theile nähmlich, die einander ähnlich sind, liegen in der Linie, die aus der Abwickelung entstanden ist, von A nach B; und in der Evolute von a nach b; das ist, von dem Puncte, der A zugehört, nach demjenigen welcher B zugehöret.

582. Zus. Wenn AC; BC; bc; ac; die Normallinien an den zusammengehörigen Puncten sind, so ist ∠ACB = bca (568) und AC; BC = ac; bc (580).

584. Wenn M; m; ein paar andere zusammengehörige Puncte sind, und die Normallinie bey m; ac in n schneidet, so wird sie verlängert, bc unter einem Winkel = ANM schneiden (568).

Aber an dem Dreyecke das sie solchergestalt mit nc und der Verlängerung von bc macht, ist bcn ein äuserer Winkel, und der Winkel dieses Dreyecks bey n ist seinem Scheitelwinkel, anm gleich: Folglich ist der Winkel unter dem sie bc schneidet = bca — anm welches also = ANM seyn muß; Da nun bca = BCA (§82) so ist ANM + anm = BCA.

§84. Mit dem Puncte M in AMB, habe μ in aμb eine ähnliche Lage, oder es verhalten sich die Bogen AM: AB = aμ: ab: $\mu\nu$ sey die Normallinie bey μ; so ist, weil die beyden Normallinien $\mu\nu$; aν; auf ähnliche Art mit den beyden MN; AN; bestimmt werden, wegen der Aehnlichkeit der Bogen aμ; AM; a$\nu\mu$ = ANM (§80) also a$\nu\mu$ + anm = ACB (§82).

§85. Weil ab beständig nach einer Seite hohl ist; (§63) so machen die Normallinien anfangs nahe bey a ganz kleine Winkel mit ac; die nachgehends bis an die Gröſſe acb wachsen: da sich nun diese Winkel wie alles übrige nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern, so giebt es einen efa = $\frac{1}{2}$ acb wo E; e; zusammengehörige Puncte sind. Wenn man sich also vorstellt, daß die Normallinie mn in diese Lage ef komme, so wird mna = $\frac{1}{2}$ acb = $\mu\nu$a (§84) also muß $\mu\nu$ entweder ihr parallel, oder mit ihr einerley seyn: das erste findet nicht statt; denn weil die Normallinien bey a und b in c zusammenstossen, so

sind

sind die Tangenten bey a und b nicht parallel, und weil der Bogen a b stets nach einer Seite hohl ist, so können zwischen a und b keine parallelen Tangenten, also auch keine parallelen Normallinien vorkommen; Also fallen μ und m zusammen; oder die Puncte E; e welche bey der Abwickelung zusammengehören, haben in ihren Bogen auch ähnliche Lagen, und es ist AE: AB = ae: ab. Alle andere Puncte aber als die beyden E; e; werden so beschaffen seyn, daß sie nicht zugleich zusammengehörig und ähnlich liegend sind. So sind M und m zusammengehörig, aber M und μ ähnlich liegend.

§86. Wenn e f von den Normallinien an m und μ, in r und ϱ geschnitten wird, so ist f r n = e f a — m n a = $\frac{1}{2}$ a c b — m n a $\nu\varrho$ f = $\mu\nu$ a — e f a = $\mu\nu$ a — $\frac{1}{2}$ a c b also f r n — $\nu\varrho$ f = a c b — ($\mu\nu$ a + m n a) = 0 oder e r m = e $\varrho\mu$; oder die Bogen e μ; e m haben gleiche Weite.

§87. A F E + a f e = A C B (§83) a f e = $\frac{1}{2}$ a c b (§85) = $\frac{1}{2}$ A C B (§82) also A F E = $\frac{1}{2}$ A C B = a f e.

§88. Lehnsatz. Aufg. Wenn ein Bogen, dessen Halbmesser = 1; die Länge $\int \frac{ds}{\sqrt{(\alpha + \beta ss)}}$ ist; zum Sinus z; zum Cosinus ζ hat, die Integrale von z ds und ζ ds zu finden.

Aufl. I. Weil $\frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}} = \frac{ds}{\sqrt{(\alpha+\beta ss)}}$ (281) so ist $zds = -\sqrt{(\alpha+\beta s^2)}.d\sqrt{(1-zz)}$ Man setze $\int zds = -\sqrt{(\alpha+\beta s^2)}.\sqrt{(1-zz)}+q$; so kömmt, wenn man auf beyden Seiten differentiirt, und was sich aufhebet wegläßt;

$dq = \frac{\beta sds.\sqrt{(1-zz)}}{\sqrt{(\alpha+\beta s^2)}} = \beta sdz$ folglich $q = \beta sz + r$ wo nach einem ähnlichen Verfahren, $dr = -\beta zds$ herauskömmt. Also ist $\int zds = -\zeta.\sqrt{(\alpha+\beta s^2)} + \beta sz = \int \beta zds$ oder

$$\int zds = \frac{\beta sz - \zeta\sqrt{(\alpha+\beta s^2)}}{1+\beta}$$

II. $\zeta ds = dz\sqrt{(\alpha+\beta s^2)}$ also $\int \zeta ds = z\sqrt{(\alpha+\beta s^2)} + q$ und $dq = -\frac{\beta sds.z}{\sqrt{(\alpha+\beta ss)}} - \frac{\beta zsdz}{\zeta} = +\beta sd\zeta$ also $q = \beta s\zeta + r$ und $dr = -\beta\zeta ds$ also

$$\int \zeta ds = \frac{z\sqrt{(\alpha+\beta s^2)} + \beta s\zeta}{1+\beta}$$

III. Diese Formeln sind in dem einzigen Falle nicht brauchbar, wenn $\beta = -1$; Alsdenn aber ist $\frac{ds:\sqrt{\alpha}}{\sqrt{(1-ss:\alpha)}}$ das Element eines Kreisbogens, dessen

deſſen Sinus $z = s : \sqrt{\alpha}$ (281); alſo $\zeta = \sqrt{(1 - ss : \alpha)}$ und $z\,ds = \frac{s\,ds}{\sqrt{\alpha}}$ davon das Integral $= \frac{ss}{2\sqrt{\alpha}}$;

Ferner ſey Gp 17 F. $= s : \sqrt{\alpha}$ für CD $= 1$; ſo iſt $pP = ds : \sqrt{\alpha}$; $pn = \zeta$ und des Kreisſtückes CDMP Differential $= \frac{\zeta\,ds}{\sqrt{\alpha}}$ alſo $\int \zeta\,ds = \sqrt{\alpha}$. CDMP $= \sqrt{\alpha}$. ($\frac{1}{2}$ Bog. cosPM $+ \frac{1}{2}$ CP. PM) $= \frac{\sqrt{\alpha}}{2}$. B sin $\frac{s}{\sqrt{\alpha}} + \frac{s\sqrt{1 - ss : \alpha}}{2}$

589. Aufg. Die krumme Linie FE zu finden, die ihrer Evolute AC ordentlich ähnlich iſt.

Aufl. I. Der Bogen FE 31 F. heiſſe σ und ſein Krümmungshalbmeſſer bey E ſey $= r$; welcher von F nach E wachſe; dieſes ſchränkt die Aufgabe nicht ein, weil man den Bogen σ von jedem willkührlich angenommenen Puncte nach der Seite nehmen kann, nach welcher der Krümmungshalbmeſſer wächſt. Der Krümmungshalbmeſſer in F; oder FA ſey $= a$; ſo iſt der Bogen AC $= n.\sigma$ und $a + n\sigma = r$ alſo $n = \frac{dr}{d\sigma}$ oder $nr = \frac{r\,dr}{d\sigma}$; weil $\sigma = \frac{r - a}{n}$. Man ſetze $\sigma + \frac{a}{n} = s$;

so ist $s = \frac{r}{n} = GE$ 31 F. Wenn $FG = \frac{a}{n}$.

So ist FE ihrer Evolute dergestalt ähnlich, daß sich ähnlich bestimmte Linien in beyden wie 1 : n verhalten.

II. Man suche hieraus für FE eine Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten. Wenn $dx = q\,ds$ also $dy = ds \sqrt{(1 - qq)}$. So ist (§43) $\sqrt{(1 + pp)} = \frac{1}{q}$ und $p = \frac{\sqrt{(1-qq)}}{q}$ und $dp = -\frac{dq}{qq\sqrt{(1-qq)}}$ also aus §43 (III.) $r = \frac{ds\sqrt{(1-qq)}}{dq} = n.s$ (I.) oder $\frac{ds}{s} = \frac{n\,dq}{\sqrt{(1-qq)}}$ also n. Bog sin $q = l\frac{s}{a}$ oder q ist der Sinus eines Bogens, dessen Länge $\frac{1}{n} l \frac{s}{a}$ ist; also $\sqrt{(1-qq)} = \text{cos Bog } \frac{1}{n} l \frac{s}{a}$; also $dx = ds.\ \text{sin Bog } \frac{1}{n} l \frac{s}{a}$; $dy = ds.\ \text{cos Bog } \frac{1}{n} l \frac{s}{a}$

III. Weil

III. Weil $\frac{1}{n} l \frac{s}{a} = \int \frac{ds}{ns}$ so ist in (588) $x = \int z\,ds$: $y = \int \zeta\,ds$; $\alpha = 0$; $\beta = nn$; $z = \sin \mathfrak{B} \frac{1}{n} l (s:a)$; $\zeta = \cos \mathfrak{B} \frac{1}{n} l \frac{s}{a}$ also

$$x = \frac{nn.s.z - n.s.\zeta}{1+nn}; \quad y = \frac{n.sz + nns\zeta}{1+nn}$$

wo x und y für $s = o$ verschwinden. Also in 31 F. $GM = x$; $ME = y$ (I).

IIII. Daraus wird $\frac{(1+nn).x}{ns} = nz - \zeta$ und $\frac{(1+nn)y}{ns} = z + n\zeta$ folglich

$$\frac{(1+nn)^2 xx}{nnss} = nnzz - 2nz\zeta + 1 - z^2$$

$$\frac{(1+nn)^2 yy}{nnss} = z + 2nz\zeta + nn - nnzz$$

also $\frac{(1+nn)^2 (xx+yy)}{nnss} = 1 + nn$ oder

$$xx + yy = \frac{nn}{1+nn} \cdot ss$$

V. Eine Gleichung zwischen den Coordinaten allein erhält man so: $z = \frac{dx}{ds}$ und $\zeta = \frac{dy}{ds}$ (II)

also kömmt in (III); $\frac{(1+nn).x}{ns} = ndx - dy$

$\frac{(1+nn).y}{ns} = ndy + dx$ Das obere mit dem unteren dividirt, giebt $\frac{x}{y} = \frac{ndx - dy}{ndy + dx}$; daraus findet man $n.(ydx - xdy) = ydy + xdx$; Weil was rechter Hand steht, das halbe Differential von $xx + yy$ ist, so dividire man damit auf beyden Seiten. Dieses giebt $\frac{n.(ydx - xdy)}{xx+yy} = \frac{ydy + xdx}{xx+yy}$ Nun ist $ydx - xdy = yy.d(x:y)$ also was linker Hand steht $= \frac{n.d(x:y)}{\frac{xx}{yy}+1} = n$ d B. tang $\frac{x}{y}$ (299) folglich n. Bog. tang $\frac{x}{y} = l(\sqrt{(xx+yy)}:a)$

VII. Es sey $\sqrt{(1+nn)} = m$; die Sehne GE 31 F. $= u$; so ist (IIII) $u = \frac{n}{m}s$ folglich $\frac{n}{m} = \frac{du}{ds} = \frac{EI}{Ee}$ 31 F. wenn e dem Puncte E unendlich nahe ist; $=$ sin Eel; also ist cos Eel oder sin eEI $= \frac{1}{m}$ und tang eEI $= \frac{1}{n}$; das

Ele-

Element, oder die Tangente der krummen Linie GE, macht also mit der geraden Linie GE einen unveränderlichen Winkel, dessen Tangente $\frac{1}{n}$ ist. Folglich ist GE eine logarithmische Spirallinie (510)

VIII. Der Bogen der Evolute AC von A rechter Hand, in 31 F. gerechnet ist $= r - a$ (I) folglich $= -a$ für $r = o$; d. i. für den Punct G der Linie GE wo $s = o$; (I) und die Evolute geht auch durch G; weil sich EC oder r; für den Punct G der krummen Linie GE in o verwandelt. Also ist der Bogen AG der Evolute $= a = AF$; daß sein Werth verneint wird, zeigt nur an, er werde von A linker Hand genommen. Und so ist der Bogen GAC der Evolute $= a + n. \sigma = ns$ (I). Folglich verhalten sich die veränderlichen Bogen GE; GC; von einem Puncte G angerechnet, beständig wie $1 : n$; daher denn auch die Sehnen GE; GO; als ähnlich bestimmte Linien in dieser Verhältniß stehen werden. (I). Also ist die Sehne $GC = nu = \frac{n}{m} \cdot ns = \frac{nw}{m}$ wenn der Bogen GC der Evolute, w heißt; der Winkel also, welchen die Evolute bey C mit GC macht, hat zur Tangente $\sqrt{\left(dw^2 - \frac{nndw^2}{mm}\right)} : \frac{n}{m} dw$ oder $\frac{1}{n}$ wie der Winkel GEe (VII).

VIIII.

VIIII. Wenn $n = 1$ oder wenn die Winkel (VIII : VII) 45 Grad sind, so verwandelt sich die Aehnlichkeit (I) in die völlige Gleichheit, oder aus Abwickelung einer solchen logarithmischen Spirale GAC welche mit GC allemahl einen Winkel von 45 Gr. macht, entsteht völlig eben diese Spirale GFE.

590. Aufg. Die krumme Linie AMB zu finden, die ihrer Evolute a m b verkehrt ähnlich ist 32 F.

Aufl. I. Von dem Punete E (585) wo der Halbmesser der Krümmung $Ee = a$; ist, rechne man den Bogen $EM = \sigma$; der Halbmesser der Krümmung bey M sey $Mm = r$; so ist der Bogen $em = r - a$ Nun nehme man μ (584) und die Verhältniß der Aehnlichkeit (578) sey $= 1 : n$; so ist der Bogen $e\mu = n.\sigma$ und bey μ der Halbmesser der Krümmung $= n.r$. Die Tangente an μ begegne der krummen Linie AMB in R, daß μ; R; zusammengehörige Puncte sind; der Bogen ER heisse S; und R sey $= R\mu$; so ist $e\mu = a - R$;

II. Der spitzige Winkel unter dem $R\mu$ und Ee einander schneiden, ist $= \varrho$ (568) $=$ erm (596). Der spitzige Winkel unter dem $R\mu$ und AC einander schneiden, sey φ; so ist, wegen des Dreyecks, das die Verlängerungen von $R\varphi$; EF; unter AC; mit φF machen, 180 Gr. $- \varphi =$

180

180 — EFA + erm oder φ = EFA — erm = efa — erm (587) = fnr = mna;

III. An dem Puncte in ab, der mit R eine ähnliche Lage hat, muß die Normallinie mit ac einen Winkel = φ machen; weil nähmlich die beyden Normallinien, die an diesem Puncte, und die bey R; imgleichen die beyden andern, die bey a, und die bey A; auf ähnliche Art bestimmt werden, und also gleiche Winkel machen müssen (580); also muß diese Normallinie mit mn (II) parallel oder einerley seyn; und nur das letzte findet statt (585) also ist m der mit R ähnlichliegende Punct.

IIII. Folglich em = n.S und der Krümmungshalbmesser bey m; = n. R (I)

V. Also r — a = em (I) = n.S. (IIII) oder $S = \frac{r-a}{n}$ und auch aus (I) a — eμ oder R = a — n. σ. Die Weite des Bogens EM ist = erm (568) = ϱ (II) = der Weite des Bogens ER (568). Soll dieses in allen Puncten beyder Bogen statt finden, so sind die Differentiale der Winkel gleich, welche EF mit MN und Rφ macht, oder es ist $\frac{d\sigma}{r} = \frac{dS}{R}$; aber $\frac{dS}{R} = \frac{dr}{n(a-n\sigma)}$ welches also $na\,d\sigma = nn s\,d\sigma =$

rdr

rdr giebt, woraus man durch die Integration $rr = 2na\sigma - nn\sigma\sigma + aa$ erhält, wenn $r = a$ für $\sigma = o$ werden soll (I).

VI. Aus der Gleichung $\sigma\sigma - \frac{2a}{n}\sigma + \frac{rr - aa}{nn} = o$ (V) das zweyte Glied wegzuschaffen (Alg. 282.) setze man $s = \sigma - \frac{a}{n}$, dieses giebt $r = \sqrt{(2aa - nnss)}$ und wenn der Bogen $AE = \frac{a}{n}$ so ist $AM = s$.

VII. Hat man vermittelst dieser Gleichung die krumme Linie bestimmt, so findet man den Punct E, um den gleich weite Bogen müssen abgeschnitten werden, damit die krumme Linie ihrer Evolute verkehrt ähnlich wird, wenn man $s = \frac{a}{n}$ nimmt, da denn $r = a$ wird.

VIII. Eine Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten $AP = x$; $PM = y$ zu finden, ist wie in (589; II) $r = \frac{ds.\sqrt{(1 - qq)}}{dq}$ also $\frac{ds}{r}$ oder $\frac{dq}{\sqrt{(1 - qq)}} = \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}}$ (V)

$= x$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{n}{a\sqrt{2}} \cdot ds}{\sqrt{\left(1 - \frac{nnss}{2aa}\right)}}$$ davon die Integrale

Bog sin q =. Bog sin $\frac{ns}{a\sqrt{2}}$ wo, wenn die beständige Grösse, die man addiren sollte = o gesetzt wird, q oder $\frac{dx}{ds}$ für s = o auch = o, folglich die krumme Linie in A auf die Axe senkrecht seyn muß.

VIIII. Man setze zuerst n = 1 da die gesuchte Linie ihrer Evolute nicht nur verkehrt ähnlich, sondern auch gleich ist. So kömmt Bog sin q = Bog sin $\frac{ns}{a\sqrt{2}}$ oder $q = \frac{s}{a\sqrt{2}}$ und $\sqrt{(1-qq)} = \frac{\sqrt{(2aa-ss)}}{a\sqrt{2}}$ also qds oder $dx = \frac{sds}{a\sqrt{2}}$ und $2ax\sqrt{2} = ss$ weil x und s zugleich verschwinden. Folglich ist die gesuchte krumme Linie eine Cycloide, (559) die in A den grössten Krümmungshalbmesser $a\sqrt{2}$ (VI) oder die kleinste Krümmung hat. Für den Punct E ist s = AE = (VI) a also $x = \frac{a}{2\sqrt{2}}$

X. Der

X. Der Halbmesser des beschreibenden Kreises oder was in 559; r hieſſe, und um Verwirrung mit (VIII) zu vermeiden, k heiſſen soll, ist so beschaffen, daß $8k = 2a\sqrt{2}$ oder $a = 2k\sqrt{2}$ oder $k = a : 2\sqrt{2}$. Wenn ACB oder acb = 90 Gr. so ist aus 559; mit Alg. 600 u. f. und der hieſigen 7 F. verglichen

31 F; A; P; M; B; C,
7 F; F; M; P; A; E,

oder was zwiſchen AC und CB 32 F. enthalten ist; wird mit der 7 F. einerley seyn, wenn man dieſe Figur hinten durch das Blatt anſieht, und ſie ſo hält, daß ihre FE mit AC 32 F. parallel ist. Da nun die halben Cycloiden AMB, $a\mu b$; (Alg. 609) einander gleich und ähnlich ſind, (I) ſo ſind, wenn amb mit FPA 7 F. verglichen wird

31 F; a; μ; b; c;
7 F; F; P; A; E;

oder die 7 F. auf der Seite des Blattes, wo ſie ſteht, ſo angeſehen, daß ihre AE mit bc 32 F. parallel ist, ſtellt acb der 32 F. vor.

Ferner ist bey Vorausſetzung eines rechten Winkels bey C 32 F. BC einerley mit AE der 7 F; folglich in gegenwärtiger 32 F; BC = bc = der halben Grundlinie (Alg. 602) = πk (Alg. 605). Und die Länge der halben Cycloide AB oder ab; 4 k (559). Auch Ab oder $a\sqrt{2}$ (VIIII) = 4 k; folglich die ganze Länge des Fadens ab + bA oder aB = $8k$.

XI.

XI. Wenn eine halbe Cycloide, die der a b gleich und ähnlich ist, an a b so gelegt wird, daß beyde einander in a berühren und ihre erhabenen Seiten gegen einander kehren, solchergestalt eine Figur wie C D G Alg. 20 F. herauskömmt, und ein Faden a μ b A an der ersten anliegt, so wird sich solcher, nachdem er sich von der halben Cycloide b μ a ganz in die Lage a B abgewickelt hat, wieder in verkehrter Ordnung auf die andere halbe Cycloide aufwickeln; und da er nothwendig hiebey eben die Linie, nur rückwärts beschreibet, die er beschriebe, wenn er auf derselben so wie um a b A läge und sich davon abwickelte; so entsteht durch diese Aufwickelung die an A B gehörige halbe Cycloide, welche mit A B zusammen eine ganze Cycloide ausmacht. Diese ganze Cycloide besteht nähmlich aus zwey Stücken wie F 2 A und 2 A F Alg. 35 F. in 2 A an einander gefügt, daß sie da eine gemeinschaftliche Tangente hätten; diese beyden Stücken aber machen zusammen eine ganze Cycloide wie A F 2 A Alg. 35 F. aus, weil die Stücken F 2 A; A F; einander gleich und ähnlich sind. (Alg. 609.)

XII. Soll die Abwickelung so verrichtet werden, daß die Puncte A und b zusammen fallen; so muß der Halbmesser der Krümmung bey A; = o seyn, (567) also muß A 32 F. mit A 7 F. einerley seyn, damit A b = o ist (557). Also müsste nun B 32 F. seyn, was F 7 F. ist. Um zu versuchen, ob dieses angeht, nehme man wie

der ACB = 90 Gr. an und ziehe MQ mit AC parallel; nenne ferner BQ = x; MQ = v; BM = s; So muß man in VI; erstlich n = 1 (VIII) denn σ = a − s setzen, und EB = a nehmen. Dieses giebt wie in VI; r = √(2aa − ss) wo r = 0 für s = a √2. Nun findet man wie in VIII; $q = \frac{s}{a\sqrt{2}}$ welches zeigt, daß für s = 0 oder in B, die krumme Linie auf CB senkrecht; aber für s = a √2; mit CB parallel ist, weil daselbst dx = ds. Folglich muß die Normallinie am Ende des Bogens a √2 von B an gerechnet, auf CB senkrecht stehen. Aber CA steht auf CB senkrecht, wie angenommen wird; und es giebt innerhalb des Bogens BA nicht zwo parallele Normallinien (585) folglich ist BA = a √2, also Ab = 0; daß aber BA und folglich ba ein Bogen einer Cycloide wie FA 7 F. ist, erhellt wie VIII. Hier also ist die Länge des Fadens = BA = ab = 4k (X) der wie in XI eine ganze Cycloide beschreiben kann.

XIII. Wenn nicht n = 1; so ist die Integralgleichung (VIII) zumahl ausser den Fällen, da $\frac{1}{n}$ eine ganze Zahl ist, unbequem, weil man da Winkel vervielfältigen muß. Man bediene sich alsdenn der Gleichung $\frac{dq}{\sqrt{(1-qq)}} = \frac{ds}{\sqrt{(2aa-nnss)}}$ oder

oder $q = \text{sin des Bogens} \int \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}} = z$

(588) wenn dorten $\alpha = 2aa$; $\beta = -nn$; Folglich $dx = zds$; $dy = \zeta ds$ und $x = \frac{nnsz + \zeta\sqrt{(2aa - nnss)}}{nn - 1}$

$y = \frac{nns\zeta - z\sqrt{(2aa - nnss)}}{nn - 1}$

Weil nun $\int \frac{ds}{\sqrt{(2aa - nnss)}} = \frac{1}{n}$ Bog $\sin \frac{ns}{a\sqrt{2}}$ (VII) so sind für ein gegebenes s; und folglich einen gegebenen $\sin \frac{ns}{a\sqrt{2}}$; z und ζ algebraisch gegeben, so oft n eine ganze Zahl ist. Weil man nur in Alg. 175; z und ζ als Sinus und Cosinus des einfachen Bogens, $\sin \frac{ns}{a\sqrt{2}}$ aber als den Sinus seines vielfachen ansehen darf, also zwischen diesen Sinus und z; ζ; allemahl eine algebraische Gleichung erhält, in der die gesuchten z; ζ; auf den Grad n steigen. Hieraus erhellt, daß so oft n eine ganze von 1 unterschiedene Zahl ist, x und y algebraisch gegeben, folglich diese krummen Linien algebraisch sind. Ihre Untersuchung lässt sich aber hier nicht weiter treiben, weil von den krummen Linien überhaupt im vor-

hergehenden zu wenig hat können abgehandelt werden.

591. Anm. Was 578. . . 590 enthalten, ist aus Eulers inuestigatione curuar. quae euolutae sui similes producunt; Comm. Ac. Imp Petrop. T. XII. genommen; wo diese Untersuchung weiter ausgeführt, und auch auf die ferneren Evoluten der Evoluten angewandt wird. Ich habe nur hie und da Anfängern nöthige Erläuterungen beygefügt. Euler erinnert selbst, daß man die beyden Linien, die ihren Evoluten, eine ordentlich, die andere verkehrt, ähnlich und gleich sind, leichter finden könne; wie solches Kraft Comm. Ac. Imp. Petrop. T. II. p. 216. gewiesen hat. Auserdem aber daß dieser Unterschied der Leichtigkeit eben nicht so gar viel beträgt, so hat es mir aus eben dem Grunde dienlich geschienen Eulers Vortrag hier zu erläutern, aus welchem er denselben erwählt hat, weil man dadurch nähmlich veranlaßt wird verschiedene Kunstgriffe beym Integriren, kennen zu lernen und zu gebrauchen.

592. Anm. Huygens hat zuerst eine krumme Linie, die ihrer Evolute gleich und ähnlich ist, nähmlich die Cycloide (590; VIII) entdeckt; S. sein zu Paris 1673 herausgekommenes Horologium oscillatorium Part III; wo überhaupt die Lehre von der Evolution synthetisch, nach Art der Alten, und ohne die Rechnung des Unendlichen, welche damahls noch nicht im Gebrauche war, abgehandelt wird. Diese Eigenschaft der Cycloide befindet sich daselbst Prop. VI. Hugen hat sie bey den Pendeluhren gebraucht. Die zweyte Linie, die ihrer Evolute ähnlich, aber nicht gleich ist, hat Tschirnhausen; Act. Erud. Lipf. Nou. 1682. bekannt gemacht. Die dritte, von welcher dieses entdeckt worden, ist die logarithmische Spirale (589; VII;) Jacob Bernoulli hat diese seine Erfindung ebenfalls Act. Erud. Lipf. Mai. 1692. (Op.

Iac.

Jac. Bern. n. 49) mitgetheilet. Weil diese Linie auf sehr viele andere Arten, durch welche sonst aus einer krummen Linie andere entstehen, immer sich selbst wieder darstellet, hat er sie zugleich als ein Denkmahl seiner Entdeckungen und als ein Sinnbild der Auferstehung, mit der Ueberschrift: Eadem mutata resurgo, auf seinen Grabstein setzen lassen. S. Battiers Leichenrede auf Jac. Bern. Op. Iac. Bern. T. I. p. 30. Diese Erfinder haben nur gewiesen, daß bey den krummen Linien, die sie betrachteten, die Aehnlichkeit zwischen den Evoluten, und den durch die Abwickelung entstandenen Linien statt finde: Die Absicht vorhergehender Untersuchung aber war überhaupt alle krummen Linien zu entdecken, wo diese Aehnlichkeit statt findet, und sich solchergestalt, wie der Erfolg weiset, zu überzeugen, daß sie nur bey denen, wo man sie zuerst entdeckt hat, statt finde, wovon noch Johann Bernoulli das Gegentheil gemuthmasst hatte, Lect. Hosp. 25. Op. T. I. p. 400.

Gleichungen zwischen Ordinaten aus einem Puncte und Perpendikeln auf die Tangenten.

593. Aufg. Für die krumme Linie BME 33 F. hat man eine Gleichung zwischen CM = y und einen Kreisbogen = u der um C mit dem Halbmesser e beschrieben ist, und den Winkel BCM misst. Diese Gleichung heisst (F). Man sucht eine Gleichung, die (L) heissen soll, zwischen CM, und CQ = t, dem Perpendikel auf die Tangente.

Aufl. Hier sind e; u; mit r; x (104) einerley. Wenn also dy = pdx und TCM 33 F.

wie 8 F. = R ist, so ist MT = $y\sqrt{(eepp + y^2)} : ep$; und $\frac{MC.CT}{MT}$ das ist CQ oder $t = \frac{y^2}{\sqrt{(e^2p^2+y^2)}}$. Ist p unmittelbar durch y allein gegeben, so ist die nur gefundene Gleichung alsobald (L). Ist aber p als eine Function von beyden veränderlichen Gröſſen vermengt gegeben, so hat man doch solchergestalt eine Gleichung zwischen p; u; y; die sich mit der zwischen u und y verbinden läſſt, daß man aus beyden zusammengenommen p wegschaffen, und eine Gleichung zwischen y; u; t; finden kann; Weil nun die vorhin gefundene auch y; u; t; enthält, so kann man wieder aus beyden zusammengenommen u wegschaffen und eine zwischen y und t finden.

Exempel.

594. Für die archimedische Spirale ist u; x in 530 hier y; u; und $t = \frac{y^2}{\sqrt{(y^2+ee:4\pi\pi)}}$

595. Für die logarithmische (510) $\frac{ydu}{edy} = m$ also $p = \frac{y}{me}$ und $t = \frac{my}{\sqrt{(1+mm)}}$ woraus $\frac{t}{y}$ = dem Sinus des Winkels CMT dessen Tangente m ist, folgt.

596.

596. Aufg. Den Halbmesser der Krümmung durch CM und CQ auszudrucken.

Aufl. I. Er heisse = r; MN 34 F. sey ein Bogen der krummen Linie, an dessen beyden Endpuncten MQ; NV Tangenten, und CQ; CV; auch MK; NK Perpendikel darauf sind; welche sich in Halbmesser des Krümmungskreises für MN verwandeln, wenn MN verschwindet und H der Krümmungswinkel wird. CV schneide HQ in L. Nun ist allemahl QHV = MKN auch = QCL; also $\frac{QL}{CQ}$ = tang MHV; welches also verschwindet, wenn H der Krümmungswinkel wird. Ferner ist LV: LQ = VH: QC; wo die letztere Verhältniß endlich bleibt, wenn M; H; N; zusammen fallen, da sich HV der MQ, und die Verhältniß HV: QC der MQ: QC unendlich nähert, die Verhältniß aber MQ: QC; ist allemahl endlich, auser in dem einzigen besondern Falle, wenn CM auf die Tangente senkrecht ist. Diesen Fall so ausgenommen ist allemahl der Quotient $\frac{LV}{LQ}$ endlich. Aber CL = $\sqrt{(CQ^2 + QL^2)} = CQ + \frac{QL^2}{2CQ} \ldots\ldots$

also $\frac{CL - CQ}{QL} = \frac{QL}{2CQ}$ folglich verschwindet

$\frac{CL - CQ}{QL}$ wenn H der Krümmungswinkel wird.

Weil nun $CV = CL + LV$; so ist $\frac{CV - CQ}{LQ}$ $= \frac{CL - CQ}{LQ} + \frac{LV}{LQ} = \frac{LV}{LQ}$ wenn H der Krümmungswinkel wird und der erste Theil des Werthes von diesen Quotienten, aber nicht der andere, verschwindet. Also ist für den Krümmungswinkel $LV = CV - CQ = dt$. Ferner $\frac{LV}{HV} =$ tang H = tang K = K wenn die Winkel verschwinden, und HV sich unendlich dem Werthe $MQ = \sqrt{(yy - tt)}$ nähert. Also ist K oder $\frac{ds}{r} = \frac{dt}{\sqrt{(yy - tt)}}$ das ist $r = \sqrt{(yy - tt)} \cdot \frac{ds}{dt}$.

II. Wenn MS ein Kreisbogen aus dem Mittelpuncte C ist, so ist (505) der Ausschnitt MCN oder $\frac{1}{2} y \sqrt{(ds^2 - dy^2)}$ hier auch $= \frac{1}{2} t ds$ also $(yy - tt) ds^2 = yydy^2$. Daraus folgt $r = \frac{ydy}{dt}$.

Er. Wenn für die logarithmische Spirale (595) $t = ny$ so ist $r = \frac{y}{n}$ wie (556)

597.

597. Um K sey ein Kreis mit dem Halbmesser r beschrieben. Wenn man nun nach Gefallen einen Punct C nähme, daß KC = k; und eine Gleichung zwischen CM und CT für jeden willkührlichen Punct dieses Kreises suchte, so wäre r unveränderlich und rdt = ydy also rt = Const + ½yy. Weil nun KC auf des Kreises Tangente an der Stelle, wo er KC schneidet, senkrecht steht, so ist für diese Stelle y = t. Aber es ist auch für dieselbe y = k − r; also r.(k − r) = Const $\frac{+(k-r)^2}{2}$ woraus 2rt = yy + 4kr − 3rr − kk folgt. Wenn k = r, oder C im Umfange des Kreises liegt, und CM eine Sehne wird, so kömmt t = yy: 2r wie auch wenn k = 3r; weil diese beyden Werthe von k die Wurzeln der Gleichung kk = 4kr − 3rr sind. Für k = o ist 2rt = yy − 3rr; Hier muß man y = − r setzen, weil bey der Integration überhaupt das y das in die Linie CK fiele = k − r gesetzt worden; dieses wird hier = − r; und jedes y das durch C geht, d. i. jeder gegenwärtige Halbmesser fällt nun in CK; da man nun auch y das auf CK fiele, = t setzt, so ist hier t = − r und dieses giebt − 2rr = rr − 3rr wie sich gebührt: Diese unerwartete Nothwendigkeit hier y = − t beruhet nähmlich darauf, weil man bey der Integration CK > r angenommen.

Ein Punct kann als ein Kreis angesehen werden, dessen Halbmesser $= o$ wäre. Für ihn also kömmt $o = yy - kk$ das ist $y = k$. Wenn nähmlich alle Puncte M des Kreises in K zusammengehn, so giebt es keine andere CM als die einzige CK. Jede Linie durch K kann eine Tangente dieses in einen Punct verwandelten Kreises heissen: also giebt es für das einzige $y = k$; unzählige t. Daher ist t in der Gleichung nicht zu finden, durch die es sich nicht bestimmen liesse.

§98. Aufg. Wenn eine Gleichung zwischen CM und CQ 34 F. gegeben ist, daraus eine zwischen CM und u (§93) zu finden.

Aufl. Diese Aufgabe ist die umgekehrte von §93; und sucht (F) aus (L). Es ist aber $tds = yydu : e$ (§96; II) daraus findet man, wenn statt ds sein Werth gesetzt wird, nach gehöriger Rechnung $\frac{tdy}{y\sqrt{(yy - tt)}} = \frac{du}{e}$. Hier kann man nun wegen der gegebenen Gleichung zwischen y und t, annehmen, auf der linken Seite sey alles durch y gegeben; folglich wird die gesuchte Gleichung $\int \frac{tdy}{y\sqrt{(yy - tt)}} = \frac{u}{e}$ seyn, wo die Integrale linker Hand einer Function von y; und also y durch u gegeben ist, so daß man für jedes angenommene u, den zugehörigen Werth

von

von y finden kann. Das angenommene u aber giebt die Lage, und der Werth von y die Länge der Linie CM, daß man also solchergestalt alle Puncte M finden, d. i. die krumme Linie verzeichnen kann.

Exempel.

599. I. Es sey $t = ahy : \sqrt{((aa - hh) y^2 + aahh)}$. Man nehme an, der Anfang des Bogens u werde so genommen, daß u zunimmt, wenn y abnimmt, also beyder Differentiale entgegengesetzte Zeichen haben; so ist nach gehöriger Rechnung $\frac{du}{e} = -\frac{mdy}{y^2}$ wo $m = \frac{ah}{\sqrt{(aa-hh)}}$ folglich $\frac{u}{e} = \text{Const} + \frac{m}{y}$; Es sey $y = a$ für $u = o$ so ist $u = \frac{em.(a-y)}{ay}$ oder $y = \frac{ema}{au + em}$

II. Für $y = a$ ist $t = h$; also $\frac{CQ}{MQ}$ oder die Tangente des Winkels CMQ für $u = o$; $= \frac{h}{\sqrt{(aa - hh)}}$ heißt sie ϑ so ist $m = a\vartheta$ und dieses giebt, wenn nach $e = 1$ gesetzt wird $y = \frac{a\vartheta}{u + \vartheta}$

III. Ge-

III. Gesetzt, der Winkel, den die krumme Linie da, wo u = o ist, mit der Ordinate macht, sey = 45 Gr. so ist ϑ = 1 und y = a: (u + 1).

IIII. Die Verzeichnung in (III) geschieht folgendergestalt. Man ziehe 33 F. CA = a nach Gefallen, und beschreibe mit CG = 1 den Kreisbogen NG = u; Ist u in Graden gegeben, so hat man unmittelbar den Winkel ACG; und muß alsdenn die Länge des Bogens u in Theilen des Halbmessers suchen, um den Quotienten a: (u + 1) oder y = CM zu haben. Ist aber u in Theilen des Halbmessers gegeben, so hat man unmittelbar die Länge CM, und sucht nun u in Graden, den Winkel ACH zu finden.

Wäre u = 60 Gr. gegeben, so fände man die Länge dieses Bogens = 1, 047... also
CM = a: 2, 047 = 0, 48. a

Wäre u = $\frac{1}{2}$ gegeben, so müsste man CM = a: $\frac{3}{2}$ = $\frac{2}{3}$ a in einem Winkel ACM = 28 Gr. 38 M. ziehen (311).

V. Joh. Bernoulli Act. Er. Lipf. 1713. Op. T. I. n. 90. § 65; hat die Linie (II) die hyperbolische Spirallinie genannt, wegen der Aehnlichkeit, die ihre Gleichung mit der asymptotischen Gleichung der Hyperbel (Alg. 412) hat. Ihre Ordinaten verhalten sich verkehrt wie die Abscissen u + ϑ denn es ist klar, daß man den Bogen ND = ϑ nehmen, und die Bogen DG statt NG brauchen kann. Daher heisst Bernoulli

sie

ſie auch die verkehrte archimediſche Spirale. (Alg. 580.) Euler Mech. L. I. §. 671; II. Meine Anfgr. d. höhern Mechanik I. Abſch. 264.

600. Es ſey $t = y\sqrt{\frac{(a-y)}{a}}$; alſo $y^2 - t^2 = y^3 : a$, und wenn $e = 1$ geſetzt wird, $du = \frac{dy}{y}\cdot\sqrt{\frac{a-y}{y}}$. Man ſetze $\sqrt{\frac{a-y}{y}} = w$ alſo $\frac{a}{ww+1} = y$; ſo kömmt $du = -\frac{2wwdw}{ww+1} = -2dw + \frac{2dw}{ww+1}$; Folglich $u = 2$ Bog tang $w - 2w$ wenn $u = o$ wo $y = a$ oder $w = o$.

Hieraus fließt folgende Verzeichnung der krummen Linie: Man nehme ein y nach Gefallen an, dadurch iſt eine Zahl w; folglich auch Bog tang w; und daher u als eine Zahl für den Halbmeſſer $= 1$ gegeben. Daraus findet ſich der Winkel ACM 35 F. in dem man das angenommene $y =$ CM legen muß.

Wenigſtens im erſten Quadranten, wo jeder Bogen kleiner als ſeine Tangente iſt, wird der gefundene Werth von u, allemahl verneint ſeyn. Dieſes bedeutet weiter nichts, als daß man die Bogen von G aus nicht nach N ſondern nach K nehmen

nehmen müsste. Es rührt aber daher: Aus der Differentialgleichung zwischen u und w erhellt, daß u wächst, wenn w abnimmt; aber $w = \sqrt{\left(\frac{a}{y} - 1\right)}$ ist nur möglich, wenn y nicht grösser als a ist, und nimmt ab, wenn y wächst; Also wachsen zwar u und y zugleich, oder ihre Differentiale haben einerley Zeichen, aber für das grösste $y = a$ muß angenommener Massen $u = o$ folglich für kleinere verneint seyn, daß dieses verneinte u als eine verneinte Grösse betrachtet abnimmt, das ist, bejahte Differentiale hat, und folglich als wachsend angesehen wird, wenn die bejahte Ordinate wächst. Will man also für u einen bejahten Ausdruck haben, so darf man nur setzen, es soll sich mit der grössten Ordinate $= a$ anfangen, und folglich wachsen, indem die Ordinaten abnehmen, das ist, man darf nur $-du = \frac{dy}{y} \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{y} - 1\right)}$ setzen, so erhält man nach eben der Rechnung $u = 2.(w - \mathfrak{B} \text{ tang } w)$ Es sey $a = 1$ und $y = \frac{1}{2}$ also $\mathfrak{B}$ tang $w = 45$ Gr. So ist $2w = 2, \frac{2\,\mathfrak{B} \text{ tang } w = 1,\ 57079}{u = o,\ 42921 = GN}$

Den Winkel ACG zu finden, schliesst man $3,141 \ldots o,42921 = 180$ Gr: ACG; also beynahe ACG $= 180$ Gr. $\frac{43}{314} = 24$ Gr; da man denn auf der solchergestalt gezogenen CN; eine Länge $= \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$ für den Punct der krummen Linie nimmt. Ihr erster Punct für $u = o$ wäre G.

B tang w wächst mit w bis an 90 Gr. wenn $w = \infty$ für $y = o$ wird. Da wird auch $u = \infty$ also windet sich die krumme Linie unzählich vielmahl um C herum.

Aus $t = \left(y^2 - \frac{y^3}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ folgt $dt = \frac{1}{2}$.

$\frac{2a - 3y}{\sqrt{(aa - ay)}} dy$ und (596) $r = \frac{2n\sqrt{(aa - ay)}}{2a - 3y}$

welcher in C verschwindet. Eul. Mech. L. II. §. 429.

601. Aufg. Aus der Gleichung zwischen y und u wo $e = 1$ eine zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $CP = x$; $PM = z$ zu finden 33 §.

Aufl. I. Wenn u als ein Bogen angegeben wird, dessen Sinus, oder Tangente u. s. w. wie man will, algebraisch durch y gegeben ist; so ist folglich allemahl cos u durch y gegeben. Aber $\frac{x}{y} = \cos u$. Also ist eine algebraische Gleichung zwischen x und y, das ist, weil $zz = yy - xx$; zwischen x und z gegeben.

II. Ist aber u auf jede andere Art durch y gegeben, z. E. wie bey den Spirallinien, so lässt sich u aus dieser Gleichung mit der $\frac{x}{y} = \cos u$

ver-

verglichen nicht wegschaffen, weil zwischen dem Bogen und seinem Cosinus keine algebraische Gleichung statt findet (Alg. 613)

III. Diese Sätze lassen sich so ausdrucken: $\mathfrak{B}\cos\frac{x}{y} = \int\frac{dy}{p}$ (593) wo ich annehme, p sey durch y gegeben. Ist nun die Integrale ein Kreisbogen, dessen Cosinus algebraisch durch y gegeben ist, so kann man allemahl die Bogen auf beyden Seiten wegschaffen, und eine algebraische Gleichung zwischen x und y erhalten, sonst aber nicht.

602. Wenn zwischen CM und CV eine Gleichung gegeben ist, so findet man vermöge 598 folgende $\mathfrak{B}\cos\frac{x}{y} = \int\frac{tdy}{y\sqrt{(yy-tt)}}$ die algebraisch wird, so oft das Integral ein Kreisbogen ist, dessen Cosinus sich durch y ausdrucken lässt.

Exempel.

603. Es sey $u = \mathfrak{B}\,\text{tang}\,y : a$; So ist $\cos u = a : \sqrt{(aa+yy)}$ welches $= x : y$ gesetzt die Gleichung $z = xx : \sqrt{(aa+xx)}$ giebt.

604. Für die archimedische Spirale (530) $\int\frac{dy}{p} = 2\pi y = \mathfrak{B}\cos\frac{x}{y}$ wo keine algebraische Gleichung statt findet.

605.

605. Es sey $\frac{du}{e} = \frac{ecdy}{y\sqrt{(eby^2 + eegy - eecc)}}$ das Differential rechter Hand auf einen Ausdruck wie $ds : \sqrt{(1 - SS)}$ zu bringen, wo S einen Sinus oder Cosinus bedeutet; muß zuerst, was unter des Nenners Wurzelzeichen vorhanden ist, verneint werden. Also drucke man den Nenner so aus: $y^2 . \sqrt{(eb + eeg : y - eecc : y^2)}$. Man setze $ee : y = P$ so kömmt das ganze Differential $= -cdP : e\sqrt{(eb + gP - cc . PP : ee)}$ oder $= -cdP : \sqrt{(e^3 b : cc + eegP : cc - PP)}$ Man setze $P = \frac{eeg}{2cc} - w$; da sich das Differential in $+ \frac{dw}{\sqrt{(hh - ww)}}$ verwandelt, wo $hh = \frac{ee}{4c^4} \cdot (4ebcc + eegg)$. Also ist $\frac{u}{e} = \frac{dw : h}{\sqrt{(1 - ww : hh)}}$ weil nun $\frac{u}{e} = \mathfrak{B} \sin \sqrt{(1 - x^2 : y^2)}$ (601. III) so ist (281) $\frac{h.\sqrt{(y^2 - x^2)}}{y} = w = \frac{eeg}{2cc} - P$; daraus folgt $2cch\sqrt{(y^2 - x^2)} = e^2 gy - 2ccee$ oder $2cc . (hz + ee) = ee . g(\sqrt{zz + x^2})$ Nachdem man die Rechnung gehörig verführt und $4e^3 bcc$ statt $4c^4 hh - e^4 gg$

gesetzt hat, kömmt $zz + \frac{2cche}{eb} z + \frac{cce}{b} = \frac{egg}{4bcc} xx$ oder weil man gleich aus der Aehnlichkeit dieser Gleichung mit der für die Kegelschnitte sieht, daß es bequemer ist z für die Abscissen und x für die Ordinaten zu nehmen; $xx = \frac{4bcc}{egg} zz + \frac{8c^4 h}{egg} z + \frac{4c^4}{gg}$. Da ist nun

Alg. 419 x; y; d; e; ζ

hier z; x; $\frac{4bcc}{egg}$; 0; − 1

und also ist die krumme Linie eine Hyperbel oder Ellipse, nachdem $\frac{b}{e} \cdot \frac{4cc}{gg}$, das ist, weil e allemahl eine bejahte wirkliche Grösse seyn muß, nachdem b verneint oder bejaht ist, (Alg. 465. VIII wo die Worte einerley und verschieden müssen in der I Auflage verwechselt werden.) Ist b = 0 so kömmt die Parabel.

Diese krummen Linien sind die, in welchen ein Körper geht, der von einem Mittelpuncte C verkehrt wie die Quadrate der Entfernungen angezogen wird Joh. Bern. Op. T. I. n. 86. p. 476. Ich halte aber nicht für nöthig, hier weitläuftiger davon zu handeln, weil Euler die Art,

wie

wie sie zu finden sind, viel vollkommener vorgetragen hat. Mech. L I. §. 601. Meine Anfgr. d. höhern Mechanik I. Abschn. 215.

Anwendung der Integralrechnung auf die Ausrechnung runder Körper und ihrer Flächen.

606. Aufg. Indem sich die krumme Linie AM 35 F. um die Axe AC dreht, entsteht ein runder Körper (Alg. 545). Man verlangt seine Fläche zu finden.

Aufl. Wenn AP = x; PM = y; so sey pm eine andere Ordinate. Zwischen den Kreisen die beyde Ordinaten bey der Umdrehung beschreiben, ist ein Stück der gesuchten krummen Fläche enthalten, das von dem Bogen Mm beschrieben wird. Dieses Bogens Sehne = e beschreibt zugleich ein Stück der Fläche eines senkrechten Kegels, das = πe (PM + pm) ist (Geom. 64. S. 4. 3) und wenn der Bogen unendlich abnimmt, nähert sich e unendlich dem Elemente der krummen Linie, ds; und PM + pm unendlich dem Werthe 2PM; und die Kegelfläche unendlich dem Stücke der gesuchten krummen Fläche, dessen Element also 2πyds ist.

Exempel.

607. I. Für jeden Kegelschnitt, wo $y^2 = bx \mp \frac{b}{a} x^2$ ist $2\pi y ds = \frac{\pi}{a} \sqrt{(aabb + 4ab.(a \mp b)x + 4b.(b \mp a)x^2)}\, dx$.

II) Die Gröſſe unter dem Wurzelzeichen ist $= 4b.(a \pm b).\left(\frac{aab}{4.(a \pm b)} + ax - x^2\right)$ Der letzte Factor mag $cc + ax - x^2$ heiſſen, so ist $2\pi y ds = \frac{4b.(a \mp b)\pi}{a} \sqrt{(cc + ax - x^2)}.\, dx$.

III. Dieſes Differential rational zu machen, ſetze man $\sqrt{(cc + ax - x^2)} = c + qx$; Dieſes giebt $\frac{a - 2cq}{(1 + q^2)} = x$ und $(c + qx).\, dx = -\frac{2.(c + aq - cq^2)^2}{(1 + q^2)^3} dq$ welches also nach 385. integrirt die geſuchte Fläche giebt.

IIII. Wenn AM ein Kreis, also der Körper eine Kugel ist, so ist $a = b$; und in III. $2\pi y ds = \frac{\pi}{a} \sqrt{aab}.\, dx$ also die Fläche $= \pi bx$ wie G. 65. S.

V. Wenn

V. Wenn AM eine Parabel, also d unendlich, so werden alle Theile des rationalen Differentials (III) unendlich; weil $ee = \frac{aab}{4.(a \mp b)}$ hier $= \frac{ab}{4}$ auch unendlich wird; also drucke man in (I) das Differential so aus:

$$\pi \sqrt{\left(bb + \frac{4b.(a \mp b)x}{a} + \frac{4b.(b \mp a)x}{aa}\right)}\, dx$$

wenn nun $a = \infty$ so verwandelt sich dieses in $\pi \sqrt{(bb + 4bx)}.\, dx$ Hier setze man $\sqrt{(bb + 4bx)} = b + v$; so verwandelt sich das Differential in $\frac{\pi.(b+v)^2.\, dv}{2b}$; hier statt $b + v$ seinem Werth gesetzt und das Integral so genommen, daß es für $x = o$ verschwindet, giebt die Fläche $\frac{\pi.((b^2 + 4bx)^{3:2} - b^3)}{6b}$

608. Auf diese Art faßt man die Frage von den Flächen solcher Körper die aus Umdrehung der Linien der zweyten Ordnung entstehn, in eine allgemeine Gleichung zusammen, daraus sich Kugel und Parabel leicht herleiten lassen. Aber für Ellipse und Hyperbel würde die Zerlegung des Differentials und folgende Behandlung viel Weitläuftigkeit machen; Selbst kömmt die Inte-

gration manchmahl auf Kreisbogen, manchmahl auf Logarithmen an.

Wenn die Ausrechnung krummer Flächen die von so bekannten Linien beschrieben werden, in unsrer Gewalt ist, so kann doch auch schon der Anfänger wünschen, etwas mehr Kenntniß von ihr zu haben. Auch ist wenigstens die Fläche des elliptischen Sphäroids merkwürdig, seitdem man der Erde diese Gestalt giebt.

Daher schien mir dienlich solche Ausrechnungen hie beyzufügen, wie sie sich kurz aus vorhin vorgetragenen Lehren herleiten lassen, die ich freylich auch jetzo zu dieser Absicht bequem eingerichtet habe.

Ich fand am deutlichsten, jede dieser krummen Linien, besonders zu behandeln. Bey der Parabel, war natürlich die Abscissen vom Scheitel beyzubehalten; Bey den andern, ließ sich leicht einsehn, daß Abscissen aus dem Mittelpuncte, die Rechnung bequemer machen würden, wie sie die Eigenschaften dieser Linien selbst, bequemer lehren.

Auch ließ ich diese krummen Linien sich um andre Axen drehen, als um die in welchen sich die Brennpuncte befinden.

Eigentlich ist was ich so beyfüge eine besondre Abhandlung, ich werde sie also am besten in Sätze theilen, deren jeder seine eignen Paragraphen bekömmt.

I. Satz.

I. Satz.

Eine Parabel dreht sich um ihre Axe. Fläche des Konoids.

I. Der Parameter sey $= b$; der Parabel Gleichung; $y^2 = bx$; $\frac{2.y.dy}{b} = dx$; $\frac{dy.\sqrt{(b^2 + 4y^2)}}{b} = ds$; Also das Differential der Fläche $= 2\pi.yds = \frac{\pi}{4.b}.\sqrt{(b^2 + 4y^2)}.8.y.dy$

Nun in 245 hie

X	p	a	c
$4.y^2$	$\frac{1}{2}$	b^2	$\frac{\pi}{4.b}$

, also das Integral oder die gesuchte Fläche $= \frac{\pi}{6.b}.(b^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}} + \text{Const.}$ Nun wird die Fläche vom Scheitel an gerechnet, also $o = \frac{\pi}{6.b}.b^3 + \text{Const.}$, und die Fläche ist $= \frac{\pi.}{6.b}((b^2 + 4.y^2)^{\frac{3}{2}} - b^3)$

II. Satz.

Am Scheitel einer Parabel ist eine Tangente gezogen. Sie dreht sich um diese Tangente Fläche des Körpers.

1. Wenn An. Un. IV. Taf. 35. Fig. AM die Hälfte der Parabel ist, AD die Tangente, so beschreibt AM die Fläche des Körpers auf einer Seite des Kreises welchen bey diesem Herumdrehen der Parabel Axe beschreibt. Die andre Hälfte der Parabel beschreibt was gleiches und ähnliches auf der andern Seite des genannten Kreises. Die Fläche ist aussen hohl, kehrt ihre erhabne Seite gegen die Tangente.

2. Man betrachte also was von dem Bogen AM beschrieben wird. Es ist AD = y; DM = x und das Element dieser Fläche = $2\pi . x . ds$.

4. Nun ist $ds = \frac{dy . \sqrt{(b^2 + 4y^2)}}{b}$ also das Differential der Fläche $= \frac{2\pi . y^2}{b^2} \sqrt{(b^2 + 4y^2)} . dy = \frac{2.\pi.}{b} \sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{b^2}\right)} . y^2 . dy$

5. Man setze $\frac{2.y}{b} = \text{tang } \varphi$, daher $y = \frac{b . \text{tang } \varphi}{2}$; $dy = \frac{b . d \text{ tang } \varphi}{2}$; so wird dieses Differential $= 2 . \pi . \frac{b^2}{8} \cdot \text{sec } \varphi . \text{tang } \varphi^2 . d \text{ tang } \varphi$

6. Was

6. Was auf den Winkel ankömmt, ist $\sec\varphi$. $(\sec\varphi^2 - 1).\sec\varphi^2.\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi^4} - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos\varphi^3}$

7. In (403; XV) sey $\psi = 90° - \varphi$, also $\cos\varphi = \sin\psi$, ferner $\mathrm{d}\varphi = -\mathrm{d}\psi = +\frac{\mathrm{d}\cos\psi}{\sin\psi}$

8. So verwandelt sich (6) in $+\frac{\mathrm{d}\cos\psi}{\sin\psi^4} - \frac{\mathrm{d}\cos\psi}{\sin\psi^4}$

9. Von diesen beyden Differentialen findet sich das erste in (403; XV) mit dem Zeichen $-$; weil es nun hie das Zeichen $+$ hat, so nehme man das dortige Integral, mit entgegengesetzten Zeichen (403; XVIII).

10. Das zweyte Differential in (8) findet sich, so wie es da steht in (403; XIV), man behält also das dortige Integral mit seinen Zeichen.

11. So sind die beyden Integrale

$$+\frac{\sin\varphi}{4.\cos\varphi^4} + \tfrac{3}{8}.\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^2} - \tfrac{3}{8}.\log\tang(45° - \tfrac{1}{2}\varphi)$$
$$- \tfrac{1}{2}.\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^2} + \tfrac{1}{4}.\log\tang(45° - \tfrac{1}{2}\varphi)$$

zusammen

$$= \frac{\sin\varphi}{4.\cos\varphi^4} - \tfrac{1}{8}.\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^2} - \tfrac{1}{8}.\log\tang(45° - \tfrac{1}{2}\varphi)$$

9. Also die Fläche der Hälfte des Sphäroids $= \frac{\pi . a^2 . c .}{4 . e} \left(\frac{1}{2} \text{Bog sin} \frac{2 . e}{a} + \frac{e . c}{a^2} \right)$

10. Und die Fläche des ganzen $= \frac{\pi . c}{2} .$

$\left(\frac{a^2}{2 e} . \text{Bog sin} \frac{2 e}{a} + c \right)$

11. Man drucke den Bogen durch seinen Sinus nach An. Un. 281 aus, so kömmt in (10) die ganze Fläche $= \frac{\pi . c}{2} . \left(c + a . \left(1 + \frac{1}{6} . \left(\frac{2 . e}{a} \right)^2 + \frac{3}{40} . \left(\frac{2 . e}{a} \right)^4 . \ldots . \right) \right)$

Die Reihe nähert sich allemahl, schnell wenn die Ellipse wenig vom Kreise unterschieden ist.

12. Ist die Ellipse ein Kreis, also $e = 0$ so kömmt in (11) wie gehörig die Kugelfläche $= \pi . a^2$

13. Wenn e abnimmt, so hat das Product $\frac{a^2}{2 . e} . \text{Bsin} \frac{2 . e}{a}$ in (10) einen Factor der immer wächst, und einen der immer abnimmt, der erste wird unendlich, der zweyte verschwindet für $e = 0$; was also da ihr Product wird, müsste man besonders untersuchen, wenn man die Kugelfläche aus (10) berechnen wollte. Die Reihe zeigt was diese Untersuchung gäbe.

IV. Satz.

IV. Satz.

Eine Ellipse dreht sich um ihre kleine Axe. Fläche des Sphäroids?

1) Die Grössen die zur Ellipse gehören werden benennt, wie vorhin beym Umdrehen um die grosse Axe.

2) Jetzo aber ist des Sphäroids Aequator der Kreis, welchen die halbe grosse Axe beym Umdrehen beschreibt, und jeder Parallel hat einen Halbmesser $= u$, sein Abstand vom Aequator ist $= y$. Der Fläche Differential $= 2.\pi.u.ds$. Ist es bejaht so wird die Fläche vom Aequator gegen den Pol gerechnet, soll sie selbst im Aequator anfangen so muß man das Integral so nehmen, daß es für $u = \frac{1}{2}a$ oder $y = o$ verschwindet.

3) Nun $du = -\frac{a^2.y.dy}{c^2.u}$; $ds = \frac{1}{2}a.\sqrt{\left(1+\frac{16.e^2.y^2}{c^4}\right)}.\frac{dy}{u}$

4) Man setze $\frac{4.e.y}{c^2} = \text{tang}\,\varphi$ also $dy = \frac{c^2}{4.e}.d\,\text{tang}\,\varphi$

5) So ist das Differential der Fläche $= \frac{\pi.a\,c^2}{4.e}.\text{sec}\,\varphi.d\,\text{tang}\,\varphi$

6) Was

6) Was auf den Winkel ankömmt ist $= \frac{d\varphi}{\cos\varphi^3}$. Man setze $\varphi = 90° - \psi$ so ist was auf den Winkel ankömmt $= \frac{+ d\cos\psi}{\sin\psi^4}$

7) Dieses Differential, aber mit dem Zeichen —, steht (403; XIV). Vermöge (403; XVIII) nimmt man also das dortige Integral mit entgegengesetzten Zeichen. Es ist solchergestalt

$= \frac{+\sin\varphi}{2.\cos\varphi^2} - \frac{1}{2}\log\text{tang}\,(45° - \frac{1}{2}\varphi)$

8) Es verschwindet für $y = o$; wie vermöge (2) seyn soll, und giebt mit $\frac{\pi . a\, c^2}{4.\, e}$ multiplicirt, die unbestimmte Fläche (5)

9) Aus (4) folgt $\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}$

$= \frac{\sqrt{(c^4 + 16.\, e^2.\, y^2)}}{c^2}$ und $\sin\varphi$

$= \frac{4.\, e.\, y}{\sqrt{(c^4 + 16.\, e^2.\, y^2)}}$

10) Das giebt des Integrals in (7) ersten Theil $= \frac{2.\, e.\, y.\sqrt{(c^4 + 16.\, e^2.\, y^2)}}{c^4}$

11) We-

11) Wegen des andern Theils muß man wissen daß tang $(45° - \frac{1}{2}\varphi) = \sec\varphi - \tang\varphi$;

12) Daraus kömmt der andre Theil $= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{(c^4 + 16.e^2.y^2)} - 4.e.y}{c^2}\right)$

13) Beyde Theile (10; 12;) zusammengefügt und mit dem (8) angezeigten Factor multiplicirt, kömmt die unbestimmte Fläche $= \frac{\pi.a.y}{2.c^2}\cdot\sqrt{(c^4 + 16.e^2.y^2)} - \frac{\pi.a\,c^2}{8.e}\cdot\log\left(\frac{\sqrt{(c^4 + 16.e^2\,y^2)} - 4.e.y}{c^2}\right)$.

Fläche des halben Sphäroids.

14) Da ist $y = \frac{1}{2}c$, $c^4 + 16.e^2.y^2 = c^2.a^2$ also in (13) der erste Theil $= \frac{\pi.a^2}{4}$

15) Was hinter dem Zeichen des Logarithmen steht ist $= \frac{a - 2.e}{c}$; das Quadrat davon ist $\frac{(a - 2e)^2}{a^2 - 4.c^2} = \frac{a - 2e}{a + 2e}$ also, der logarithmische Theil $= -\frac{\pi.a.c^2}{16.e}\log\frac{a - 2e}{a + 2e}$.

Fläche

Fläche des ganzen Sphäroids.

16) Ist $= \frac{\pi . a^2}{2} + \frac{\pi . a . e^2}{8 e} \cdot \log \frac{a + 2 . e}{a - 2 . e}$

17) In An. Un. 223; setze man das dortige u hie $= \frac{2 e}{a}$ und das dortige a hie $= 1$ weil die Rede von natürlichen Logarithmen ist. Druckt man solchergestalt den Logarithmen in (16) durch die Reihe aus, so bekömmt man:

18) Die Fläche des ganzen Sphäroids $= \frac{\pi . a^2}{2} + \frac{\pi . c^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2 . e}{a} \right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2 e}{a} \right)^4 + \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{2 e}{a} \right)^6 \ldots \ldots \right)$ Die Reihe nähert sich allemahl, und desto schneller je kleiner $\frac{e}{a}$ ist, je näher die Ellipse dem Kreise kömmt.

19) Man nenne die Reihe $= 1 + R$ so daß der zweyte Theil $= \frac{\pi . c^2}{2} . (1 + R) = \frac{\pi . c^2}{2} + \frac{\pi . c^2}{2} . R$. Weil nun $c^2 = a^2 - 4 . e^2$; so wird die Fläche des ganzen Sphäroids $= \pi . a^2 - 2 . \pi . e^2 + \frac{\pi . c^2}{2} . R$.

20) Das

20) Das erste dieser drey Glieder ist die Fläche einer Kugel deren Durchmesser die grosse Axe wäre. Von dieser Fläche zieht man das zweyte Glied ab, und addirt das dritte so hat man des Sphäroids Fläche. Wenn die Eccentricität klein ist, so berechnet man bequemer, den kleinen Unterschied von der Kugelfläche, als nach (18) was zu der halben Kugelfläche muß addirt werden.

21) Wird die Ellipse ein Kreis, also $e = 0$, so fallen die beyden letzten Glieder weg, und bleibt die Kugelfläche.

22) Hätte man in (16) den natürlichen Logarithmen aus Tafeln, oder berechnete man ihn aus dem briggischen, so entbehrte man die Reihe.

23) Exempel. Es sey $a = 10$; $e = 8$; also $2.e = 6$; $\frac{a+2e}{a-2e} = 4$, so ist des Sphäroids Fläche $= \pi.(50 + \frac{80}{3}.\log\text{nat}\,4)$ Nun ist $\log\text{nat}\,4 = 1{,}386294361\ldots$ Das giebt die Fläche $= \pi.\ 86{,}96784963\ldots$ Quadrate des Maasses mit welchem die Linien sind ausgemessen worden.

24) Aber wenn e irrational ist, und $\frac{a+e}{a-e}$ sich nur durch Näherung, in Zahlen mit viel Ziffern, ausdrucken lässt, müsste man wohl auch bey Tafeln der natürlichen Logarithmen wie die wolframischen sind Proportionaltheile brauchen.

25) Die Berechnung der Fläche des elliptischen Sphäroids beyder Art, lehre ich in meiner weitern Ausführung der mathematischen Geographie (1795) III. Abschnitt.

26) Aus (13) läßt sich jedes Stück der Fläche vom Aequator an, berechnen, und wenn man ein solches Stück von einem grössern abzieht giebt sich der Streifen, welcher des grössern Ueberschuß ausmacht, eine Zone.

So könnte man die fünf geographischen Zonen finden, die in (Geogr. 42) für die Kugel berechnet sind.

Lulofs Kenntniß der Erdkugel 601 u. f. §. berechnet sie für Maupertuis Gestalt der Erde, aber mühsam durch unendliche Reihen.

V. Satz.

Berechnung der Fläche der Erde als eines eingedruckten Sphäroids, in geographischen Quadratmeilen.

1) Also, $a = \frac{5400}{\pi}$; $\log a = 3{,}2352439$.

2) Die Fläche einer Kugel, deren Aequator 5400 Meilen im Umfange hat, habe ich genau berechnet; Geometr. Abh. II. Samml. 22. Abh.

3) Hie also wäre nur zu suchen wie viel von ihr die Fläche des Sphäroids unterschieden ist. Das kömmt auf die Gestalt der Erde an.

3) Ich

3) Ich ſetze wie Geogr. 16; $c = \frac{230}{231} \cdot a$ alſo $\frac{c}{a} = 0{,}99567$.

4) Alſo 4. $c^2 = \frac{231^2 - 230^2}{231^2} \cdot a^2$ und 2. $c = \frac{\sqrt{461}}{231} \cdot a$

$\frac{1}{2} \log 461 = 1{,}3318504$
$\log 231 = 2{,}3636120$

$\log \frac{2c}{a} = 0{,}9682384 - 2$

5) Von dieſem Logarithmen iſt das
Doppelte $= 0{,}9364768 - 3$
Vierfache $= 0{,}8729536 - 5$
Sechsfache $= 0{,}8094304 - 7$

6) Daher von $\frac{2c}{a} = 0{,}092947$; das
Quadrat $= 0{,}00863926$
Vierte Pot. $= 0{,}000074636$
Sechſte P. $= 0{,}0000006448$

7) Dieſe Zahlen nach der Ordnung mit 3; 5; 7; dividirt geben
0,00287975
14927
92
0,00302994

8) Der achten Potenz höchste Ziser wäre von der Ordnung — 9; und in (7) fehlen durchgängig die Zifern von der Ordnung — 8. Die gefundne Zahl ist also kleiner als R. Ich will annehmen das noch fehlende betrüge eine Einheit von der Ordnung — 7 und seze also R = 0,00303

9) Nun ist

$\log\left(\frac{230}{231}\right) = 0,9981158 - 1$

$\log a = 3,2352439$

$\log c = 3,2333597$

verdoppelt $= 6,4667194$

$\log \frac{1}{2}\pi = 0,1961199$

$\log R = 0,4814426 - 3$

$\log \frac{\pi . c^2 . R}{2} = 4,1442819$

10) $\log \frac{4 . e^2}{a^2} = 0,9364768 - 3$ (5)

$2 \log a = 6,4704878$ (1)

$\log 4 . e^2 = 4,4069646$

$\log \frac{1}{2}\pi = 0,1961199$

$\log 2 . e^2 . \pi = 4,6030845$

11) So ist

$-2 . e^2 . \pi = -40094$

$+\frac{1}{2} . \pi . c^2 . R = +13940$

-26154

$\pi a^2 = 9281916$

Fläche des Sphäroids $= 9255762$

12) So

12) So viel Geographische Quadratmeilen findet man für die Erdfläche vermittelst der Logarithmen. Verlangte man grössere Schärfe, so müsste man mit den Zahlen selbst rechnen, auch die Reihe R weiter fortsetzen.

13) Wolframs Tafeln der natürlichen Logarithmen die sich bey den schulzischen Tafeln befinden könnte man hie zur Vergleichung so brauchen.

14) Es wird verlangt $\frac{1}{4}$ log nat $\frac{a+2.e}{a-2.e}$

Da nun hie $\frac{2e}{a} = 0{,}092947$; $1 - \frac{2.e}{a} = 0{,}907053$ so ist das Verlangte, beynah $= \frac{1}{4}$. log nat $(\frac{1093}{907})$

Nun aus erwähnten Tafeln, der natürliche Logarithme von

1093; = 6,996681488
907; = 6,810142450

Unterschied = 0,186539038
$\frac{1}{4}$ desselben = 0,046634759

Das ist ein wenig mehr als das Gesuchte, weil ich in dem Quotienten dessen Logarithmen ich aus den Tafeln nehme, den Dividend zu groß gesetzt habe, den Divisor zu klein.

15) Braucht man für den natürlichen Logarithmen die Reihe, so ist log nat $\frac{a+e}{a-e} = \frac{4.e}{a}$. $(1+R)$, der vierte Theil davon ist das Gesuchte.

16) Nun $\log \frac{2c}{a} = 0{,}9682384 - 2$ (4)

$\log R = 0{,}4814426 - 3$ (9)

$0{,}4496810 - 4$

giebt $\frac{2.c.}{a}$ $R = 0{,}00028163$

aber $\frac{2.c}{a} = 0{,}092947$ (6)

Summe $= 0{,}0932286$

deren Hälfte $= 0{,}0466143$

17) Diese Hälfte $= \frac{c}{a} \cdot (1 + R)$ stimmt bis auf die Ordnung -4 mit (14) überein, die folgenden Ziffern betragen weniger, als die folgenden in (14) Auch war das in (14) gefundne etwas zu groß.

18) In meiner weitern Ausführung der Geographie III. Cap. 3. Abschn. 35. §. habe ich die Fläche des Sphäroids für $\frac{c}{a} = 0{,}99535$ berechnet und $= 9228724$ Quadratmeilen gefunden. Man sieht was für einen Unterschied die unterschiednen Werthe von $\frac{c}{a}$ geben.

In der geometrischen Abhandlungen II. Samml. 22. Abh. finde ich die Fläche einer Kugel deren Aequator, des Sphäroides Aequator wäre $=$ 9281916 Quadratmeilen.

VI. Satz.

VI. Satz.

Eine Hyperbel dreht sich um ihre grosse Axe; Fläche des Konoids.

1. Vorläufig ist klar, daß von den beyden entgegengesetzten Hälften der Hyperbel wie in An. endl. Gr. II. Taf. 14. Fig. MAm, RBS, sind, jede ihr eignes Konoid giebt, nimmt man von einer Hälfte soviel als von der andern, so sind die beyden Konoide gleich und ähnlich. Eigentlich machen beyde zusammen, in eben der Bedeutung einen Körper aus, in welcher die beyden Hälften der Hyperbel, eine krumme Linie sind. Es ist aber auch eben so natürlich, eine Hälfte dieses Körpers für sich zu betrachten.

2. Daraus folgt die beste Art, diese Betrachtung anzustellen, daß nähmlich was dabey zum Grunde gelegt wird, für eine Hälfte wie für die andre gilt. Solchergestalt brauche man für die Hyperbel die Gleichung wo die Abscissen aus dem Mittelpuncte gerechnet werden.

3. Wie aber An. endl. Gr. III. T. 14. Fig. in dem Raume EACe nichts von der Hyperbel ist, so ist auch von dem Konoide, nichts in dem Raume den das Dreyeck ECA um CA gedreht, bestimmt; Und der Anfang des Konoids ist in A. Alles von ihm liegt auf einer Seite des Kreises den AE bey erwähntem Umdrehen beschreibt.

4. Nun heisse die grosse Axe $= a$; die kleine $= c$; Abscisse auf der grossen vom Mittelpuncte $= u$; Ordinate $= y = \frac{c}{2a} \cdot \sqrt{(4u^2 - a^2)}$; $dy = \frac{c^2 . u . du}{a^2 . y}$

Der Abstand jedes Brennpuncts vom Mittelpuncte sey $= e = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2}$ (An. endl. Gr. 405), so kömmt $ds = \frac{c . du}{2 . y} \cdot \sqrt{\left(\frac{16 . e^2 . u^2}{a^4} - 1\right)}$

5. Daher, das Differential der Fläche des Konoids, $2 . \pi . y . ds = \pi . c . \sqrt{\left(\frac{16 . e^2 . u^2}{a^4} - 1\right)} . du$.

6. Die Fläche, fängt vom Scheitel der Hyperbel an, (3) wächst mit u; das Integral muß also so genommen werden, daß es für $u = \frac{1}{2} a$ verschwindet.

7. Man setze $\frac{4 . e . u}{a^2} = \sec \varphi$; daher $du = \frac{a^2}{4 . e} . d \sec \varphi$, so ist das Differential der Fläche $= \frac{\pi . c . a^2}{4 . e} . \tang \varphi . d \sec \varphi$

8) Der

8. Der veränderliche Factor, welcher nur auf den Winkel ankömmt, wird so entwickelt: $d \sec \varphi = -\frac{d \cos \varphi}{\cos \varphi^2} = +\frac{\sin \varphi . d \sin \varphi}{\cos \varphi^3}$ das mit der Tangente multiplicirt giebt $\frac{\sin \varphi^2 . d \sin \varphi}{\cos \varphi^4}$ $= \frac{d \sin \varphi}{\cos \varphi^4} - \frac{d \sin \varphi}{\cos \varphi^2}$

9. Man setze $\varphi = 90° - \psi$ so wird das Differential (7) $\frac{d \cos \psi}{\sin \psi^4} - \frac{d \cos \psi}{\sin \psi^2}$ und davon das Integral nach (403; XIV; IX; XVIII) $\frac{\sin \varphi}{2 . \cos \varphi^2} + \frac{1}{2} . \log \tang (45° - \frac{1}{2} \varphi) +$ Const. Es muß nähmlich so genommen werden, daß es für $u = \frac{1}{2} a$ verschwindet.

10. Es sey (7) $\frac{2 . c}{a} = \sec \varkappa$, so ist $\frac{\sin \varkappa}{2 \cos \varkappa^2}$ $+ \frac{1}{2} \log \tang (45° - \frac{1}{2} \varkappa) +$ Const $= 0$.

11. So kömmt die Fläche (7) $\frac{\pi . c . a^2}{4 . e}$.

$$\left\{ \frac{\sin \varphi}{2 . \cos \varphi^2} - \frac{\sin \varkappa}{2 . \cos \varkappa^2} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\tang (45° - \frac{1}{2} \varphi)}{\tang (45° - \frac{1}{2} \varkappa)} \right) \right\}$$

12. Das in Klammern eingeschloſſne iſt $=$

$$\frac{e}{a^2}\cdot\left(\frac{2u}{a^2}\cdot\sqrt{(16.e^2.u^2-a^4)}-c\right)$$

$$+\tfrac{1}{2}\log\left[\frac{\frac{4.e.u}{a^2}-\sqrt{\left(\frac{16.e^2.u^2}{a^4}-1\right)}}{\frac{2.e}{a}-\sqrt{\left(\frac{4.e^2}{a^2}-1\right)}}\right]$$

Der Logarithme aus dem Satze daß tang $(45^\circ - \frac{1}{2}x) = \text{sec}\,x - \text{tang}\,x$; ohnſtreitig iſt der Ausdruck durch die Winkel in (11) bequemer.

VII. Satz.

Eine Hyperbel dreht ſich um ihre kleine Axe Fläche des Körpers?

1) Die äuſre Fläche des Körpers iſt hohl. Die erhabene Seite der Fläche gegen die kleine Axe gekehrt. Eine Vorſtellung giebt An. endl. Gr. II. Taf. 14. Fig. Wenn ſich die Hyperbel MAm um Dd als Axe drehte.

2) Alles alſo zur Hyperbel gehörige wie vorhin beym Drehen um die groſſe Axe genannt, iſt hie der Halbmeſſer des Kreiſes deſſen Umfang von M beſchrieben wird, ein Perpendikel von M auf Dd alſo $= u$; und das Differential der geſuchten Fläche $= 2.\pi.u.ds$.

3) Der Kreis den CP beſchreibt, theilt die Fläche in zwo ähnliche Hälften, von denen ich nur eine betrach-

betrachte, die überall von einem Bogen wie AM begränzt wird. Sie fängt an wo $y = o$ oder $u = \frac{1}{2} a$.

4) Die entgegengesetzte Hälfte der Hyperbel RBS, begränzt beym Herumdrehen keine andre Fläche, weil sie immer in die Stellen der vorigen kömmt. . . wie bey der Kugel, ein Halbkreis in die Stelle des andern. . . . .

5) So entsteht ein Körper dessen äusere Fläche ringsherum hohl ist, mit einer Ebene durch Dd geschnitten, zeigt er allemahl die beyden entgegengesetzten Hälften der Hyperbel.

6) Nun ist $du = \frac{a^2 . y . dy}{c^2 . u}$; daher $ds = \frac{\sqrt{(c^4 . u^2 + a^4 . y^2)}}{c^2 . u} . dy$

7) Daraus das Differentiał der Fläche (2) $= \pi . a . \sqrt{\left(\frac{16 . e^2 . y^2}{c^4} + 1\right)} . dy$

8) Wenn $\frac{4 . e . y}{c^2} = \text{tang } \varphi$, ist das Differential $= \frac{\pi . a . c^2}{4 . e} . \text{sec } \varphi . d \text{tang } \varphi$.

9) Deutlich ist das Integral von $\text{sec } \varphi . d \text{tang } \varphi = \text{sec } \varphi . \text{tang } \varphi$ weniger dem Integrale von $\text{tang } \varphi . d \text{sec } \varphi$. Also, aus vorigem Satze (9) $= \frac{1}{2}$.

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi^2} - \frac{1}{2} \log \text{tang} (45° - \frac{1}{2} \varphi)$, und die Const $= 0$ weil das Integral für $y = 0$ verschwinden soll.

10) Folglich ist die gesuchte Fläche $= \frac{\pi . ac^2}{8e} \cdot \left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi^2} - \log \text{tang} (45° - \frac{1}{2} \varphi) \right)$

11) Begreiflich ist der Winkel in diesem Satze, nicht einerley mit dem im Vorigen, den eben der Buchstabe benennt.

VIII. Satz.

Geschichte der Untersuchungen dieses Gegenstandes.

Hugenius, horologium oscillatorium P. III. post Prop. IX. p. 75. der Ausgabe in fol. Par. 1673. lehret: Conoidis parabolici superficiei circulum aequalem inuenire; sphaeroidis oblongi, s. c. ae. i. sphaeroidis lati, siue compressi... Conoidis hyperbolici ... Es sind die Flächen die beschrieben werden, wenn sich die krummen Linien um ihre Axen drehn. Auch lehrt er: Curuae parabolicae aequalem rectam lineam inuenire.

Er giebt nur die Sätze, ohne Beweis, die Verwandlung der Fläche des paraboliſchen Konoids in einen Kreis, hat er 1657 gehabt; das

Jahr

Jahr darauf die Flächen der übrigen Körper so zu verwandeln gefunden, und die Entdeckung, an Pascal u. a. in Frankreich, auch in England an Wallis geschickt, ohne Beweise. Der letzte hat bald darauf, bekannt gemacht, was er hierin geleistet, fecitque vt nostris demonstrationibus perficiendis superfederem, sagt Hugen, und fügt nur die Constructionen bey.

Durch eine Reihe Verzeichnungen findet er den jedesmaligen Halbmesser des Kreises. Ich habe mir für das paraboliſche Konoid, und das länglichte elliptische Sphäroid, seine Vorschriften in analytischen Zeichen ausgedruckt, und mit meinen übereinstimmend gefunden. Auf die übrigen habe ich die Zeit nicht wenden mögen. Beym zusammengedruckten Sphäroid braucht er die Länge eines paraboliſchen Bogens, beym hyperboliſchen Konoid, Quadratur der Hyperbel. Man sieht wie dieses mit den Logarithmen die ich brauche übereinstimmt. Praktische Darstellung solcher Flächen geben Hugens Vorschriften nicht, wenn man nicht, wenigstens die Länge von Kreisbögen, die Fläche von Hyperbeln, durch Rechnung findet.

Am Ende von Walliſens Tractat de Cycloide findet sich ein langer Brief an Hugen. In Iohannis Wallis Opera Mathematica Tom. I. Oxon. 1699. fängt sich dieser Brief 542 S. an. Sein Innhalt betrifft Länge krummer Linien durch gerade, und krummer Flächen Gröſſe, durch ebener ihre,

gege-

gegeben; ... curuarum εὐθυνσις et πλατυσμος. Wie er Rectification griechisch nennen soll, ist er zweifelhaft, 550 S.: de curuarum (Ευθυνσεις dicam) an Ευθυσμῳ. In der Ueberschrift hat er sich für Ευθυνσις erklärt.

Dieser grammatische Zweifel führt auf eine historische Bemerkung: Wallis, der die griechischen Mathematiker so gut kannte, muß bey keinem etwas gefunden haben das sich darauf bezieht: eine gerade Linie anzugeben die so lang ist als eine krumme.

Von der Fläche des paraboliſchen Konoids redet er daſ. 555 S. und von den elliptischen Sphäroiden, 558 S. Er bedient sich seiner Arithmeticae infinitorum, und vergleicht die Flächen, mit Flächen von Cylinder und Kugel. Das hyperboliſche Konoid erwähnt er daſelbſt nicht.

609. Aufg. Den Innhalt eines runden Körpers zu finden.

Aufl. Das Stücke von ihm, das zwiſchen den beyden Kreiſen enthalten iſt, die von PM und pm beſchrieben werden, iſt gröſſer als ein Cylinder, der Pp zur Höhe und den Kreis mit PM zur Grundfläche hätte, aber kleiner als ein Cylinder, deſſen Grundfläche der Kreis mit pm, bey eben der Höhe wäre. Beyde Cylinder aber nähern sich einander unendlich. Alſo iſt das Diſferential des Körpers, den AM beſchreibt, ein Cylinder, deſſen Höhe Pp, die Grundfläche der Kreis mit PM wäre, oder es iſt $\pi y^2 dx$.

Exem-

Exempel.

610. I. Für die Kegelschnitte ist dieses Differential $= \pi . (b x dx \mp \frac{b}{a} x^2 dx)$ also der unbestimmte Innhalt jedes Sphäroids oder Konoids von einem Kegelschnitte $= \frac{\pi b x^2}{6a} . (3a \mp 2x)$

II. Für die Kugel ist $b = a$; und dieser Innhalt $= \frac{\pi x^2}{6} . (3a - 2x)$; welches für $x = a$ die ganze Kugel $= \frac{\pi a^3}{6}$ giebt wie §. 66 §.

III. Ein ganzes elliptisches Sphäroid wird für $x = a$; $\frac{\pi b a^2}{6}$; und verhält sich also zu einer Kugel, die a zum Durchmesser hat, wie $b : a$ oder wie $cc : aa$; wenn die andere Axe der Ellipse c heisst (Alg. 366.).

IV. Wenn, grosse Axe, Parameter, kleine Axe, Abscisse vom Scheitel, und Ordinate bey einer Ellipse A; B; α; t; v; heissen, also ihre Gleichung $vv = Bt - \frac{B}{A} tt$ ist; so heisse x eine Abscisse auf der kleinen Axe vom Scheitel der kleinen Axe genommen, und y die zugehörige Ordinate. Alsdenn ist $x = \frac{1}{2} \alpha - v$; $y = \frac{1}{2} A - t$;

$= t$; und $\alpha = \sqrt{AB}$. Setzt man also $\frac{1}{2}\alpha - x$; und $\frac{1}{2}A - y$; statt v und t; so kömmt $y^2 = \frac{A\alpha}{B}x - \frac{A}{B}x^2$; Man setze $\frac{A\alpha}{B}$ oder $\frac{A.A}{\alpha} = \beta$, so wird β der Parameter für die kleine Axe seyn, nähmlich die dritte Proportionallinie zu ihr und der grossen, wie B die dritte zur grossen und kleinen ist, (Alg. 366) auch kömmt alsdenn $y^2 = \beta x - \frac{\beta}{\alpha}x^2$ eine Gleichung wie die, wo die Abscissen auf der grossen Axe genommen wurden. Also können in I; b; a; c auch hier β; α; A bedeuten, und wenn ein Sphäroid aus der Umdrehung einer halben Ellipse um ihre *kleine* Axe entsteht, so verhält es sich zu einer Kugel, deren Durchmesser diese kleine Axe wäre $= \beta : \alpha$ oder wie $A.A : \alpha\alpha$ (1111).

V. Das Sphäroid, die Kugel, und ein umschriebener Cylinder, der die grosse Axe zum Durchmesser, die kleine zur Höhe hat, heissen E; S; C; so ist $S = \frac{\pi.\alpha^3}{6}$; $C = \frac{A.A\pi}{4}.\alpha$; $E = \frac{A.A.S}{\alpha.\alpha} = \frac{A.A.\pi.\alpha}{6} = \frac{4}{6}C = \frac{2}{3}C$. Aus diesen Gründen hat Euler den Inhalt der sphäroidischen Erde berechnet a. a. O. 56 §.

VI. Eine

VI. Eine Kugel, deren Durchmesser A ist, heisse T; so ist $T = \frac{A^3}{\alpha^3} \cdot S$ also $\frac{A.A}{\alpha.\alpha} \cdot S$ oder $E = \frac{\alpha.T}{A}$

VII. Wenn bey einem hyperbolischen Konoid, $x = a$; so ist der Innhalt dieses Stücks $= \frac{1}{6} \pi b a^2$ Für ein Konoid einer gleichseitigen Hyperbel aber ist der unbestimmte Innhalt $= \frac{\pi x^2}{6} (3a + 2x)$.

VIII. Weil der unbestimmte Innhalt jedes solchen runden Körpers $= \pi b x^2 . \left(\frac{1}{2} \mp \frac{x}{3a}\right)$ (I) so wird er für den paraboliſchen, wo a unendlich ist, $\frac{\pi b x^2}{2} = \frac{\pi x y^2}{2}$; halb so groß als ein umschriebener Cylinder, der mit diesem Stücke des paraboliſchen einerley Durchmesser 2y und einerley Höhe x hätte.

611. Für Konoiden unendlicher Parabeln, wo $y^m = x$ ist $m y^{m-1} dy = dx$ also das Differential $\pi . m y^{m+1} dy$ und der Innhalt $\frac{m}{m+2} \pi y^{m+2} = \frac{m}{m+2} \cdot \pi y^2 x = \frac{m}{m+2}$ des umschriebenen Cylinders,

612. Für den Körper, der aus Umdrehung der Kiſſoide (Alg. 470) um die Axe AB (Alg. III. T. 19. F.) entſteht. Das Differential iſt $\frac{\pi x^3 dx}{a-x}$; aber $\frac{x^3}{-x+a} = -x^2 - ax - a^2 + \frac{a^3}{a-x}$; alſo iſt der Körper $= \pi.(x.(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}ax - a^2) - a^3.l\frac{a-x}{a})$ wo $l\left(1-\frac{x}{a}\right)$ einem eigentlichen Bruche zugehört, (Alg. 472.) und alſo verneint iſt, folglich im Integrale, da er mit — befindlich iſt, was bejahtes giebt.

Sucht man dieſen Logarithmen aus (220) und rechnet alles zuſammen, ſo wird der Körper

$$= \pi\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} \ldots.$$

Man ſetze $a = 1$; und $x = 1$ für den ganzen Körper; weil dieſes Innhalt durch $-l(1-1)$ gegeben wird, ſo iſt er unendlich, und zwar bejaht, denn wenn x in $1-x$ bis an 1 wächſt, ſo wächſt der Logarithme von $1-x$ als eine verneinte Gröſſe unendlich.

Aber hier giebt die nur gefundene Reihe für den ganzen Innhalt des Körpers $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \ldots$. welches alſo unendlich ſeyn muß. Joh. Ber-

Bernoulli hat dieſes aus andern Gründen hergeleitet Op. T. IIII. n. 150. Prop. 3. Cor. 3.

613. Für den Körper, der aus Umdrehung der logarithmiſchen Linie BCDE 15 F. um ihre Aſymptote OA entſteht.

Hier iſt das Differential $= \pi a y dy$ (217) alſo das Integral $= \frac{\pi a y^2}{2}$ welches mit y verſchwindet, und alſo den unendlich langen Körper bedeutet, den die Fläche zwiſchen der nach der Seite O hinaus unendlich verlängerten Aſymptote und dem ihr zugehörigen Stücke der logarithmiſchen Linie beſchreibt. Nachdem dieſer unendlich lange Körper alſo von den Kreiſen begränzt wird, die AB oder PC beſchreiben, iſt ſein Innhalt $\frac{\pi a}{2}$ mit AB^2 oder mit PC^2 multiplicirt; das iſt halb ſo groß als ein Cylinder, deſſen Höhe a und der Halbmeſſer AB oder PC wäre. Das Stück des Körpers alſo zwiſchen dieſen beyden Kreiſen iſt $\frac{\pi a}{2}(PC^2 - AB^2)$

614. Zuſ. Unendlich lange Körper können, nach Verſchiedenheit der Umſtände, endlich (613) oder unendlich (612) ſeyn.

615. Die Hyperbel BMCD 14 F (212) drehe ſich um die Aſymptote AE man ſucht den Innhalt des erzeugten Körpers.

I. Sein Differential ist $\pi . x^{-2m} a^{2m+2} dx$ also das Integral $\frac{\pi x^{1-2m} . a^{2m+2}}{1-2m}$.

II. Wenn $m > \frac{1}{2}$; so verschwindet dieses Integral für $x = \infty$; also bedeutet es (wie 2:2) den unendlich langen Körper, der sich von dem Kreise, den PM beschreibt, nach DE hin erstreckt. Dieser ist also $\frac{\pi a^{2m+2}}{AP^{2m-1} . (2m-1)}$ Ist $AG = a$; so ist dieser Körper, von dem Kreise, den GC beschreibt, an; $\frac{\pi a^3}{2m-1}$ also was zwischen den Kreisen, die GC und PM beschreiben, enthalten ist, $\frac{\pi a^3}{2m-1} . \frac{(x^{2m-1} - a^{2m-1})}{x^{2m-1}}$

III. Dieses giebt für $m = 1$ oder die gemeine Hyperbel $\pi a^3 . \frac{(x-a)}{x} = \frac{\pi a^3 : GP}{AP}$, und den unendlich langen Körper $\frac{\pi a^4}{x}$.

IIII. Das Stück zwischen den Kreisen, die PM und die Asymptote AF beschreiben, ist unendlich groß, weil das Integral für $x = o$ unendlich wird. Man hat also hier zwey unendlich lange

lange Stücken eines Körpers, von denen eines endlich, das andere unendlich ist.

V. Wenn $m = \frac{1}{2}$ ist das Integral $\pi a^3 . l \frac{x}{a}$ und bedeutet den Körper, der zwischen den Kreisen enthalten ist die GC und PM beschreiben, weil es für $x = a$ verschwindet. Es wird so wohl für eine verschwindende als für eine unendliche Abscisse unendlich, daß also hier beyde Stücken des Körpers, die sich von dem Kreise, den GC beschreibt, an, ins unendliche erstrecken, unendlich sind.

VI. Ist $m < \frac{1}{2}$ so verschwindet das Integral für $x = o$ und bedeutet also, was zwischen den Kreisen enthalten ist, welche die Asymptote AF, und PM, beschreiben. Dieser Körper ist endlich, ob er sich gleich an der Asymptote AF unendlich weit hinaus erstreckt, aber für eine unendliche Abscisse wird er unendlich.

VII. Wäre $m = o$ so zeigte das Integral $\pi a a x$ einen Cylinder an, weil sich die krumme Linie wegen der Gleichung $y = a$ in eine Parallele mit AE verwandelte.

VIII. Sollte sich die krumme Linie um die Asymptote AF drehen, so ist $AP = y$; $PM = x$. Man kann sich nähmlich durch M eine Parallele mit AE vorstellen, die auf AF eine Abscisse = PM abschneiden, und selbst die Ordinate = AP

seyn wird. So ist $y^m = \frac{a^{m+1}}{x}$ also das Differential des Körpers wie $a^{(2m+2):m}\, x^{-2:m}\, dx$ und das Integral wie $\frac{m}{m-2} \cdot a^{(2m+2):m}$ $x^{(m-2):m}$ welches sich, wenn $m > 2$ mit $x = o$ oder von A anfängt; aber für $m < 2$ verneint ist, und das Stücke, das sich an der unendlichen Asymptote AF her bis an die Parallele mit AE durch M erstreckt, bedeutet; (wie 212) für $m = 2$ wird das Integral $a^3\, l\, \frac{x}{a}$ und fängt sich an, wo $x = a$. Für die gemeine Hyperbel ist es $-a^4 : x$.

616. Den Körper zu haben, den AMD 35 F. beschreibt, indem sich diese Figur um AC dreht, ziehe man den Körper, den AMP beschreibt, von dem Cylinder ab, den APMD beschreibt. Also ist der gegenwärtig gesuchte Körper, $\pi . (y^2 x - \int y^2 dx)$.

In 611. wird er $\pi . \frac{2}{m+2} \cdot y^2 x$ oder $\frac{m}{m+2}$ Theile des Cylinders.

Von

Von huffòrmigen Abſchnitten cylindriſcher Körper.

617. Erkl. Ueber der Ebene, welche von der krummen Linie AGBF 36 F. begränzt wird, ſtehe ein priſmatiſcher Körper (Alg. 528) dieſer werde mit einer ebenen Fläche geſchnitten, welche die Grundfläche in FG unter einem Winkel, deſſen Tangente g iſt, ſchneidet. Was von dem cylindriſchen Körper zwiſchen der ſchneidenden Ebene, und der Grundfläche enthalten iſt, will ich hier den Abſchnitt nennen. Wegen der Aehnlichkeit, die es mit einem Hufe hat, iſt es auch vngula genannt worden.

618. Aufg. Des Abſchnittes körperlichen Innhalt zu finden.

Aufl. Der Schnitt der ſchneidenden Fläche mit der Fläche des cylindriſchen Körpers ſey GMF. Man laſſe von einem willkührlichen Puncte deſſelben, das Loth MI auf die Grundfläche herab, das in des Körpers Fläche ſeyn wird, weil es ein ſenkrechter Körper iſt, folglich wird I in der krummen Linie AGBF ſeyn. Man ziehe IK mit GF parallel; K ſey ein anderer Durchſchnitt dieſer Parallele und der nur genannten krummen Linie. Auf die beyden Parallelen ziehe man AB und IQ ſenkrecht, ſo iſt MI = g. QI (G. 46 S. 7. Z. und 2 Erkl.) Die Parallelen werden von AB in N und P geſchnitten. Man nehme AB für die Abſciſſenlinie der Grundfläche an, und

nenne diese Abscissen von einem willkührlichen Puncte E gerechnet, EP = u; Ferner sey die gegebene EN = c; Weil nun wegen der gegebenen Grundfläche; die Ordinaten PI; KP; durch die ihnen zugehörige Abscisse EP gegeben sind, so kann man KI = z als eine Function der Abscisse ansehen.

Man stelle sich über KI eine Ebene auf die Grundfläche senkrecht vor. Weil KIQ, KIM rechte Winkel sind, so steht diese Ebene auch auf die Ebene MIQ senkrecht (Geom. 47 S.)

Vermöge nur angeführten Satzes steht die Ebene MIQ auch auf des Schnittes GMHF Ebene senkrecht, weil MQF, IQF, rechte Winkel sind. Also stehn auf die Ebene MIQ die beyden Ebenen senkrecht, die des Schnittes, und die welche über KI auf der Grundfläche senkrecht steht. Dieser beyden Ebenen Durchschnitt, ist also eine gerade Linie durch M, der Ebene MIQ senkrecht (Geom. 48 S.) folglich der IK parallel.

Schneidet also diese Parallele des Schnittes GMHF Umfang noch einmahl, so ist dieser zweyte Punct senkrecht über K so hoch als M über I, und von der Ebene welche über KI senkrecht auf der Grundfläche steht, zwischen die Ebenen der Grundfläche und des Schnittes fällt ist ein Rechteck, dessen Grundlinie IK, Höhe IM.

Dieses Rechteck nun, bestimmt ein veränderliches Stück des Abschnittes, dessen Gränzen folgende

gende sind; 1) genanntes Rechteck; 2) so viel als von der schneidenden Ebene zwischen FG und ihren Durchschnitt mit der nur genannten senkrechten Ebene fällt. 3) was von der Grundfläche zwischen FG und KI enthalten ist; 4) die Theile der Fläche des cylindrischen Körpers, die sich auf einer Seite von F auf der andern von G bis an die senkrechte Ebene erstrecken.

Um das Differential von diesem Stücke des Abschnittes zu finden, darf man sich nur vorstellen, die senkrechte Ebene rücke mit einer sich selbst parallelen Bewegung etwas unendlich weniges weiter von FG; so wird die Grundfläche von ihr in einer Linie geschnitten werden, die mit KI parallel, und unendlich wenig davon unterschieden seyn wird. Beyde nur genannte Parallelen, werden auf der Grundfläche ein unendlich kleines Viereck $= zdu$ zwischen sich enthalten; Ueber diesem Viereck wird das gesuchte Differential stehn, das also als ein Prisma betrachtet, $= MI.\ zdu$ seyn wird.

Nun ist $QI = u - c$; also das gesuchte Differential $g.\ (u - c)\,zdu$; welches so integrirt, daß es für $u = c$ verschwindet; das veränderliche Stück des Abschnittes giebt. Setzt man darinnen $u = EB$ so hat man den ganzen Abschnitt.

619. Ex. Der Körper sey ein Cylinder, also die Grundfläche ein Kreis. AB sey ein Durchmesser, und E der Mittelpunct, r der Halbmesser, so ist $z = 2\sqrt{(rr - uu)}$ und das Differential

rential $= g.\,2udu.\sqrt{(rr-uu)} - 2cg\sqrt{(rr-uu)}.du.$ Den erſten Theil zu integriren ſey

in 245; c; X; a; p
hier — g; uu; rr; $\frac{1}{2}$

ſo iſt dieſes erſten Theils Integral $-\frac{2}{3}g.(rr-uu)^{3:2}$;

Den zweyten Theil drucke man ſo aus $-2cgr^2.\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{r^2}\right)}.\frac{du}{r}$; So iſt $\frac{u}{r}$ hier was in 274; x iſt, und das Integral dieſes zweyten Theils iſt $-2cgr^2.\frac{1}{4}.$

$$\left(2\mathfrak{B}\sin\frac{u}{r}+2\frac{u}{r}\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{r^2}\right)}\right)$$

Weil beyde Integrale, des erſten und des zweyten Theils zuſammen für $u = c$ verſchwinden ſollen, ſo iſt

$$\text{Conſt} = +\tfrac{2}{3}g.(r^2-c^2)^{\frac{3}{2}} + cgr^2.$$

$$\left(\mathfrak{B}\sin\frac{c}{r}+\frac{c}{r}\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{r^2}\right)}\right)$$

Dieſe Conſt und die veränderlichen Integrale zuſammen geben alſo das veränderliche Stück des Abſchnitts.

Will man den ganzen haben, ſo ſetzt man $u = r$; da wird des erſten Theils veränderliches Integral $= o$; und des zweyten ſeines

$=-$

$= -\frac{cgr^2\pi}{2}$. Dieſes und die Conſt zuſammen gerechnet, geben den ganzen Abſchnitt

$$g.\left(\tfrac{1}{3}.(2r^2+c^2)\sqrt{(r^2-c^2)}-r^2c\mathfrak{B}\cos\tfrac{c}{r}\right)$$

620. Der Innhalt des Abſchnittes iſt allemahl durch die Quadratur des Kreiſes gegeben, auſer wenn $c=o$ oder FG durch den Mittelpunct geht. Alsdenn iſt des Abſchnittes veränderliches Stück $=\frac{2}{3}$ g. $(r^3-(rr-uu)^{3:2})$ und der ganze Abſchnitt $\frac{2}{3}$ g r^3.

621. Aufg. Die Fläche des Abſchnittes zu finden.

Aufl. Die veränderliche Fläche des Abſchnittes, welche von den krummen Linien GI; MG; und der geraden MI begränzt wird, hat zum Differential MI mit ds; dem Differentiale der krummen Linie GI multiplicirt, und iſt alſo g. $(u-c)$ ds, ſo integrirt, daß es für $u=c$ verſchwindet. Setzt man in dieſem Ausdrucke $u=EB$; ſo hat man die ganze Fläche, die zwiſchen die Bogen GB; GH; und die gerade Linie HB fällt, wenn H ſenkrecht über B iſt. Das andere Stück zwiſchen eben dieſer Linie und dem Bogen FB; FH; läſſt ſich auf eben die Art finden. Es wird ſo groß als jenes ſeyn, wenn AB die Grundfläche in ähnliche und gleiche Hälften theilt, zu welcher Abſicht, die Grundfläche eine Linie der zweyten Ordnung und AB ihre Axe ſeyn kann.

622. Im

622. Im gebrauchten Exempel ist das Differential der Fläche $g.(u-c).\frac{rdu}{\sqrt{(rr-u^2)}} = grudu.(rr-u^2)^{-\frac{1}{2}} - gcr.\frac{du:r}{\sqrt{(1-uu:rr)}}$

Für des ersten Theils Integral ist

in 245	c;	X;	a;	p
hier	$-\frac{1}{2}gr$;	$-u^2$;	rr;	$-\frac{1}{2}$

Des andern Theils Integral findet sich aus (281); also ist die veränderliche Fläche Const $-grV(r^2-u^2) - gcr.\mathfrak{B}\sin\frac{u}{r}$ und Const $= grV(r^2-c^2) + gcr.\mathfrak{B}\sin\frac{c}{r}$ Also die Fläche bis an HB $= gr.\left(V(r^2-c^2) - c\mathfrak{B}\cos\frac{c}{r}\right)$

Die ganze Fläche des Abschnittes wird noch einmahl so groß seyn.

623. Zus. Auch die Fläche beruhet also auf der Quadratur des Kreises, auser für $c = 0$; da die ganze Fläche $2gr^2$ ist.

624. Für diesen besondern Fall ist der Abschnitt $= \frac{1}{3}r$ mit seiner Fläche multiplicirt; also so groß als eine Pyramide, die seine Fläche zur Grundfläche, und den Halbmesser zur Höhe hatte.

625. Anm.

625. Anm. Hertenſtein Miſc. Ber. Cont. I. p. 128. hat mit vieler Weitläuftigkeit, nur den Abſchnitt durch den Mittelpunct ſeinem körperlichen Innhalte nach, berechnet. Andere Exempel findet man bey der Agneſi; Inſt. Anal. L. III. §. 129. Kraft aber de vngulis cylindror. Comm. Ac. Petrop. T. VI. hat die Sache am vollſtändigſten abgehandelt. S. auch: Soliditas et area fruſtor. vngularium reſector. a cylindris rectis quor. baſes ſunt ſectiones conicae etiam altior. gener. ope calculi integral. inueſtigata a Ioſepho Stepling, S. I. Preſb. Dreſd. 1700. Priſmen wo die Grundfläche eine endliche Zahl Seiten hat, betrachtet Rothe, über die Ausrechnung ſchief abgeſchnittner Priſmen; Hindenburgs Archiv für reine und angewandte Mathematik; VI Heft 1797. 195 S.

Von Abſchnitten runder Körper.

626. Aufg. ADM 37 §. um die Axe AP gedreht, beſchreibt einen runden Körper; Man ſchneide ihn mit einer Ebene, welche auf die beſchreibende Ebene in einer gewiſſen Lage, dafür ich hier die vorgezeichnete Lage ADMP annehmen will, ſenkrecht iſt, und ſie in einer Linie DQ ſchneidet, die mit der Axe parallel iſt. Ich ſuche die Geſtalt des Schnittes.

Aufl. Man laſſe DS, MP; auf die Axe ſenkrecht, und Q ſey in MP; Nun heiſſe AS = c; DS = b; AP = c + z; PM = t; zwiſchen den beyden letzten iſt eine Gleichung gegeben. QC ſey der ſchneidenden Ebene Durchſchnitt mit der Ebene des Kreiſes, den PM bey der Herumdre-

hung

hung beschreibt, und C sey in dem Umfange dieses Kreises; Auf die Ebene dieses Kreises ist DQ senkrecht, weil sie mit AP parallel ist, (G. 46; S.) und folglich auch die Ebene DQC (G. 47 S.) daher ist QP; als der Durchschnitt der Ebenen des Kreises und APM, auf DQC senkrecht (G. 48. S.) und PQC = R = DQC. Man nehme nun DQ = z; QC = y für rechtwinklichte Coordinaten des Schnittes DC an; so ist $CP^2 = PM^2 = t^2 = y^2 + b^2$; diesen Werth von t also, in die gegebene Gleichung zwischen c + z und t gesetzt, bekömmt man eine Gleichung zwischen z und y. Auch läßt sich eines von beyden, b oder c wegen der gegebenen Gleichung wegschaffen.

627. Wenn AP die Linie ADM in ähnliche Hälften theilt, so enthält die Gleichung für ADM; nur Potenzen gerader Exponenten von t; und ist also $\alpha t^2 + \beta t^4 \ldots = A + B(c + z) + C(c + z)^2 \ldots$

628. Man nehme zum Exempel die Kegelschnitte; also

$$\begin{array}{rl} tt = & A + B.(c + z) + C.(c + z)^2 \\ bb = & A + Bc \qquad\quad + Ccc \\ \hline y^2 = & (B + 2Cc).\ z + Cz^2 \end{array}$$

Soll t = o für c + z = o seyn, so ist A = o. Wenn man nun diese Gleichungen mit dem gewöhnlichen Ausdrucke des Quadrats der Ordinate bey Kegelschnitten $\beta x \mp \frac{\beta}{\alpha} x^2$ vergleicht, so

ist

ist für die Linie ADM, $\beta = B$, und $\frac{\beta}{\alpha} = C$;

oder der Parameter B; die Axe $\frac{B}{C}$ eben so, für den Schnitt, der Parameter $B + 2Cc$ die Axe $\frac{B + 2Cc}{C}$; also hier der Schnitt der beschreibenden Linie ähnlich. (Alg. 387) Wenn man also ähnliche Linien als ähnliche Vielecke von unzählich viel Seiten ansieht, so verhalten sich die ganzen Flächen der beschreibenden Linie und des Schnittes wie die Quadrate der Axen (G. 42 S. 23. 3) oder wie $B.B : (B + 2Cc)^2$.

629. Aufg. Den Abschnitt des runden Körpers zu finden, der zwischen zwo parallelen Ebenen durch AP und DQ und der Ebene ADM die auf beyden senkrecht steht, enthalten ist. Seine übrige Gränzen sind, was von der krummen Fläche des Körpers, und von der Ebene des Kreises, den PM beschreibt, zwischen die genannten Ebenen fällt.

Aufl. Wenn man sich eine Ebene mit DQC parallel, und unendlich nahe daran vorstellt, so wird zwischen dieser Ebene und DQC das Differential des Abschnitts fallen, den man sucht. Dieses Differential ist also ein Prisma, dessen Grundfläche DQC und die Höhe db das Differential der Linie SD wäre. Diese Linie ist nähmlich

lich hier veränderlich, nachdem man den Punct D näher bey A oder weiter davon annimmt, den Abschnitt zu verändern: Aber AP und folglich PM sind jetzo unveränderlich, weil die Grundfläche des Abschnittes, die Ebene, welche beym Herumdrehen von PM beschrieben wird, unveränderlich bleiben soll.

Man quadrire also erstlich die Fläche DQC aus der Gleichung zwischen z und y auf die gewöhnliche Weise. So wird man eine Function von t und b erhalten (627). Diese multiplicire man mit db und integrire sie so, daß man t als unveränderlich, b als veränderlich ansieht, und das Integral für $b = o$ verschwindet. Dieses wird der Innhalt des Abschnittes seyn.

630. Ex. I. ADM sey eine Parabel, wo in 627; $A = o$ und $tt = B.(c + z)$ also $yy = Bz$; ferner $bb = B.c$ also die Fläche $DQC = \frac{2}{3} zy$ (208) $= \frac{2y^3}{3B}$ wo $y^2 = \sqrt{(tt - bb)}$ folglich ist das Differential des Abschnittes $\frac{2}{3B} \cdot (tt - bb)^{\frac{3}{2}} . db$

II. Man vergleiche dieß mit (401) so ist

	x	m	a	b	n	p
dorten						
hier	b	o	t^2	-1	2	$\frac{1}{2}$

Also

Also $\int (t^2 - b^2)^{\frac{3}{2}} . db = \frac{b . (t^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3t^2}{4} \int \sqrt{(t^2 - b^2)} . db$

III. Nun ist $\sqrt{(t^2 - b^2)}\, db = t\, db . \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{t^2}\right)}$

IIII. Es sey also was in (274) x heißt hier $\frac{b}{t}$ so ist der dortige Bogen δ hier B sin $\frac{b}{t}$; und $\int \frac{db}{t} . \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{t^2}\right)} = \frac{1}{4} . (2\delta + \sin 2\delta)$

V. Folglich $\int (t^2 - b^2)^{\frac{3}{2}} db = \frac{b(t^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3}{16} t^4 . (2\delta + \sin 2\delta) = \frac{1}{4} t^2 . (t . \cos \delta^3 + \frac{3}{4} t^2 . (2\delta + \sin 2\delta))$ welches mit $\frac{2}{3B}$ multiplicirt, den in (I) gesuchten Abschnitt giebt.

VI. Für $b = t$; wird $\delta = \frac{1}{2}\pi$; das Integral in (V) $= \frac{1}{4} t^2 . \frac{3}{4} t^2 \pi$, also der gesuchte Abschnitt $= \frac{\pi t^4}{8B} = \frac{\pi t^2 . (c + z)}{8} = \frac{1}{4}$ des Sphäroids, das von AM beschrieben wird (610; VIII). Wenn man nähmlich $b = t$ setzet, das

ſt, D in M rücken läſſt, ſo findet man den Theil des runden Körpers, den die Ebene AMP, und eine Ebene durch AP die auf vorige ſenkrecht ſteht, zwiſchen ſich enthalten.

630. Anm. Ich habe hier, nebſt der merkwürdigen Eigenſchaft der Schnitte (628) nur zeigen wollen, wie man die Formeln für die Integrirung irrationaler Differentiale braucht, auch in andern als vorhin betrachteten Fällen, die Differentiale der verlangten Gröſſen zu finden. Uebrigens ſind die Berechnungen des Innhalts und der Flächen anderer als runder und prismatiſcher Körper, hier zu weitläuftig, und überhaupt auſer dem, was die gemeine Geometrie davon lehret, noch wenig unterſucht. So haben Varignon und Leibniz Miſc. Ber. Cont. 2. die Fläche des ſchiefen Kegels zuerſt zu finden gelehrt. Euler Comm. Nou. Petrop. T. I. p. 4; und Noua Acta Petrop. T. III. 1788. hat darüber Unterſuchungen angeſtellt. Zur bequemen Ausübung lehren ſie nichts brauchbares. De Superficie coni ſcaleni habe ich eine Abhandlung der hieſigen Soc. d. W. vorgelegt Commentationes S. Sc. Gott. T. IX. ad 87; 88. Die Fläche durch eine Reihe auszudrucken iſt nicht ſchwer, die Coefficienten dieſer Reihe werden durch drey unveränderliche Gröſſen beſtimmt: Halbmeſſer der Grundfläche, Linie zwiſchen Spitze und Mittelpunct der Grundfläche, Höhe des Kegels. Das Verhalten zwiſchen dieſen drey unveränderlichen Gröſſen kann ſich auf unzählige Arten ändern. Das Geſetz, nach welchem die Coefficienten fortgehn, iſt nicht ſchwer anzugeben, jeder folgende wird durch alle vorhergehende gegeben. Fällt das Loth von der Spitze auf die Grundfläche weit vom Mittelpuncte, ſo nehmen die erſten Coefficienten langſam ab, man kann alſo muthmaaſſen das geſchehe auch bey den folgenden, ſelbſt iſt man nicht

ſicher

sicher ob folgende nicht etwa gröſſer werden als vorhergehende. Uebrigens ist das veränderliche der Reihe ein Bogen in der Grundfläche, und desselben Sinus und Cosinus. Die Hälfte der Fläche des Kegels ist durch die Coefficienten, und beständige Grössen gegeben, aber auch diese Hälfte weiß man wegen angeführter Beschaffenheit der Coefficienten nicht zuverlässig.

Ich bediene mich folgenden Verfahrens: Ich theile die Grundfläche in Bogen, jedem gehört ein Stück der krummen Fläche. Ich kann ein Paar Grössen angeben, davon eine gröſſer ist die andre kleiner, als erwähntes Stück; So habe ich Gränzen zwischen denen es enthalten ist. Diese Rechnung, für Stücken angestellt, die zusammen die Hälfte der krummen Fläche ausmachen, giebt Gränzen zwischen welche diese Hälfte fällt. Gränzen hat Archimed schon gebraucht, neuere Analysis hat gewiesen, bey den Untersuchungen die Archimed anstellte, die Gränzen so enge man wollte zusammen zu bringen der analytische Ausdruck führte auf Differentiale und Integrationen so was läſst sich nicht wohl beym ungleichseitigen Kegel bewerkstelligen.

Eine Figur auf einer Ebene, die sich um den gleichseitigen Kegel legen läſst, ein Netz desselben, verzeichnet die gemeine Geometrie; Meiner geometrischen Abhandlungen II. Samml. 4; 5; Abh. Für den ungleichseitigen Kegel läſst sich solches auch nur beynah verrichten, wie ich in angef. Abh. zeige.

De superficie coni scaleni determinanda, Iulius Conradus Yelin. Erlangae 1794. sucht die Gränzen auf eine etwas unterschiedne Art, stimmt aber übrigens mit mir überein.

Gebrauch der Integralrechnung, den Schwerpunct zu finden. Statik 49.

1. Aufg. Den Mittelpunct der Schwere F; 39 F. bey einer ebenen Figur zu finden, deren Gestalt BMANG gegeben ist.

Aufl. Das Gewicht dieser Figur ist ihrer Grösse proportionirt, (Stat. 38) wenn also MN = z; CP = x so ist das Gewicht = $\int z\,dx$ (206) so genommen, daß es für x = CA = e verschwindet. Wenn man sie also als eine Last betrachtet, die sich an dem Arme eines Hebels CF, befände, so wäre ihr Moment CF. $\int z\,dx$ weil jede Masse, was sie auch für eine Gestalt hat, den Hebel so drehet als wäre ihre ganze Last in F beysammen (Stat. 48). Aber das Moment des Elements MNnm ist = $xz\,dx$ um so viel muß sich das Moment der Figur verändern, wenn sich ihre Grösse um das Element verändert. Folglich ist $xz\,dx$ das Differential des Moments der Figur, oder $\int xz\,dx$ ist das Moment der Figur; wo man $\int xz\,dx$ so nehmen muß, daß es für x = e verschwindet, weil das Moment einer anfangenden Figur ohne Zweifel = o ist. Also ist

$$\int xz\,dx = CF.\ \int z\,dx \text{ oder } \frac{\int xz\,dx}{\int z\,dx} = CF.$$

Nähmlich, CF ist: Summe der Momente, mit Summe der Gewichte dividirt (Stat. 46).

So

So ist die Weite des Schwerpunctes, von einer willkührlich gezogenen Axe CD gegeben. Weiß man also eine Linie CF in der er sich befindet, so hat man ihn nun völlig bestimmt. Weiß man aber keine solche Linie, so suche man erstlich seine Weite von CD; alsdenn ziehe man DE auf GD senkrecht, und ziehe Ordinaten mit DE parallel, heissen dieselben nun z, und ihre Weiten von DE; x; so findet man auf eben die Art des Schwerpunctes Weite von DE; Er muß sich also in dem Durchschnitte zweyer Perpendikel auf DC und DE befinden.

2. Wenn AP die Axe der halben Parabel 35 F. ist, und derselben Schwerpunct F gesucht wird, so sey FS mit der Axe der Parabel, FT mit AD parallel, also $c = o$ und $z^2 = bx$ und $SF = \frac{\int z x dx}{\int z dx} = \frac{3}{5} x$; Nun sehe man das Element Pm als ein Gewicht an der Axe AP an; so ist der Abstand seines Schwerpunctes von dieser Axe $= \frac{1}{2} z$ also sein Moment $= \frac{1}{2} zz dx$ und also die Summe dieser Momente mit der ganzen Fläche der Parabel dividirt oder $TF = \frac{3}{8} z$. Wenn man also mit AD und AP Parallelen in den Weiten $\frac{3}{5}$ AP und $\frac{3}{8}$ PM zieht, so giebt ihr Durchschnitt den Schwerpunct F des Stückes APM.

3. Ein Dreyeck BGA 40 F. deſſen Grundlinie BG = g; Höhe CK = f; wo e = o; hat ſeinen Schwerpunct in der Linie AS welche die Grundlinie halbirt. Denn man ziehe MN; mn; mit der Grundlinie und Mμ; Nν mit AQqS parallel, ſo hat das Parallelogramm MNνμ gewiß ſeinen Schwerpunct in Qq, denn der Schwerpunct liegt in jeder Diagonale, und eine Linie durch der Diagonalen Durchſchnitt mit einem Paare Seiten parallel, halbirt jede der beyden übrigen Seiten. Indem ſich nun mn der MN unendlich nähert, nähert ſich der Theil des Dreyecks MNnm unendlich dem Parallelogramme NNνμ; alſo läſſt ſich das Dreyeck in Theile zerlegen, deren jeder ſeinen Schwerpunct in AS hat. Ferner, weil CK des Dreyecks Höhe ſeyn ſoll, ſo iſt AC mit BG parallel. Das Stück von CK das zwiſchen AC und MN fällt giebt des Elements MNnm Abſtand von der Axe AC an, heiſſt alſo x. Es iſt ſo groß als des Perpendikels von A auf BG Stück zwiſchen A und MN; alſo

x: AQ = f: AS aber
AQ: z = AS: g alſo

$x : z = f : g$ oder $z = \frac{gx}{f}$ folglich $\frac{\int gx^2\,dx : f}{\int gx\,dx : f}$

$= \frac{2}{3}x$ alſo $CF = \frac{2}{3}f$ Weil aber CF: FK = AF: FS ſo iſt auch $AF = \frac{2}{3}AS$. alſo nehme man auf der Linie, welche die Grundlinie halbirt, $\frac{2}{3}$ vom Scheitel.

Wenn

Wenn man annimmt der Schwerpunct sey in einer geraden Linie welche aus des Dreyecks Spitze die gegenüberstehende Seite halbirt, so müssen die drey geraden Linien welche so was aus den drey Spitzen thun, einander in einem und demselben Puncte schneiden weil das Dreyeck nur einen Schwerpunct hat (Stat. 48.) Die Annahme giebt also des Schwerpuncts Abstand von jeder Spitze blos aus der Geometrie. Meiner geometrischen Abhandlungen I. Samml. 12. Abh.

4. Bey der ganzen Parabel ist der Schwerpunct offenbahr in der Axe, und $\frac{1}{4}zz = bx$; dieses giebt $\frac{\int 2b^{\frac{1}{2}} x^{3:2}\, dx}{\int 2b^{1:2} x^{1:2}\, dx}$ oder $CF = \frac{3}{5}x$.

5. Zwischen dem Kreisbogen BOG und seiner Sehne BG, sey der Abschnitt BOG enthalten. Man sucht dessen Schwerpunct F. 41. Fig.

C sey des Kreises Mittelpunct, der Halbmesser $= r$; die Sehne $BG = 2h$; CO senkrecht auf sie, so liegt F in CO; auch ist (1) $CA = e = \sqrt{(r^2 - h^2)}$; ferner $\frac{1}{2}z = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ daher $\frac{1}{4}z^2 = r^2 - x^2$; $\frac{1}{2}zdz = -2xdx$; und $xdx = -\frac{1}{4}zdz$; folglich $zxdx = -\frac{1}{4}z^2 dz$ davon das Integral $= Const - \frac{1}{12}z^3$; Weil nun diese Summe der Momente sich an BG anfängt wo $z = 2h$; so muß sie da verschwin-

den, oder es ist $\varphi = \text{Const} - \frac{8h^3}{12}$ folglich die Summe der Mömente $= \frac{2}{3} h^3 - \frac{1}{12} z^3$, das wäre diese Summe für das Stück BGNM; also für den ganzen Abschnitt $z = 0$; und diese Summe für ihn $\frac{2}{3} h^3$

Diese muß nun mit dem Innhalte des Abschnittes dividirt werden. Der Abschnitt heisse S; der Ausschnitt zwischen CB, CG, und den Bogen BOG heisse V; und das Dreyeck CBG sey $= T$. So ist $S = V - T$.

Der Winkel BCO sey $= \eta$ so ist des Bogens BO Länge $= r. \eta$ und des Bogens BOG Länge $= 2r\eta$; und $V = r^2 \eta$ Imgleichen $T = c. h = h \sqrt{(r^2 - h^2)} = r. \sin \eta. r. \cos \eta = \frac{1}{2} r^2. \sin 2\eta$ (Trig. 19 S. 5. Zus.); also $S = r^2. (\eta - \frac{1}{2} \sin 2\eta)$

Daher $CF = \frac{\frac{2}{3} h^3}{r^2. (\eta - \frac{1}{2} \sin 2\eta)} = \frac{\frac{8}{3} r. \sin \eta^3}{\eta - \frac{1}{2} \sin 2\eta}$

6. Für einen Halbkreis wo $h = r$; $\eta = \frac{1}{2} \pi$ wird $CF = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4r.}{3}\, 0{,}318309$ (G. 44 S. 5. Z.) $= r.\, 0{,}424413181$

7. I Hieraus findet man des Ausschnittes Schwerpunct; Er sey in H, des Dreyecks Schwerpunct

punct ist auch in CO, in der Entfernung $\frac{2}{3}$ CA von C (639) Weil nun die Momente des Dreyecks und des Abschnitts zusammen das Moment des Ausschnitts geben müssen so ist $\frac{2}{3}$ CA. T + CF. S = CH. V; Also $CH = \frac{\frac{2}{3}CA.T + CF.S}{V}$

Von diesem Ausdrucke ist $\frac{2}{3}$ CA. T = $\frac{2}{3}e^2$. h; CF. S = $\frac{2}{3}h^3$; die Summe davon = $\frac{2}{3}$. h. $(h^2 + e^2) = \frac{2}{3}hr^2$; also $CH = \frac{2h}{3\eta} = \frac{2r.\sin\eta}{3.\eta}$

Es ist also $2r\eta : 2h = \frac{2}{3}r : CH$; oder der Bogen BOG zu seiner Sehne BG wie zwey Drittheile des Halbmessers zur Entfernung des Schwerpunctes vom Mittelpuncte.

8. Wenn der Winkel BCO verschwindet, daß $\frac{\sin\eta}{\eta} = 1$ (281) so kömmt $\frac{2r}{3}$ als die Entfernung des Schwerpuncts vom Mittelpuncte für einen unendlich schmalen Ausschnitt; Wie schon aus (3) erhellt, weil man diesen Ausschnitt als ein geradelinichtes Dreyeck betrachten kann.

9. Wenn man sich also einen Kreis in unzählich solche schmale Ausschnitte getheilt vorstellt, so ist eines jeden sein Schwerpunct in einem Halbmesser der ihn halbirt, $\frac{2}{3}$ des Halbmessers vom

Mittelpuncte entfernt. Da kann man sich also dieses Ausschnitts Gewicht beysammen vorstellen.

Und also kann man sich ferner vorstellen als lägen die Gewichte dieser Ausschnitte, in einem Kreise dessen Halbmesser $\frac{2}{3}$ des Halbmessers von dem gegebenen Kreise ist, um desselben Mittelpunct herum. Oder: statt der schweren Scheibe eines Kreises, kann man sich vorstellen: das Gewicht das durch sie durchaus verbreitet ist, sey in einen Ring zusammen gebracht dessen Halbmesser $\frac{2}{3}$ des Halbmessers des Kreises ist. Es ist also einerley, ob sich die schwere Scheibe um eine verticale Axe durch ihren Mittelpunct dreht, oder ob die Scheibe nicht schwer wäre, ihr Gewicht aber in dem erwähnten Ringe herumgeführt würde, auch braucht das Gewicht nicht einmahl durch den ganzen Ring ausgetheilt zu seyn, sondern könnte sich irgendwo nur im Umfange desselben, an einer Stelle beysammen befinden.

IIII. Man sieht leicht wie dieses auf einen Cylinder der sich um eine verticale Axe dreht anzuwenden ist, z. E. auf einen Mühlstein. Daher wird dieser Halbmesser des Ringes, als ein mittlerer Halbmesser bey Berechnungen im Maschinenwesen gebraucht. Man s. z. E. Belidor Architectur. Hydraul. I. Part. Tom. I. art. 240; 652; u. s. w.

10. Anm. Wie in 7; findet man allemahl den Schwerpunct der Summe oder des Unterschiedes von zwo

zwo Gröſſen, wenn man der einzelnen Gröſſen Schwerpuncte hat.

11. Aufg. **Wenn ſich der Schwerpunct des Bogens MAN einer krummen Linie, in der geraden Linie CF befindet, ſeine Stelle in dieſer Linie zu finden.**

Aufl. Das Moment jedes Elementes des Bogens iſt Nn. x; alſo $CF = \frac{\int x.\, Nn}{\int Nn}$

12. Ex. Für den Kreisbogen BOG; 41 Fig. wenn alles ſo verſtanden wird wie in (5) iſt Nn. $x = r x dx. (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = -r dy$; wenn PN $= y$; das Integral davon alſo $=$ Conſt $- ry$; Soll dieſes verſchwinden wenn $x = e$ oder $y = AG = h$; ſo wird das Integral $= r.(h - y)$; für den Bogen GN. Für den Bogen GO; ſetzt man $x = r$; oder $y = o$; und das Integral iſt rh. Dieß wäre die Summe der Momente für den Bogen GO; für den doppelten Bogen GOB iſt ſie alſo 2rh

Der Winkel GCO heiſſe η; daß $h = r. \sin \eta$ So iſt der Bogen GOB oder $\int Nn = 2r. \eta$ und

$$CF = \frac{r. \sin \eta}{\eta} = \frac{2}{3}. CH \quad (7)$$

13. Anm. Auf eine ähnliche Art findet man ohne Integralrechnung den Schwerpunct des Umfangs geradlinichter Figuren, davon Stevin in ſeiner Statik 2. B. verſchiedene Exempel hat.

14. Aufg.

14. Aufg. Den Schwerpunct eines Körpers zu finden, der aus Umdrehung der Figur ANG (39 F.) um ihre Axe AO entsteht.

Aufl. Weil er in der Linie AO ist, so suche man seine Weite AF; Es sey AP = x; PM = y; und AL die Axe (2) statt CD. So ist das Element des Körpers, das zwischen den Ebenen der Kreise enthalten ist, die von PN und pn beschrieben werden, $= \pi y^2 dx$ und sein Moment $= \pi y^2 x dx$; Wenn also wiederum die Summe der einzelnen Momente dem Momente des ganzen Körpers gleichgesetzt wird, so ist $CF = \frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx}$; die Integrale so genommen, daß sie für x = o verschwinden, und alsdenn f = AO statt x gesetzt.

Exempel.

15. Für die runden Körper von Kegelschnitten, wo $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ ist $CF = \frac{f.(4a-3f)}{2.(3a-2f)}$ Für die Parabel wird a unendlich und $CF = \frac{2}{3}f$.

16. Alle Stücken runder Körper von Kegelschnitten haben also einerley Schwerpunct, wenn sie einerley Axe a; und einerley Höhe f haben.

Für die Hälfte eines ganzen elliptischen Sphäroids, ist $f = \frac{1}{2}a$ also $CF = \frac{1}{16}.a$.

17. Aufg.

17. Aufg. Den Schwerpunct einer Pyramide, oder eines Körpers der durch kegelförmige Bewegung beschrieben wird (Alg. §40.) zu finden.

Aufl. Seine Grundfläche heisse B, und ihre Weite von der Spitze A 40 F.; oder die Höhe = f: BAG 40 F.; sey ein Schnitt von ihm, mit einer Ebene, die auf die Grundfläche senkrecht steht, und durch der Grundfläche Schwerpunct S geht, so befinden sich alle Schwerpuncte der Schnitte, welche mit der Grundfläche parallel gehen, in der Linie AS, weil diese Schnitte alle einander ähnlich sind, und gegen die Linie AS ähnliche Lagen haben. Ferner kann wie S. 6 u. S. §. 3. das Element dieses Körpers, das durch Ebenen begränzt wird, die durch MN; mn, mit der Grundfläche parallel gehen, als ein Prisma $= \frac{Bx^2\,dx}{ff}$ angesehen werden, dessen Schwerpunct in der Linie Qq ist, die durch beyder Grundflächen Schwerpuncte geht. Also befindet sich von jedem Elemente, und folglich vom ganzen Körper der Schwerpunct in der Linie AS. Er sey in F; so ist die Summe der Momente $= \int \frac{Bx^3\,dx}{ff}$ und das Moment des Körpers $= CF. \int \frac{Bx^2\,dx}{ff}$ beydes gleichgesetzt, und f statt x gesetzt

ſetzt giebt CF $= \frac{3}{4}$ f oder der Schwerpunct iſt allemahl $\frac{3}{4}$ der Höhe, von der Spitze entfernt.

18. In 35 Fig. ſey überhaupt F der Schwerpunct der Figur APM, wo AP $= x$, PM $= z$, ſo iſt (2) $TF = \frac{\frac{1}{2}. \int z^2. dx}{\int z. dx}$

Nun drehe ſich dieſe Figur um die Axe AP, ſo entſteht ein runder Körper deſſen Innhalt $= \pi. \int z^2. dx$.

Dieſer Innhalt iſt alſo $= \int z. dx$, TF. $2.\pi$.

Aber TF. 2π iſt der Weg des Schwerpuncts der ebenen Figur, indem ſie ſich ganz um die Axe AP dreht.

Alſo findet man des Körpers Innhalt, wenn man die Fläche der ebenen Figur die ihn beſchreibt, mit dem Wege ihres Schwerpuncts multiplicirt.

19. Ein rechtwinklichtes Dreyeck, habe die Hypotenuſe $= h$, die Grundlinie $= r$, wenn es ſich um ſeine Höhe dreht, beſchreibt die Hypotenuſe eine Kegelfläche. Der Hypotenuſe Schwerpunct, begreiflich mitten in ihr, beſchreibt einen Kreis deſſen Umfang $= r. \pi$. Dieſer Weg des Schwerpuncts mit der Hypotenuſe multiplicirt giebt h. r. π, die Kegelfläche.

20. Eine

20. Eine horizontale gerade Linie = b, deren Schwerpunct mitten in ihr ist, horizontal fortgeführt, beschreibt keine Fläche. Führt man sie in einer verticalen Ebene, sich selbst parallel niederwärts, so beschreibt sie ein Parallelogramm; Man setze bey dieser Bewegung beschreibe ihr Schwerpunct eine gerade Linie = c welche gegen den Horizont in dem Winkel γ geneigt ist, so ist des Parallelogramms Innhalt = b. c. sin γ; wo c. sin γ der Weg ist, nicht den der Schwerpunct wirklich zurückgelegt hat sondern um den er niedriger gekommen ist. Wäre er in der verticalen Ebene weder niedriger noch höher gekommen, so wäre keine Fläche beschrieben worden, wie weit er auch in einer geraden Linie fortgerückt wäre.

21. Eine begränzte Fläche die durch Bewegung einer Linie entsteht, ein begränzter Körper der durch Bewegung einer Fläche entsteht, ... jede Bewegung kann auch eine andre seyn als drehende .... ist so groß als ein Product aus dem Wege des Schwerpuncts, der beschreibenden Linie, oder beschreibenden Fläche, in die beschreibende Linie, oder beschreibende Fläche.

Von diesem Satze sind (18; 19) Exempel. Daß man bey dem Wege des Schwerpuncts eine gewisse Bedingung annehmen müsse zeigt (20) wovon ein andres Beyspiel ist: wenn ein Parallelogramm sich selbst immer parallel, und so bewegt,

wegt, daß sein Schwerpunct in einer geraden Linie geht, ein Prisma beschreibt.

22. Paulus Guldin, ein Jesuit, lib. 2. 3. de centro gravitatis, hat den Satz durch Induction vieler Exempel dargethan. Ich schreibe das Allegat Wolfen nach El. Math. T. II. El. Mech. §. 206. Wolf erinnert, Pappus habe ihn schon am Ende der Vorrede zum 7. Buche erwähnt. Die Stelle des Pappus ist nicht gar zu deutlich und hat in Commandins Uebersetzung Lücken. Es ist da von Verhältnissen die Rede, die ex proportione (Commandin braucht dieses Wort für Verhältniß) amphismatum et rectarum linearum similiter ad axes ductarum a punctis quae in ipsis gravitatis centro sunt zusammengesetzt sind, imgleichen zusammengesetzt ex prop. amphismatum, et circumferentiarum, et circumferentiarum a punctis quae in ipsis sunt centra gravitatis factarum, jenes ist: proportio perfectorum vtrorumque ordinum, dieses: imperfectorum. Es geht aber keine Erklärung vorher was perfecta, imperfecta, ordines sind, amphismata hat C. auch nicht zu übersetzen gewusst.

23. Wolf a. a. O. §. 193 giebt einen allgemeinen Beweis, der aber mir wenigstens nicht überzeugend ist, auch fügt er einen analytischen für runde Körper bey, ohngefähr wie meiner (18) und giebt Exempel. In seiner 194 §. redet er vom Parallelogramm (20) und erinnert, der

Weg

Weg des Schwerpuncts sey in der verticalen Directionslinie. (Stat. 48) Das möchte wohl die Sache nicht so darthun wie meine Vorstellung. Es gölte nur, wenn alle Grössen durch Fallen derer entstünden welche sie beschreiben, aber beym Drehen, (18; 19) ist jeder Weg des Schwerpuncts nicht in der Directionslinie.

Uebrigens erinnert Wolf, man habe Guldins Satz unter die vortrefflichsten Erfindungen des siebenzehnten Jahrhunderts gerechnet, und sich seiner bedient Flächen und Körper auszurechnen ehe Integriren bekannt ward. Leibniz habe gewiesen daß er auch statt findet wenn Axe oder Schwerpunct, während der Bewegung die eine Grösse erzeugt beständig verändert werden. Act. Erud. 1695; p. 493.

Wallisius bedient sich Guldins Regel, den körperlichen Innhalt eines Schraubenganges auszurechnen, giebt aber kein Exempel der Rechnung; Mechanica cap. 9. Pr. 6. Op. T. I. p. 991.

24. Schwerpuncte ebener Flächen zu finden lehrt Archimed, in seinen Büchern welche in Barrows Archimedis opera, den Titel de aequiponderantibus führen, Sturm nennt sie: Von der ebenen Flächen Gleichgewicht und Schwerpuncten.

Archimedis de iis quae vehuntur in aqua libri II. a Feder. Commandino restituti Bonon. 1565, zeigen daß Archimed auch von Körpern Schwer-

puncte bestimmt hat, weil sich darnach die Lage eines schwimmenden Körpers richtet, (Hydrost. 58) aber das Verfahren wie er, oder Andre vor ihm, das geleistet haben findet man nicht. Das veranlasste Commandin, der nur genannten Arbeit beyzufügen: Federici Commandini Vrbinatis liber de centro grauitatis solidorum. Bon. 1565.

Von diesem Buche, und Della Faille de centro grauitatis partium circuli et ellipsis s. meine Geschichte der Mathematik II. B. 203; 211. S.

In Stevins Statik, handelt das zweyte Buch von Findung des Schwerpuncts. Oeuvres de Simon Stevin par Girard deuxiesme Volume p. 457.

De centro grauitatis solidorum libri tres Lucae Valerii, 2. Ausgabe Bonon. 1661.

Begreiflich, integrirt keiner der genannten Schriftsteller. Man lernt also von ihnen wie sich bey solchen Fragen das Verfahren der griechischen Geometer nachahmen lässt, auch zu Ausmessung der Körper weil darauf die Lage des Schwerpuncts ankömmt.

Archimeds zwey Bücher über Kugel und Cylinder, eben desselben Kreismessung; übers. mit Anmerkungen von Karl Friedr. Hauber, Tübingen 1798. Hr. H. fügt dieser Uebersetzung bey: Ueber Kugel, Kugelabschnitte und Kugelrümpfe (Kugelstücken zwischen parallelen Ebenen) aus

Luc.

Luc. Val. de centro grau. Er hat die erſte Ausgabe gebraucht Rom. 1604. Auch: Ueber den Körper der durch Umdrehung eines Kreisabſchnittes um den Durchmeſſer beſchrieben wird, aus Tacquet Cyl. et Annular. L. I. P. IV. Antu. 1651. und über Körper die durch Umdrehung ebener regulärer Figuren entſtehn, aus Euangeliſta Torricellii opera geometrica Flor. 1644.

Da ſolche Bücher jetzo nicht oft vorkommen, iſt gut aus ihnen Vorbilder des Verfahrens der Alten zu haben. Auch wird man darauf die neuern Kunſtgriffe anwenden und ſo fühlen wie viel Erleichterung und Abkürzung dieſe gewähren.

25. Anwendung der leichtern Kunſtgriffe wie bald nach Erfindung des Integrirens bekannt waren, geben: Methode pour la meſure des ſurfaces, la dimenſion des ſolides, leurs centres de peſanteur, de percuſſion et d'oſcillation par l'application du Calcul intégral par M. Carré Paris 1700. Analyſe des infiniment petits, comprenant le calcul intégral dans toute ſon étenduë, av. ſon application aux quadratures, rectifications, cubatures, centres de gravité, de percuſſion etc. . . . par M. Stone, trad. en françois par M. Rondet Par. 1735. Wolf El. Mech. §. 156 ſequ. Einzelne ſchwere Unterſuchungen zu erzählen geſtattet hie der Raum nicht, ich erwähne nur die neuſte mir bekannte: Kramp über den Mittelpunct der Schwere im ſphäriſchen

Dreyecke, Archiv der Mathematik, von Hindenburg 1798 siebentes Heft.

26. Von den unzählichen Anwendungen des Schwerpuncts nenne ich hie nur eine aus der Baukunst. Wenn man eine Mauer als einen festen Körper ansieht, den seitwärts angebrachte Gewalt nicht zertheilt, sondern, wenn sie stark genug dazu ist, ganz umstürzt, so kömmt die Sache darauf an, den Schwerpunct dieser Masse so weit aus seiner Lage zu bringen, daß die Directionslinie auserhalb der Grundfläche fällt. Dahin gehörige Untersuchungen giebt Belidor, Science des Ingenieurs L. I.

Varia-

Variationsrechnung

Mit ihrer Anwendung auf Gröſſte und Kleinſte.

Von der Variationsrechnung.

1. BMN (43 Fig.) sey eine krumme Linie, oder auch eine Reihe an einander gefügter geraden, MN ein Theil von ihr. Durch A gehe eine Abscissenlinie auf welche von B, M, N, Perpendikel als Ordinaten fallen, und von A aus, Abscissen abschneiden. Man nenne $AP = x$, $PM = y$; $AQ = x + \Delta x$; $QN = y + \Delta y$.

2. Der grosse vierte griechische Buchstabe, bedeutet nähmlich wieviel in der Reihe der Abscissen, oder in der Reihe der Ordinaten, jedes Glied von seinem nächstvorhergehenden unterschieden ist, (wie in An. endl. Gr. 724) die Unterschiede mögen also auch endlich seyn. Werden sie unendlich klein, so schreibt man d statt Δ.

3. B*M*N*, sey eine andre krumme Linie oder Reihe von geraden, deren Coordinaten,

AP*; P* M*; AQ*; Q* N*; Diese Linie, nenne man variirte, der (1); Ihre Coordinaten, variirte jener, und drücke sie so aus: AP* $= x + \delta x$; P* M* $= y + \delta y$; so sind PP* $= \delta x$; P* M* $-$ PM $= \delta y$, Variationen der Coordinaten x; y;

4. I. So ist Differenz einer Abscisse, oder einer Ordinate, um wie viel sie sich ändert, wenn sie sich in die nächste Abscisse oder Ordinate, eben der krummen Linie verwandelt; Variation einer Abscisse oder Ordinate, wieviel sie sich ändert, wenn sie sich in Abscisse oder Ordinate der variirten Linie verändert.

II. Die Variation, nimmt man immer unendlich klein an, also die variirte krumme Linie, unendlich wenig von der unvariirten unterschieden.

5. I. Man nimmt die Linie BMN ganz unbestimmt an, nicht eine gewisse Gattung oder Art von krummen Linien. Was ich damit meyne erläutere folgendes Exempel.

II. Gesetzt BMN sollte eine gewöhnliche Parabel seyn, deren Parameter $= b$; Brennpunct A. So wäre AB $= \frac{1}{4} b$; $y^2 = b.(x + \frac{1}{4} b)$

III. Nun sollte B* M* N* auch eine Parabel seyn, deren Brennpunct ebenfalls in A. So müsste sie einen andern Parameter haben, der aber von dem ersten unendlich wenig unterschieden wäre, weil beyde Parabeln unendlich wenig unterschieden seyn sollen.

So

So wäre $(y + \delta y)^2 = (b + \delta b).(x + \delta x + \frac{1}{4}(b + \delta b))$ Da kämen also nicht Variationen der Coordinaten allein, in Betrachtung, sondern auch noch Variation des Parameters, und es gäbe eine Gleichung zwischen diesen drey Variationen.

IV. Es kann Untersuchungen geben wo dergleichen Verfahren nützlich wäre. Man könnte ja wohl einen Satz suchen, der von allen Parabeln wahr wäre, die Axe und Brennpunct gemein haben.

V. Bey solchen Untersuchungen würde, was in einer und derselben krummen Linie beständig ist, wie der Parameter der Parabel, in einer Reihe solcher krummen Linien als veränderlich angesehn.

VI. In dem hier folgenden, will man keine Variationen betrachten als die, der Coordinaten, und der Differenzen der Coordinaten von allen Graden. Das zeigt warum hie nach (I) verfahren wird.

6. Wie PP* die Variation von AP, so ist QQ* die Variation von AQ das ist von AP + PQ also ohne Zweifel Variation von AP + Variation von PQ; Folglich QQ* — PP* = der Variation von PQ; das heißt: Die Variation einer Abscisse, weniger der Variation ihrer vorhergehenden ist = der Variation des Unterschiedes der Abscisse. In Zeichen: $\delta(x + \Delta x) - \delta x = \delta \Delta x$.

7. Aber $QQ^* - PQ^*$ ist auch der Unterschied der Variationen beyder Abscissen oder $\delta AQ - \delta AP$. Schreibt man dieses so: $\Delta\delta x$, so hat man den Satz: $\Delta\delta x = \delta\Delta x$; Unterschied der Variationen der Abscissen ist Variation ihres Unterschiedes.

8. Auch bey den Ordinaten, ist: Variation der Differenz der unvariirten Ordinaten, so groß als Differenz der Variationen, das ist $\delta\Delta y = \Delta\delta y$.

Beweis. $\Delta\delta y$ bedeutet: von der folgenden Variation, die vorhergehende abgezogen.

Ist nun eine Variation $\delta y = P^* M^* - PM$
so ist die folgende $= Q^* N^* - QN$
also $\Delta\delta y = Q^* N^* - QN - P^* M^* + PM$
Ferner: $\delta\Delta y$ bedeutet: von dem variirten Unterschiede den unvariirten abgezogen. Nun ist der
unvariirte $= QN - PM$
der variirte $= Q^*N^* - P^* M^*$
also $\delta\Delta y = Q^*N^* - P^* M^*$
$- QN + PM$

Eben das Vorige.

9. Wenn man die Grössen wie sie untereinander stehen betrachtet so ist
$\Delta\delta y = \Delta(y + \delta y) - \Delta y$
$\delta\Delta y = \delta(y + \Delta y) - \delta y$
Also weil beyde Ausdrücke rechter Hand gleich sind
$\Delta(y + \delta y) - \Delta y = \delta(y + \Delta y) - \delta y$
das muß also folgendergestalt entwickelt werden
$\Delta y + \Delta\delta y - \Delta y = \delta y + \delta\Delta y - \delta y$

10. Das

10. Das heißt: Jeder der beyden griechischen Buchstaben, vor der Summe von ein Paar Grössen, bedeutet so viel, als die Summe dessen was heraus kömmt wenn man ihn vor jede einzelne setzt.

11. Wenn die Ordinaten QN; PM einander unendlich nahe gesetzt werden, und eben so die Q* N*; P* M*; (2) so ist (7) $d\delta x = \delta dx$ und (8) $d\delta y = \delta dy$; Variation des Differentials, so groß als Differential der Variation.

Wenn der krummen Linie BM Länge $= s$ heißt also MN $= ds$ so ist $B^*M^* = s + \delta s$ also $M^*N^* = d(s + \delta s) = ds + d\delta s$ Offenbar aber ist auch, wie $B^*M^* = s + \delta s$ so $M^*N^* = ds + \delta ds$; Wiederum Differential der Variation der Länge, einerley mit der Variation des Differentials der Länge.

12. Wenn also V überhaupt eine Grösse bedeutet, welche sich einmahl durch Unterschiede ändert, ein andermahl durch Variationen, so ist $\delta dV = d\delta V$.

13. Das zweyte Differential von V ist das Differential des ersten; also, Variation des zweyten Differentials = Differential der Variation des ersten, $\delta ddV = d\delta dV$

14. Auch so: Variation des dritten; vierten ... Differentials = Differential der Variation des zweyten, dritten ....

δd^3

$\delta d^3 V = d\delta d^2 V$;
$\delta d^4 V = d\delta d^3 V$. . . .

15. So $\delta d^5 V = d\delta d^4 V = d^2 \delta d^3 V = d^3 \delta d^2 V = d^4 \delta d V = d^5 \delta V$.

16. Wenn alſo Variation eines höhern Differentials verlangt wird, ſo kann man das Zeichen der Variation zwiſchen die wiederhohlten Zeichen der Differentiation ſchreiben wo man will. Schreibt man es unmittelbar vor V; ſo zeigt es an: Die Variation eines Differentials vor irgend einem Grade der Gröſſe V, betrage ſoviel als das Differential eben des Grades der Variation von V.

17; I. Man ſetze $dy = p.\,dx$; $dp = q.\,dx$; $dq = r.\,dx$ u. ſ. w. Dadurch werden die höhern Differentiale folgendergeſtalt ausgedruckt.

II. $d^2y = q.\,dx^2 + p.\,d^2x$
$d^3y = r.\,dx^3 + 3.q.\,dx.\,ddx + p.d^3x$
u. ſ. w.

III. Wenn man der Abſciſſe Differential unveränderlich ſetzt ſo kommen für die höhern Differentiale von y, nur Producte aus q, r, . . . in Potenzen deſſen von x.

IV. In dieſem Falle, hat dx kein Differential, aber Variation, dem $\delta(x + dx) = \delta x + \delta dx$ (10) der letzte dieſer beyden Theile iſt $= d\delta x$ (6).

18. Wenn eines Products F. G beyde Factoren variiren, iſt des Products Variation $= F.\,\delta G + G.\,\delta F$.

Denn

Denn das variirte Product ist $(F + \delta F).(G + \delta G)$, wenn man davon das unvariirte abzieht bleibt $F.\delta G + G.\delta F + \delta F.\delta G$ und der letzte Theil wird weggelassen, weil man jede Variation in Vergleichung mit der Grösse welche variirt unendlich klein nimmt.

19. Eines Quotienten $\frac{F}{G}$ Variation ist $= \frac{G.\delta F - F.\delta G}{G^2}$ denn der variirte Quotient ist $\frac{F + \delta F}{G + \delta G}$, von diesem den unvariirten abgezogen, kömmt vorerwähnter Dividend, der Divisor aber $= G.(G + \delta G)$ wo die Variation weggelassen wird.

20. Von $p = \frac{dy}{dx}$ ist also die Variation $=$

$$\delta p = \frac{dx.\delta dy - dy.\delta dx}{dx^2}\frac{\delta dx}{}$$

$$= \frac{dx.d\delta y - dy.d\delta x}{dx^2}\,(12) = \frac{d\delta y - p.d\delta x}{dx}$$

21. Wenn man dieses so differentiirt daß sich auch der Abscisse Differential ändert, so wird $d\delta p$ ein Quotient, dessen Divisor das Quadrat des Differentials der Abscisse ist, der Dividend $=$

$dx.d^2\delta y - d\delta y.d^2x$

$- (dx.(dp.d\delta x + p.d^2\delta x) - p.d\delta x.d^2x)$

Schreibt

Schreibt man den Diviſor darunter ſo kömmt

$$d\delta p = \frac{d^2\delta y}{dx} - \frac{ddx.d\delta y}{dx^2} + \left(\frac{p.d^2x}{dx^2} - q\right) d\delta x - \frac{p.d^2\delta x}{dx}$$

22. Weil $q = \frac{dp}{dx}$; ſo iſt δq ein Quotient, deſſen Diviſor das Quadrat des Differentials der Abſciſſe, der Dividend $= dx.\delta dp - dp.\delta dx$ Alſo den Diviſor untergeſchrieben, und nach (12) verwechſelt; $\delta q = \frac{d\delta p - q.d\delta x}{dx}$

23. Das giebt aus (21)

$$\delta q = -\frac{2.q.d\delta x}{dx} + \frac{d^2\delta y - p.d^2\delta x}{dx^2} + \frac{(p.d\delta x - d\delta y).d^2x}{dx^3}$$

Das als eine Probe, wie man die Variation von q durch die Variationen der beyden Coordinaten ausdrucken könnte; mit der von p iſt es (20) geſchehn.

Viel kürzer würde der Ausdruck nach (17; III.)

24. Weil $r = \frac{dq}{dx}$ ſo iſt $\delta r = \frac{\delta dq}{dx} - \frac{dq.\delta dx}{dx^2}$ oder, mit gehöriger Verwechſelung und Subſtitution $= \frac{d\delta q - r.d\delta x}{dx}$. Die Variationen von

p (20)

p (20) q (22); r hie; zeigen das Geſetz nach welchem ſie fortgehn. So wäre

$$\delta s = \frac{d\delta r - s.d\delta x}{dx}$$

Die Abſciſſe ſoll nicht variiren.

25. Das hieſſe ſo viel: Die Ordinaten der Linie B* M* N* 44 F. liegen auf eben den geraden Linien auf welchen die von B M N liegen, oder: Beyde Linien haben einerley Abſciſſen. Da iſt $\delta x = 0$. P* fällt auf P und Q* auf Q. Da nun P* Q* — P Q $= \delta dx$ (6) ſo iſt dieſes auch $= 0$.

26. Alſo $\delta p = \frac{d\delta y}{dx}$ (20) $\delta q = \frac{d\delta p}{dx}$ (22)

27. Für unveränderliches Differential der Abſciſſe (17; III) kömmt in (26) $\delta q = \frac{d^2\delta y}{dx^2}$. Darauf verkürzt ſich der Ausdruck (23) durch die jetzo gemachten beyden Vorausſetzungen.

28. Behält man dieſelben, und ſetzt $dq = r.dx$; $dr = s.dx$ u. ſ. w., ſo hat man $\delta r = \frac{d^3\delta y}{dx^3}$; $\delta s = \frac{d^4\delta y}{dx^4}$ u. ſ. w.

29. Aufg. V iſt durch x; y und derſelben Differentiale gegeben. Man verlangt die Variation von V durch die von x und y auszudrucken.

Aufl.

Aufl. I. Es ist also

$$dV = M.\,dx + N.\,dy + P.\,dp + Q.\,dq + R.\,dr + S.\,ds$$

Die grossen Buchstaben rechter Hand, sind Functionen von x und y, und derselben Differentialen. Nähmlich wenn V nur durch x und y gegeben ist, ohne Differentiale derselben, so besteht das Differential davon nur aus den beyden ersten Theilen; und M, N, sind nur durch x; y; gegeben. Ist in V noch $\frac{dy}{dx} = p$ enthalten, so kömmt in das Differential, zu den beyden Differentialen von x; y; noch das von p. Und das von q wenn in V zweyte Differentiale der Coordinaten enthalten sind, u. s. w.

Ich lasse hie u entschieden, ob dx veränderlich seyn soll oder nicht.

II. Das Differential von V zu finden setzt man in V; statt x; y; p; q; .. x + dx; y + dy; p + dp; q + dq; Das giebt V + dV; beym Abzuge heben sich alle die Theile auf die keine Differentiale enthalten, und so kömmt ein Ausdruck wie für dV ist angegeben worden.

III. Die Variation von V zu finden, setzt man statt x; y; p; q ... x + ∂x; y + ∂y; p + ∂p; q + ∂q.... Das giebt V + ∂V. Im Abzuge heben sich alle Glieder auf, die keine Variation enthalten. Was also übrig bleibt,

muß

muß völlig der Ausdruck seyn, der in (II) übrig blieb, nur Variationen statt Differentiale gesetzt.

IV. Also ist

$$\delta V = M.\delta x + N.\delta y + P.\delta p + Q.\delta q + R.\delta r \ldots$$

Die Variationen von p; q; lehret (20; 22) nach welchem Verfahren man weiter fortgeht.

V. So kömmt

$$\delta V = M.\delta x + N.\delta y + \frac{1}{dx}\cdot(P.d\delta y + Q.d\delta p \ldots) - \frac{d\delta x}{dx}\cdot(P.p + Q.q \ldots)$$

VI. Wenn die Abscisse nicht variirt (25) und immer gleiche Differentiale behält (17; III) ist

$$\delta V = N.\delta y + \frac{P.d\delta y}{dx} + \frac{Q.d^2\delta y}{dx^2} \ldots$$

VII. Exempel. Variation der Subtangente.

Sie ist $= \frac{y}{p}$ also ihr Differential $= dV = \frac{dy}{p} - \frac{y}{p^2}\cdot dp.$

Folglich 29; I

$$\begin{vmatrix} M & N & P & Q \ldots \\ o & -\frac{1}{p} & -\frac{y}{p^2} & o \ldots \end{vmatrix}$$

hie

und so, nach 29; V; die Variation $= \frac{\delta y}{p} - \frac{y.d\delta y}{p^2.dx} + \frac{y.d\delta x}{p.dx}$. Nach 29; VI; wird die

Variation $= \frac{y.\delta y}{dx} - \frac{y.dx.d\delta y}{(dy)^2}$

30. Variation von V. dx^n

1) Sie ist $V.\delta dx^n + dx^n.\delta V$

Die Variation von dx^n findet sich, wenn man diesen Ausdruck von $(d(x+\delta x))^n$ abzieht, das ist von $(dx + d\delta x)^n$. Sie ist also $= n.dx^{n-1}.d\delta x$; Also die gesuchte Variation $= nV.dx^{n-1}.d\delta x + dx^n.\delta V$; wo man den letzten Theil aus (29) hat.

II) Das Product dessen Variation hie gefunden wird, ist unendlich klein oder unendlich groß, nachdem n bejaht oder verneint wird, V endlich angenommen. So zeigt sich hie, wie man die Variation von etwas unendlich grossem, oder unendlich kleinem findet.

Variationen von Integralen.

31. I. V sey eine Gröſſe durch x; y; derselben Differentiale vom ersten oder mehren Graden allenfalls auch Integrale die auf das genannte ankommen gegeben.

Exempel wären: $y^2 + x^2$;
$y.dx - x.dy$;
$y.ddx + x.dd\dot{y}$;
$y.\int \not{\epsilon}\,(dx^2 + y^2)$: u. s. w.

II. Wie die Coordinaten AP, PM, zusammengehören, so gehört ihnen ein gewisses V. Ist das keine Linie, so kann es durch Division, mit einer

einer Grösse die für alle Coordinaten einerley bleibt, auf eine Linie gebracht werden.

Z. E. $V = y. \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ wäre für die Abscisse AP ein Rechteck, unter der Ordinate PM, und der krummen Linie Länge BM. Nimmt man eine gerade Linie, a, die für AP, PM, so groß ist als für AQ. QN, kurz für eine Stelle der krummen Linie so groß als für die andre so ist $\frac{y. \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{a}$ eine gerade Linie.

III. Man kann also durch P auf die Abscisse, ein Perpendikel PV ziehn, das entweder so groß ist als V, oder sich wie diese Grösse verhält.

Geht dergleichen Perpendikel QW auch durch Q, so sind PV, QW Ordinaten einer Linie welche mit BM einerley Abscissen hat, und in der die Ordinaten sich wie V verhalten.

IV. Geht die Linie BM bis an D daß man CD als ihre letzte Ordinate annimmt, so sey CF die letzte Ordinate der Linie (III).

V. Differential der Fläche dieser Linie ist VP. PQ. und so ist $V. dx$ so groß als erwähntes Differential der Fläche, mit einer unveränderlichen Grösse (II) multiplicirt. Also verhält sich $\int V. dx$ allemahl wie die Fläche der krummen Linie VW, von der Abscisse o an, bis an die Abscisse AP, oder Ordinate PV.

VI. Setzt man $x = AC$; so ist $\int V dx$, wie die Fläche genannter Linie bis an die Ordinate CF.

VII. Begreiflich bekömmt man $V + \partial V$ wenn man in V (I) $x + \partial x$; $y + \partial y$; und so statt jeder Grösse die sich in dem Ausdrucke von V befindet, diese Grösse + ihrer Variation setzt.

So giebt sich vermittelst der Division durch eben die unveränderliche Grösse welche in (II) gebraucht war, $P^* V^*$. Und solchergestalt eine krumme Linie $V^* W^* F^*$ deren Ordinaten sich wie $V + \partial V$ verhielten.

VIII. Ein Differential der Fläche dieser krummen Linie wäre $V^* P^* . P^* Q^*$; also die unveränderliche Grösse, mit welcher dividirt werden soll, als 1 angenommen $= (V + \partial V) . (dx + \partial dx)$ $= V . dx + V . \partial dx + \partial V . dx$; des Products vierter Theil bleibt weg als unendlich klein von der dritten Ordnung.

Die beyden letzten hergeschriebenen Theile, wären also die Variation von $V . dx$, dem Differentiale der Fläche der krummen Linie VW; oder, sie wären $= V^* P^* Q^* W^* - VPQW$.

In der wo die Abscisse nicht variirt (25) gäben sie $V^* VWW^* = \partial V . dx$.

IX. Die Fläche dieser krummen Linie, das Integral des in (VIII) angegebenen Differentials ginge bis an die Ordinate $P^* V^*$.

X. Daß ich die Flächen (V. IX) nicht bis an die Ordinaten QW, $Q^* W^*$ erstrecke ist den Ausdrücken des Integrirens gemäß; $fy . dx$ bedeutet eine Fläche die sich bis an y erstreckt, nicht bis an $y + dy$.

32. Ein Integral $\int V . dx$ heißt einfach wenn V nur durch die Coordinaten und deren Differentiale, gegeben ist, also dV sich wie in (29) ausdrucken lässt.

33. Man setze $\int V . dx = \int (y dx + dx \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)})$. So was heißt ein zusammengesetztes oder verwickeltes Integral (formula integralis complicata) weil in ihm selbst wiederum ein Integral enthalten ist. Da wäre

$V = y + \int dx \sqrt{(1 + p^2)}$

und $dV = dy + \sqrt{(1 + p^2)} . dx$ liesse sich nicht wie in (29) ausdrucken.

34. In der Folge wird Summe von Variationen erwähnt. $P^*M^* - PM$ ist die Variation von PM. Man stelle sich also alle Ordinaten der Linie BM von B bis M vor, und jeder ihre variirte, das ist alle Ordinaten der Linie $B^* M^*$ von B^* bis M^*; Jede variirte übertrifft die ihr zugehörige unvariirte um derselben Variation. So machen alle diese Variationen eine gewisse Summe aus, die man $\int \delta y$ nennen kann;

Also ist auch $d \int \delta y = \delta y$.

35. Lehrsatz. Eines Integrals $\int W$ Variation, ist so groß als das Integral der Variation von W; $\delta \int W = \int \delta W$.

Beweis. Z sey eine Grösse deren Differential $= W$., oder $dZ = W$.

So ist $\delta dZ = \delta W$

Aber $\delta dZ = d \delta Z$ (12)

Also $d \delta Z = \delta W$; Folglich $\int d \delta Z = \int \delta W$;

Aber $\int d\delta Z = \delta Z = \delta \int W$
Folglich $\delta \int W = \int \delta W$.

36. Exempel. Es ſey $W = x.dy + y.dx$
Alſo $\int W = x.y$; Davon die Variation $x.\delta y + y.\delta x$. Und dieſer Variation Differential
$x.d\delta y + \delta y.dx + y.d\delta x + \delta x.dy$
Das iſt (12)
$x.\delta dy + \delta y.dx + y.\delta dx + \delta x.dy$

Dieſes iſt Differential der Variation des Integrals.

Des Integrals Differential iſt W; und davon die Variation
$= x.\delta dy + dy.\delta x + y.\delta dx + dx.\delta y$

Alſo das Differential der Variation des Integrals, ſo groß als die Variation des Differentials, oder $d\delta \int W = \delta W$; daher auf beyden Seiten ſummirt $\delta \int W = \int \delta W$.

37. I. Hat man alſo ein Integral $\int V.dx$; ſo iſt deſſen Variation, das Integral der Variation von $V.dx$
alſo $= \int (V.\delta dx + dx.\delta V)$ oder
$= \int (V.d\delta x + \int dx.\delta V)$
Der erſte Theil iſt $= V.\delta x - \int \delta x.dV$
alſo endlich
$\delta \int V.dx = V.\delta x - \int \delta x.dV + \int dx.\delta V$

II. Wenn in (31; V) die Fläche bis $PV = \int V.dx$, variirt ſo kömmt (daſ. IX) die Fläche bis P^*V^*; Jene alſo von dieſer abgezogen läſſt $\delta \int V.dx$.

In

In 31; VIII. ſteht die Variation von V. dx Wenn man die integrirt, kömmt was hie in (I) in der letzten Zeile rechter Hand des Gleichheitszeichens ſteht. Das iſt alſo = ∫∂V. dx.

38. Aufg. Wenn das Integral ein einfaches iſt (32) ſeine Variation zu finden.

Aufl. I. Da ſteht ∂V in (29; IV) des Integrals (37) Variation iſt alſo =

V. ∂x + ∫dx. (M. ∂x + N. ∂y + P. ∂p + Q∂q + R. ∂r. . .)

— ∫∂x. (M. dx + N. dy + P. dp + Q. dq + R. dr. . .)

II. Das erſte Glied der obern Summe hebt ſich mit dem erſten der untern auf, ſo kömmt ∂∫V. dx =

V. ∂x + ∫N. (dx. ∂y — dy. ∂x)
+ ∫P. (dx. ∂p — dp. ∂x)
+ ∫Q. (dx. ∂q — dq. ∂x)
+ ∫R. (dx. ∂r — dr. ∂x) u. ſ. w.

III. Aus 20; 22; 24; laſſen ſich die Producte, in denen N, P, Q, R, befindlich ſind ſo ausdrucken

N. dx. (∂y — p. ∂x)
P. d (∂y — p. ∂x)
Q. d (∂p — q. ∂x)
R. d (∂q — r. ∂x)

IV. Wenn man ∂y — p. ∂x = ω ſetzt; So bekömmt man in (III) N. dx. ω und P. dω. Das kann die Muthmaaſſung veranlaſſen, Differentiale des griechiſchen letzten Buchſtabens möchten

weiter fortgehn. Die prüft man nun so:

$$\delta p - q.\,\delta x = \frac{d\delta y - p.\,d\delta x - dp.\,\delta x}{dx}$$

$$= \frac{d\omega}{dx}; \text{ Ferner } \delta q - r.\,dx =$$

$$\frac{d\delta p - q.\,d\delta x - dq.\,\delta x}{dx} = \frac{1}{dx}.\,d\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$$

V. Die Parentheſe um den Quotienten zweyer Differentiale, bedeutet daß das Zeichen der Differentiation vor ihr, ſich auf den Quotienten bezieht, nicht blos etwa auf ſeinen Dividend. Sie hat alſo nicht die Bedeutung wie in An. Un. 484.

Euler ſchreibt den letzten Ausdruck in (IV) ſo:

$$\frac{1}{dx}\,d.\,\frac{d\omega}{dx}$$

Ein Punct iſt doch faſt allgemein gewöhnlich Zeichen der Multiplication. Man muß alſo aus dem Zuſammenhange errathen, was er hie bedeutet.

VI. Wenn man nun die Ausdrückungen (IV) in (III) braucht, und dann die Variation des Integrals in (II) durch ihren erſten Theil, und die folgenden Integrale ausdruckt, So kömmt dieſe Variation

$$= V.\,\delta x + \int N.\,dx.\,\omega + \int P.\,d\omega$$

$$+ \int Q\,d\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \int R\,d\left(\frac{1}{dx}.\,d\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right) \ldots$$

Wei-

Weiter fortgesetzt findet man sie in Eul. Calc. Var. §. 79. da sich auch das Gesetz des Fortganges noch deutlicher zeigt.

VII. Der dritte Theil lässt sich so ausdrucken: $P.\omega - \int \omega . dP$.

VIII. Der vierte Theil lässt sich so ausdrucken: $Q.\frac{d\omega}{dx} - \int dQ.\frac{d\omega}{dx}$ Was im zweyten Stücke hinter $\int$ steht ist $= \frac{dQ}{dx}.d\omega$; also das zweyte Stück $= \frac{dQ}{dx}\omega - \int \omega . d\left(\frac{dQ}{dx}\right)$

also der vierte Theil

$$= Q.\frac{d\omega}{dx} - \frac{dQ}{dx}\omega + \int \omega . d\left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

IX. Der fünfte Theil lässt sich so ausdrucken:

$$R.\frac{1}{dx}.d\left(\frac{d\omega}{dx}\right) - \int \frac{dR}{dx}.d\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$$

Das zweyte Stück hievon, mit Beyseitsetzung des Zeichens, lässt sich so ausdrucken $\frac{dR}{dx}\frac{d\omega}{dx} - \int \frac{1}{dx}.d\left(\frac{dR}{dx}\right).d\omega$ und von diesem Ausdrucke des zweyten Stücks, lässt sich wiederum desselben zweyte

tes Stück mit Beyseitesetzung des Zeichens — so ausdrucken $\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{dR}{dx}\right) \cdot \omega - \int \omega . d\left(\frac{1}{dx} d\left(\frac{dR}{dx}\right)\right)$

Also ist der fünfte Theil

$$R . \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d\omega}{dx}\right) - \frac{dR}{dx} \cdot \frac{d\omega}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{dR}{dx}\right) \cdot \omega - \int \omega . d\left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{dR}{dx}\right)\right)$$

39. Aufgabe. Die Variation des Integrals (38) so darzustellen, daß keine Differentiale der Variationen von x und y, nach einem Summationszeichen stehn.

Aufl. I. Man suche aus 38; VI; VII; VIII; IX, was hinter einem Summationszeichen steht. Es beträgt zusammen

$$\int \omega . dx . \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{dQ}{dx}\right) - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{1}{dx} \cdot d\frac{dR}{dx}\right)\right)$$

II. Eben daraus, was in ω multiplicirt ist. Es macht zusammen $\omega . \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{1}{dx} \cdot d\frac{dR}{dx}\right)$

III.

III. Und daraus, was in $\frac{d\omega}{dx}$ multiplicirt ist; macht zusammen $\frac{d\omega}{dx} \cdot \left(Q - \frac{dR}{dx}\right)$

IV. Und was in $\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$ multiplicirt ist, nähmlich $\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d\omega}{dx}\right) \cdot R$.

V. So kann man die Variation des Integrals durch folgende Zeilen zusammen angeben:
Die erste steht in (I)
Die zweyte V. δx + dem was in (II) steht.
Die dritte steht in (III)
Die vierte in (IV)

VI. Euler hat auch mit für S (29; I) gerechnet, so kömmt in jeder Zeile ein Glied mehr, und noch eine fünfte Zeile.

VII. Wenn man dx beständig setzt, so kömmt

$$\delta \int V. dx = \int \omega. dx. \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3}\right)$$
$$+ V. \delta x + \omega. \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2}\right)$$
$$+ \frac{d\omega}{dx} \cdot \left(Q - \frac{dR}{dx}\right)$$
$$+ \frac{d^2\omega}{dx^2} \cdot R$$

VIII.

VIII. Wenn sich die krumme Linie welcher die Coordinaten x; y; gehören von B bis M erstreckt, so wird der Theil welcher als Integral ausgedruckt ist (I) durch alle Puncte dieser Linie bestimmt, weil für jeden Punct ω einen andern Werth bekömmt.

Aber für die folgenden Theile (II; III; IV;) ist ω, was der letzten Abscisse und Ordinate, gehört also $= P^* M^* - PM$

$$- \frac{(QN - MN)}{PQ} \cdot PR^*$$

IX. Weil bisher ganz unbestimmt gelassen ist, wie sich der Coordinaten Variationen gegen der Coordinaten Differentiale verhalten sollen, so lassen sich weder der summatorische Theil noch die übrigen, anders angeben als sie hie ausgedruckt sind.

X. Setzte man jeder Coordinate Variation verhielte sich, wie eben derselben Coordinate Differential; $\delta y : \delta x = dy : dx$, so wäre (38; IV) $\omega = 0$, so fiele alles weg was in I; II; III; IV; steht, und käme $\delta \int V. dx = V. \delta x$

Bey dieser Voraussetzung wären die Differentiale der Längen beyder Linien parallel; MN mit $M^* N^*$

40. Exempel. I) Es sey $V = x. y + x. yp$
Also $dV = (1 + p). y. dx + (1 + p). x. dy + x. y. dp$

folg-

folglich | M | N | P | Q | . . .
hie | (1 + p). y | (1 + p). x | x. y | 0 | . . .

Folglich $\frac{dP}{dx} = y + p.x$ und $N - \frac{dP}{dx} = x - y$

II) So kömmt in 39; VII; rechter Hand
$dx. \int (\delta y - p. \delta x). [x - y]$
$+ V. \delta x + (\delta y - p. \delta x). x. y$

Weil dx unveränderlich ist, darf ich es vor das Summationszeichen schreiben.

III) Was integrirt werden soll ist

$$x. \delta y - \frac{x. dy}{dx}. \delta x - y. \delta y + \frac{y. dy}{dx}. \delta x.$$

IV) Wenn man für die Linie BM., die erste Abscisse = o setzt, welcher die Ordinate AB gehört, so gehört einer Abscisse die man für die zweyte annimmt, oder für die erste unter den folgenden, eine Ordinate welche die zweyte ist, oder die erste unter den folgenden Ordinaten; und so der folgenden Abscissen zweyter, dritter . . . unter den folgenden Ordinaten die zweyte, dritte. . . .

Es ist willkührlich wie weit man diese Abscissen und Ordinaten fortsetzen will. Ich nehme an man gehe bis an AP und PM.

V) Jede Abscisse mit der Variation ihrer Ordinate multiplicirt giebt ein x. δy; Alle diese Producte zusammen machen $\int x. \delta y$; das letzte unter ihnen ist AP. (P* M* = PM)

VI)

VI) Wenn jede Abſciſſe um ihr Differential wächſt, wächſt zugleich die zugehörige Ordinate um ihr Differential ... Wachſen kann bekanntlich auch verneint genommen werden und Abnehmen bedeuten. .. Für jede Abſciſſe giebt es alſo ein $\frac{x.\,dy}{dx}$; Dieſes wird mit der Variation derſelben Abſciſſe multiplicirt: Alle ſolche Producte zuſammen geben $\int p.\,x.\,\delta x$; Das letzte unter ihnen iſt $\frac{QN - PM}{PQ}$. AP. (AP* — AP)

VII) Jede Ordinate mit ihrer Variation multiplicirt giebt ein Product. Alle zuſammen geben $\int y.\,\delta y$; Das letzte unter ihnen iſt PM. (P* M* — PM)

VIII) Jede Ordinate mit ihrem Differential multiplicirt, und das Product mit der Abſciſſe Differentiale dividirt, giebt einen Quotienten, dieſer wird mit der Variation der Abſciſſe multiplicirt, und alle die Producte zuſammen geben $\int p.\,y.\,\delta x$ Das letzte unter ihnen iſt $= \frac{PM.\,(QN - PM)}{PQ}$. PP*

IX) Was in V; VI; VII; VIII; iſt angegeben worden, mit den Zeichen + und — nach (III) gehörig zuſammengeſetzt giebt in (II) $\int(\delta y - p.\,\delta x).\,[x - y]$ wird alſo durch alle Abſciſſen und

und Ordinaten der krummen Linie BM bestimmt, von B bis M.

Und giebt mit dx multiplicirt, den summatorischen Theil der Variation von ſV. dx.

X) Jede Abscisse und zugehörige Ordinate der Linie BM, bestimmt ein V, ein andres Paar solcher Coordinaten ein andres. Wenn man also die Linie bis an M erstreckt, so ist das diesem Puncte gehörige V, das welches durch AP und PM bestimmt wird, in der Figur durch PV angegeben (31; III) und V. δx ist = PV. PP*.

XI) Für eben den Punct M; ist δy = P* M* — PM; p. $\delta x = \frac{QN - PN}{PQ}$. PP*; x. y = AP. PM. Also wird (δy — p. δx). x. y nur durch diesen Punct M bestimmt.

XII) So erfodert in (II) nur der erste summatorische Theil, alle Puncte der krummen Linie von B bis M (IX) die übrigen beyden Theile werden nur durch M gegeben.

XIII) Weil die Verhältniß zwischen Variationen und Differentialen der Coordinaten, ganz unbestimmt ist, so kann man das Integral (IX) nicht durch x und y angeben. Das liesse sich thun, wenn erwähnte Verhältniß bestimmt würde.

XIV) Es sey z. E. $\delta y = \frac{1}{2}$. dy; $\delta x = \frac{1}{2} \delta x$ so wäre δy — p. $\delta x = \frac{1}{2}$. dy — $\frac{dy}{dx}$. $\frac{1}{2}$. dx =

$\frac{1}{6}$. dy.

$\frac{1}{6}$. dy was integrirt werden ſoll (III) $= \frac{1}{6}$. (x. dy − y. dy) alſo das Integral $= \frac{1}{6}$. ((x − $\frac{1}{2}$ y). y − ∫y. dx) und endlich von ∫(x. y. (dx + dy)) die Variation =

$$\frac{1}{6}\text{. dx. ((x} - \tfrac{1}{2}\text{ y). y} - \int \text{y. dx)}$$

$$+ \text{ x. y.}\left(1 + \frac{\text{dy}}{\text{dx}}\right)\text{.}\ \tfrac{1}{3}\text{. dx} + \text{x. y.}\ \tfrac{1}{6}\text{. dy}$$

Die erſte Zeile wird durch die ganze Linie BM beſtimmt, weil in ihr die Quadratur dieſer Linie vorkömmt, das folgende giebt ſich, wenn AP, PM, ſtatt x, y; geſetzt werden. (39; VIII.)

43. Die Lehren (1.. 39) ſind aus Euler: Appendix de calculo Variationum bey: Inſtitutionum Calculi Integralis Volumen III. Petrop. 1770; die drey erſten Capitel. Das vierte redet de Variatione formular. integral. complicatarum duas variabiles inuoluentium. Das Beywort erklärt hie (33).

44. Das fünfte: de var. form. int. variabiles inuoluentium et duplicem relationem implicantium. In einer Formel ſind drey veränderliche Gröſſen mit ihren Differentialen von unterſchiednen Graden, zwo von ihnen werden, jede für ſich als eine Function der dritten angeſehn, das iſt duplex relatio.

45. Eine krumme Fläche, wird durch eine einzige Gleichung zwiſchen drey Coordinaten x; y; z, angegeben, da iſt jede Coordinate eine Function

rion der beyden übrigen zusammen. (An. endl. Gr. 514; 547; 548). Eine Linie auf einer krummen Fläche (An. endl. Gr. 570) ist auch durch drey Coordinaten gegeben aber so: Auf die Grundfläche fällt von jedem Puncte der krummen Linie ein Loth = z, da ist der krummen Linie Projection auf die Grundfläche, eine krumme Linie in einer Ebene wo y eine Function von x ist.

Nun stelle man auf die Grundfläche eine Ebene senkrecht durch die gerade Linie auf welchen die x genommen werden. Auf diese Ebene fälle man auch Lothe von jedem Puncte der Linie mit doppelter Krümmung; Diese Lothe geben auf nur genannte Ebene auch Projection der Linie mit doppelter Krümmung; Eine krumme Linie wo z eine Function von x ist.

So stellen die beyden Projectionen die doppelte Relation dar.

46. Sechstes Capitel: Variation von Differentialformeln mit drey veränderlichen Grössen, deren Verhalten durch eine einzige Gleichung gegeben ist... Wie bey einer krummen Fläche (45) Dieß ist der Innhalt des (43) angezeigten Anhanges.

47. Methodus noua et facilis calculum variationum tractandi auct. L. Eulero findet sich in Noui Commentarii Ac. Sc. Imp. Petropolitanae T. XVI. pro anno 1771; p. 35. – 70 und daraus in Euleri Institut. calc. Integral. Vol. IV. continens Supplementa (Petrop. 1794) p. 596. . 620

48. In einer krummen Linie, kann man allemahl die Ordinate als eine Function der Abſciſſe anſehn, alſo ſetzen $y = X$.

49. Gehören zu eben der Abſciſſe, Ordinaten mehrer einander unendlich nahen krummen Linien, ſo kann man das ſo ausdrucken $y = X + t.V$ wo V eine Function von x iſt, und t unendlich klein genommen werden kann.

50. Variation zu finden, betrachte man alſo x als unveränderlich (nähmlich die Abſciſſe variirt nicht (25) und beſtimme das Differential von y nur aus der Veränderlichkeit von t.

51. Eine Ordinate zu eben der Abſciſſe wie die (49) gehörig, nur dadurch unterſchieden daß ſie ein ander t hat, wäre
$= X + V.(t + dt)$

52. Beyder Ordinaten Unterſchied wäre $V.dt$. Das wäre Variation der Ordinate y wo die Abſciſſe nicht variirt.

53. V das beyden Ordinaten (50; 51) gemein iſt, findet ſich, wenn man $y = X + V.t$ ſo differentiirt, daß ſich nichts als t ändert, und dieſes Differential mit dt dividirt. Alſo, nach (An. Un. 484) $V = \left(\frac{dy}{dt}\right)$ Nun iſt $V.dt$ die Variation von y; alſo, das bisher gebrauchte

$$\delta y = \left(\frac{dy}{dt}\right).dt$$

54. Es

54. Es ſey Z eine Function von x und y ohne derſelben Differentiale, alſo wie gewöhnlich differentiirt $dZ = M.dx + N.dy$. Variation von Z nun, ſetzt x bleibe ungeändert, und ſtatt des Differentials der Ordinate ſchreibe man ihre Variation (53). Die Variation von Z iſt alſo $= N.dt.\left(\frac{dy}{dt}\right)$ Dieſe Variation, welche man vorhin dZ ſchriebe ſchreibt E. hie ſo: $dt.\left(\frac{dZ}{dt}\right)$. Alſo iſt $\frac{dZ}{dt} = N.\left(\frac{dy}{dt}\right)$

55. So viel bringe ich hie bey einen Begriffe von dieſem Verfahren zu geben. Ausführung und Anwendung lerne man aus angeführter Schrift.

56. Mich deucht, die Variationsrechnung wie ich ſie anfangs nach Eulern vorgetragen habe, iſt ganz verſtändlich, und ſtatt ihrer dt einführen ſieht mir aus wie ein gekünſtelter Zwang, der ſich nur durch Vortheile in der Rechnung empfehlen müſſte.

Erweiterung der Untersuchungen über Gröſſte und Kleinſte.

1. In An. Un. 152. . . . iſt gewieſen, wie man unter Gröſſen die nach einem gegebenen Geſetze fortgehn, . . . Ordinaten einer gegebenen krummen Linie, . . . die gröſſte oder kleinſte findet.

Nun könnte man aber auch eine krumme Linie ſuchen bey der Etwas am gröſſten oder kleinſten wäre.

Dem Anfänger der Geometrie wird geſagt: Unter allen Figuren die gleichen Umfang haben, habe der Kreis die gröſſte Fläche. Den Beweis muß er aus Schriften lernen die ihm angezeigt werden (Geom. 44. S. 1. Anm.)

Alſo: Eine Linie zu finden, die wenn ihre Länge gegeben iſt, den gröſſten Raum einſchlieſſt? Da würde die Linie ſelbſt geſucht die das Gröſſte leiſtet, nicht eine gröſſte Ordinate einer gegebenen Linie.

2. Die erwähnte Eigenſchaft des Kreiſes, hat veranlaſſt auch andre Linien zu ſuchen die in andrer Abſicht etwas Gröſſtes leiſten. Und weil die Eigenſchaft des Kreiſes iſt: unter allen Figuren von gleichem Umfange den gröſſten Raum einzuſchlieſſen, ſo hat man ſolche Unterſuchungen überhaupt iſoperimetriſche genannt, obgleich bey ſehr vielen nicht an Umfang als Gränze des Raumes gedacht wird.

3. Me-

3. Methodus inueniendi lineas curuas maximi minimiue proprietate gaudentes, siue solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, auctore Leonh. Eulero; Lauf. et Gen. 1744; 4.

Die Methode der grössten und kleinsten wird von ihm in absolute und relative getheilt. Die erste verlangt unter allen krummen Linien welche zu einer und derselben Abscisse gehören, diejenige bey der sich eine gewisse Eigenschaft des Grössten oder Kleinsten findet.

Die zweyte, sucht unter allen krummen Linien welche eine gewisse Eigenschaft gemein haben, diejenige wo die Eigenschaft eines grössten oder kleinsten vorhanden ist.

4. Euler stellt sich vor: an einer Stelle der krummen Linie, ändern Elemente der Länge der krummen Linie ihre Lagen, so daß sie noch zwischen den vorigen Ordinaten bleiben, und sucht was daraus für Aenderungen an den übrigen Stellen folge.

Nun setzt er Z sey eine Function der Coordinaten, und zeigt was erfodert wird wenn $\int Z.dx$ ein Grösstes oder Kleinstes seyn soll.

5. Dieses umständlicher beyzubringen gestattet hie der Raum nicht. Man sieht leicht daß die Vorstellung soviel heisst als: Die Ordinaten variiren, aber die Abscissen nicht. Man wird also muthmaassen, aus ihr folge eben das was aus der Variationsrechnung folgt, deren Anwendung auf solche Fragen ich nun zeigen will.

6. Wie einer gegebenen krummen Linie Ordinate, eine Gröſſte oder Kleinſte wird, wenn ihr Differential .. eigentlich $\frac{dy}{dx} \ldots = o$ wird, ſo wird $\int V. dx$ ein Gröſſtes oder Kleinſtes wenn ſeine Variation $= o$ wird. An dieſer Stelle geht die Variation aus bejahter in verneinte über, oder umgekehrt.

7. Nun bezieht ſich im Ausdrucke der Variation (Variationsr. 39; V; VII) nur der ſummatoriſche Theil ... die oberſte Zeile in V. R. 39; VII... auf die ganze krumme Linie, das Uebrige auf ihre letzte Stelle (V. R. 39; VII) alſo muß man den ſummatoriſchen Theil $= o$ ſetzen, folglich das was in $\omega. dx$ multiplicirt iſt.

8. Dieſes $= o$ geſetzt giebt alſo eine Gleichung zwiſchen x; y, und ihren Differentialen. Das iſt die Gleichung für die geſuchte krumme Linie.

9. Die Beſchaffenheit dieſer Gleichung kömmt darauf an wie V eine Function der Coordinaten und ihrer Differentiale iſt. Die ſogleich folgenden Sätze werden das erläutern.

Fragen

Fragen vom Gröſſten oder Kleinſten.

Erſte Gattung.

$N = o$

V iſt nur durch x und y gegeben, ohne derſelben Differentiale. Man ſoll das Verhalten zwiſchen x und y finden, daß $\int V.dx$ ein Gröſſtes oder ein Kleinſtes wird.

1) Aus der angenommenen Bedingung folgt $dV = M.dx + N.dy$

2) Man verlangt $\int V.dx$ ſoll für jede Abſciſſe ein Gröſſtes oder Kleinſtes ſeyn.

3) Alſo muß $V.dx$ für jede Abſciſſe dergleichen ſeyn, folglich auch V.

4) Folglich muß $dV = o$ ſeyn ohne daß die Abſciſſe ſich ändert.

5) Alsdann aber iſt (1) $dV = N.dy$.

6) Folglich erhält man das Verlangte wenn man $N = o$ ſetzt.

7) Hie alſo iſt keine Variationsrechnung nöthig, blos die im Anfange der An. Un. gelehrte Methode von Gröſſten und Kleinſten.

8) Indeſſen iſt dieſes auch in Var. Rechn. 39; VII. enthalten. Wenn des Integrals Variation $= o$ ſeyn ſoll, ſo muß deſſen was dort rechter Hand ſteht oberſte Zeile $= o$ ſeyn. Hie aber ſind P; Q;.. jedes $= o$; alſo kömmt $N = o$.

I. Exempel.

1. X ist eine Function von x, Y eine von y; beyde nur von den endlichen Grössen, ohne Differentiale. Man sucht die krumme Linie für welche $\int X.Y.dx$; ein grösstes oder kleinstes ist.

2. Also

$V = X.Y$; $dV = Y.dX + X.dY$

Es sey $dX = F.dx$; $dY = G.dy$ wo F eine Function von x ist, und G eine von y.

Folglich $dV = Y.F.dx + X.G.dy$.

Nun $N = o$ Folglich $X.G = o$. Also entweder $X = o$ oder $G = o$; Aber der erste dieser beyden Buchstaben bedeutet eine Function von x allein, der andere eine von y allein. Keine Function von einer einzigen veränderlichen Grösse $= o$ gesetzt, giebt eine Gleichung für eine krumme Linie. Folglich giebt es keine krumme Linie für welche (1) statt fände. Das vorgegebene Integral hat keinen grösten oder kleinsten Werth.

Eul. methodus inuen. lin. curuas. . . Cap. II. §. 16.

II. Exempel.

Eine krumme Linie zu finden für welche $\int (a.x.y - y^3).dx$ ein grösstes oder kleinstes ist.

1. Also $dV = a.y.dx + (a.x - 3y^2).dy$

Folglich $N = a.x - 3.y^2$ Dieß $= o$ gesetzt giebt $\frac{1}{3}a.x = y^2$; Eine Parabel deren Parameter $= \frac{1}{3}a$.

2. So

2. So ist V. $dx = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot a^{3:2} : x^{3:2}$ Das Integral $= \frac{4}{15 \cdot \sqrt{3}} \cdot a^{3:2} \cdot x^{5:2}$

3. Man nehme zwischen x und y eine Gleichung an. Z. E. für eine gerade Linie $y = n \cdot x$, so verwandelt sich das Integral in $\int (n \cdot a x^2 - n^3 x^3) \cdot dx = n \cdot x^3 \cdot (\frac{1}{3} a - \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot x)$

4. Das Integral (2) mit dem (3) dividirt giebt

$$\frac{\frac{16 \cdot \sqrt{3}}{15} \cdot a^{3:2}}{n \cdot x^{1:2} \cdot (4 \cdot a - 3 \cdot n^2 x)}$$

Dieser Quotient ist grösser oder kleiner als 1, nachdem das Integral (2) ein grösstes oder ein kleinstes ist.

5. Man setze $n = 1$ und $x = a$; so ist er $= \frac{16 \cdot \sqrt{3}}{15}$ also grösser als 1.

6. Weil das Integral (2) allemahl bejaht ist so muß das (3) auch bejaht seyn wenn es mit jenem soll verglichen werden. Also muß man x bejaht nehmen und kleiner als $\frac{4 \cdot a}{3 \cdot n^2}$

7. Euler Meth. c. 2. §. 17, vergleicht eben die beyden Integrale (2; 3) und ſagt wenn man in ſie beſtimmte Werthe von x ſetzte, würde man finden daß das (2) gröſſer iſt. Daß man dieſe Werthe nach (6) wählen muß erinnert er nicht. Freylich würde die Rechnung darauf führen.

8. Verſichert einmahl die Variationsrechnung, daß das Integral (2) entweder ein gröſſtes oder ein kleinſtes iſt, ſo entſcheidet ſchon eine einzige Probe wenn ein andres $\int (a. x. y - y^3). dx$ kleiner iſt, das (2) ſey gröſſer. Und ſo iſt (5) zureichend.

Wie $\int V. dx$ beſchaffen ſeyn muß wenn Variationsrechnung dabey nöthig iſt.

9. Es muß kein Integral weder algebraiſches noch tranſcendentiſches ſeyn. Den Grund ſieht man leicht aus den beyden nächſtvorhergehenden Exempeln. V welches kein ſolches Integral giebt, heiſſt bey Eulern functio indeterminata. (Er braucht den Buchſtaben Z) Meth. cap. II. §. 6. gegentheils V der beyden vorigen Exempel, functio determinata. Da iſt keine Variationsrechnung nöthig, ob ſie ſich gleich anbringen läſſt. Man ſ. unten: Zweyte Gattung 18.

Der

Der Fragen

zweyte Gattung.

$$N = \frac{dP}{dx}$$

Wenn V eine Gröſſe iſt, die auſer x, y, auch die erſten Differentiale der Coordinaten enthält, zu machen daß ſV. dx ein Gröſſtes oder Kleinſtes wird.

1) Da iſt $dV = M.dx + N.dy + P.dp$ aber Q, R... ſind $= 0$.

2) Folglich Var. R. 39; VII.

$$N = \frac{dP}{dx}$$

3) Wenn P ſelbſt mit durch p gegeben iſt, ſo findet ſich auch dp in dP, und die Gleichung (2) enthält Differentiale vom zweyten Grade. Fall wo die Gleichung algebraiſch wird. Eul. meth. C. II. §. 26.

4) Wäre aber p nicht in P; ſo enthielte auch die Gleichung (2) keine Differentiale vom zweyten Grade.

5) Es ſey $V = (n+p).ſ(F.dx + G.dy)$ wo n eine unveränderliche Zahl bedeutet, F, G, Functionen jedes von x und y ſind

Sö iſt $dV = (n+p).F.dx + (n+p).G.dy + ſ(F.dx + G.dy).dp$

alſo

also

$$\begin{array}{c|c|c} M & N & P \\ \text{hie } (n+p).\ F & (n+p).\ G & \int (F.\,dx + G.\,dy) \end{array}$$

und die Gleichung (2) wird

$(n+p).\ G = F + G.\ p$ also

$n.\ G = F$

Folglich nicht einmahl eine Differentialgleichung des ersten Grades sondern eine algebraische.

6) In (5) ist $V.\,dx = n.\,dx.\int (F.\,dx + G.\,dy) + dy.\int (F.\,dx + G.\,dy)$

Da also giebt sich das Grösste oder Kleinste $\int V.\,dx$ durch eine algebraische Gleichung; Es kann auch $n = o$ seyn.

7) Man setze $\int (F.\,dx + G.\,dy) = W$ und $n = o$; also $\int V.\,dx = \int W.\,dy$ so ist klar daß $\int W.\,dy$ ein Grösstes oder Kleinstes ist, wenn $\int V.\,dx$ dergleichen ist, also die Coordinaten sich verwechseln lassen.

$M = o$

8) Man setze V enthalte nicht x selbst, nur y, und der beyden Coordinaten Differentiale. So ist $dV = N.\,dy + P.\,dp$.

9) Aus (2) ist auf beyden Seiten mit der Abscisse Differentiale multiplicirt $N.\,dy = p.\,dP$.

Folglich

$N.\,dy + P.\,dp = p.\,dP + P.\,dp$ also (8)

$dV = p.\,dP + P.\,dp$ und $V + Const = P.p$

10)

10) Diese Gleichung hat als veränderliche Gröſſen, linker Hand nur y und p; rechter Hand kann ſie x; y; p, haben. Wenn man ſtatt p ſeinen Werth ſetzt, und dieſe Differentialgleichung vom erſten Grade integrirt ſo kömmt die Gleichung zwiſchen den Coordinaten. Bey dieſer Integration wird wiederum eine Conſt addirt.

$$N = o$$

11) Man ſetze V ſoll nur x und p enthalten, alſo $dV = M.dx + P.dp$ und $N = o$ So iſt (2) $dP = o$ alſo P unveränderlich $= c$ So iſt $P = C$ die geſuchte Gleichung welche erſte Differentiale enthält, wenn p in P enthalten iſt.

12) Man ſetze V enthalte keine der Coordinaten ſelbſt, nur den Quotienten ihrer Differentiale, alſo M und N jedes $= o$ und $dV = P.dp$ So iſt wie in (11) $P = C$ alſo $dV = C.dp$ und integrirt $V + D = C.p$

Soll aber P unveränderlich ſeyn, und doch p enthalten, ſo muß p ſelbſt unveränderlich ſeyn. Folglich iſt es auch V; und die Gleichung wird $(V + D).dx = C.dy$ für eine gerade Linie, durch zweene willkührliche Puncte, weil C; D, willkührlich ſind.

$$M = N$$

13) Man ſoll eine krumme Linie ſuchen wo $\int(Z'.dx + Z^*.dy)$ ein Gröſſtes oder Kleinſtes iſt.

also

M | N | P

+ p). F | (n + p). G | ∫ (F. dx + G. dy)

e Gleichung (2) wird

p). G = F + G. p also

1. G = F

ſo nicht einmahl eine Differentialgleichung
ſten Grades ſondern eine algebraiſche.

In (5) iſt V. dx = n. dx. ∫ (F. dx + G. dy)
+ dy. ∫ (F. dx + G. dy)

ſo giebt ſich das Gröſſte oder Kleinſte ∫V.
rch eine algebraiſche Gleichung; Es kann
= o ſeyn.

Man ſetze ∫ (F. dx + G. dy) = W und
alſo ∫V. dx = ∫W. dy ſo iſt klar daß
y ein Gröſſtes oder Kleinſtes iſt, wenn
: dergleichen iſt, alſo die Coordinaten ſich
)ſeln laſſen.

M = σ

Man ſetze V enthalte nicht x ſelbſt, nur
ıd der beyden Coordinaten Differentiale.
dV = N. dy + P. dp.

Aus (2) iſt auf beyden Seiten mit der
: Differentiale multiplicirt N. dy = p. dP.
ſolglich

+ P. dp = p. dP + P. dp alſo (8)
= p. dP + P. dp und V + Conſt = P. p

10)

10) Diese Gleichung hat als veränderliche Grössen, linker Hand nur y und p; rechter Hand kann sie x; y; p, haben. Wenn man statt p seinen Werth setzt, und diese Differentialgleichung vom ersten Grade integrirt so kömmt die Gleichung zwischen den Coordinaten. Bey dieser Integration wird wiederum eine Const addirt.

$$N = o$$

11) Man setze V soll nur x und p enthalten, also $dV = M.dx + P.dp$ und $N = o$ So ist (2) $dP = o$ also P unveränderlich $= c$ So ist $P = C$ die gesuchte Gleichung welche erste Differentiale enthält, wenn p in P enthalten ist.

12) Man setze V enthalte keine der Coordinaten selbst, nur den Quotienten ihrer Differentiale, also M und N jedes $= o$ und $dV = P.dp$ So ist wie in (11) $P = C$ also $dV = C.dp$ und integrirt $V + D = C.p$

Soll aber P unveränderlich seyn, und doch p enthalten, so muß p selbst unveränderlich seyn. Folglich ist es auch V; und die Gleichung wird $(V + D).dx = C.dy$ für eine gerade Linie, durch zweene willkührliche Puncte, weil C; D, willkührlich sind.

$$M = N$$

13) Man soll eine krumme Linie suchen wo $f(Z.dx + Z^*.dy)$ ein Grösstes oder Kleinstes ist.

ist. Die beyden grossen Buchstaben sind jeder eine Function der Coordinaten, so daß

$dZ = F.dx + G.dy$

$dZ^* = F^*.dx + G^*.dy.$

14) Die vorgegebene Formel verwandelt sich in $\int(Z + Z^*.p).dx$. Das ist also $\int V.dx$ in (1). Folglich das dortige dV hie $= dZ + p.dZ^* + Z^*\,dp$

	M	N	P
also dorten	$F + p.F^*$	$G + p.G^*$	Z^*
hie			

15) Folglich (2)

$G + p.G^* = F^* + p.G^*$ (13)

oder $G = F^*$

16) Wenn $Z.dx + Z^*\,dy$ (13) aus Differentiation einer endlichen Grösse entstanden ist, so ist (An. Un. 486) $\left(\frac{dZ}{dy}\right) = \left(\frac{dZ^*}{dx}\right)$

Aber $\left(\frac{dZ}{dy}\right) = G$; $\left(\frac{dZ^*}{dx}\right) = F^*$ Findet also die Voraussetzung am Anfange dieses Absatzes statt, so ist allemahl (15) wahr.

17) Ist also $Z.dx + Z^*.dy$ aus Differentiation eines endlichen Ausdrucks den x und y enthielt entstanden; so wird die Frage (13) nur so beantwortet: jede Linie thut ihr genug. Eul. Cap. II. §. 32.

18)

18) Das gehört zu der Erinnerung bey: Erste Gattung II. Ex. 9.

Raum durch kürzeste krumme Linie einzuschliessen.

I. Aufgabe.

AP, 45 Fig. und das Perpendikel auf sie PM, sind gegebene gerade Linien, zwischen ihnen und einer krummen Linie AM ist ein Raum eingeschlossen.

Man sucht die krumme Linie welche unter allen die gleich grossen Raum einschliessen die kürzeste ist.

1. AP, PM, sind Coordinaten der gesuchten Linie. Mit jedem Paar andern Coordinaten, schliesst ein andrer Theil von ihr einen Raum von andrer Grösse ein, und allemahl, muß der Theil von ihr der den Raum von dieser Grösse einschliesst, kürzer seyn, als eine andre krumme Linie, die mit eben den Coordinaten gleichen Raum einschlösse.

2. Man nenne den Raum x; die Abscisse wie AP = t; die Ordinate wie PM = y. Also $dx = y.dt$; $dt = \frac{dx}{y}$; Das Differential der Länge der krummen Linie $= \sqrt{(dy^2 + dt^2)} = \sqrt{(dy^2 + \frac{dx^2}{y^2})} = \frac{\sqrt{(1 + y^2.p^2)}}{y} dx$ wenn $dy = p.dx$.

I. Exempel.

1. X ist eine Function von x, Y eine von y; beyde nur von den endlichen Grössen, ohne Differentiale. Man sucht die krumme Linie für welche $\int X.Y.dx$; ein grösstes oder kleinstes ist.

2. Also

$V = X.Y$; $dV = Y.dX + X.dY$

Es sey $dX = F.dx$; $dY = G.dy$ wo F eine Function von x ist, und G eine von y.

Folglich $dV = Y.F.dx + X.G.dy$.

Nun $N = o$ Folglich $X.G = o$. Also entweder $X = o$ oder $G = o$; Aber der erste dieser beyden Buchstaben bedeutet eine Function von x allein, der andere eine von y allein. Keine Function von einer einzigen veränderlichen Grösse $= o$ gesetzt, giebt eine Gleichung für eine krumme Linie. Folglich giebt es keine krumme Linie für welche (1) statt fände. Das vorgegebene Integral hat keinen grössten oder kleinsten Werth.

Eul. methodus inven. lin. curvas. . . Cap. II. §. 16.

II. Exempel.

Eine krumme Linie zu finden für welche $\int (a.x.y - y^3).dx$ ein grösstes oder kleinstes ist.

1. Also $dV = a.y.dx + (a.x - 3y^2).dy$

Folglich $N = a.x - 3.y^2$ Dieß $= o$ gesetzt giebt $\frac{1}{3}a.x = y^2$; Eine Parabel deren Parameter $= \frac{1}{3}a$.

2. So

2. So ist $V. dx = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot a^{3:2} : x^{3:2}$ Das Integral $= \frac{4}{15. \sqrt{3}} \cdot a^{3:2}. x^{5:2}$

3. Man nehme zwischen x und y eine Gleichung an. Z. E. für eine gerade Linie $y = n. x$, so verwandelt sich das Integral in $\int (n. a x^2 - n^3 x^3). dx = n. x^3. (\frac{1}{3} a - \frac{1}{4}. n^2. x)$

4. Das Integral (2) mit dem (3) dividirt giebt

$$\frac{\frac{16. \sqrt{3}}{15} \cdot a^{3:2}}{n. x^{1:2}. (4. a - 3. n^2 x)}$$

Dieser Quotient ist grösser oder kleiner als 1, nachdem das Integral (2) ein grösstes oder ein kleinstes ist.

5. Man setze $n = 1$ und $x = a$; so ist er $= \frac{16. \sqrt{3}}{15}$ also grösser als 1.

6. Weil das Integral (2) allemahl bejaht ist so muß das (3) auch bejaht seyn wenn es mit jenem soll verglichen werden. Also muß man x bejaht nehmen und kleiner als $\frac{4. a}{3. n^2}$

7. Euler Meth. c. 2. §. 17, vergleicht eben die beyden Integrale (2; 3) und ſagt wenn man in ſie beſtimmte Werthe von x ſetzte, würde man finden daß das (2) gröſſer iſt. Daß man dieſe Werthe nach (6) wählen muß erinnert er nicht. Freylich würde die Rechnung darauf führen.

8. Verſichert einmahl die Variationsrechnung, daß das Integral (2) entweder ein gröſſtes oder ein kleinſtes iſt, ſo entſcheidet ſchon eine einzige Probe wenn ein andres $\int (a. x. y - y^3). dx$ kleiner iſt, das (2) ſey gröſſer. Und ſo iſt (5) zureichend.

Wie $\int V. dx$ beſchaffen ſeyn muß wenn Variationsrechnung dabey nöthig iſt.

9. Es muß kein Integral weder algebraiſches noch tranſcendentiſches ſeyn. Den Grund ſieht man leicht aus den beyden nächſtvorhergehenden Exempeln. V welches kein ſolches Integral giebt, heiſſt bey Eulern functio indeterminata. (Er braucht den Buchſtaben Z) Meth. cap. II. §. 6. gegentheils V der beyden vorigen Exempel, functio determinata. Da iſt keine Variationsrechnung nöthig, ob ſie ſich gleich anbringen läſſt. Man ſ. unten: Zweyte Gattung 18.

Der

Der Fragen

zweyte Gattung.

$$N = \frac{dP}{dx}$$

Wenn V eine Gröſſe iſt, die auſer x, y, auch die erſten Differentiale der Coordinaten enthält, zu machen daß $\int V.dx$ ein Gröſſtes oder Kleinſtes wird.

1) Da iſt $dV = M.dx + N.dy + P.dp$ aber Q, R... ſind $= 0$.

2) Folglich Var. R. 39; VII.

$$N = \frac{dP}{dx}$$

3) Wenn P ſelbſt mit durch p gegeben iſt, ſo findet ſich auch dp in dP, und die Gleichung (2) enthält Differentiale vom zweyten Grade. Fall wo die Gleichung algebraiſch wird. Eul. meth. C. II. §. 26.

4) Wäre aber p nicht in P; ſo enthielte auch die Gleichung (2) keine Differentiale vom zweyten Grade.

5) Es ſey $V = (n+p).\int(F.dx + G.dy)$ wo n eine unveränderliche Zahl bedeutet, F, G, Functionen jedes von x und y ſind

Es iſt $dV = (n+p).F.dx + (n+p).G.dy + \int(F.dx + G.dy).dp$

alſo

also

M	N	P
hie $(n+p).F$	$(n+p).G$	$\int(F.dx+G.dy)$

und die Gleichung (2) wird

$(n+p).G = F+G.p$ also

$n.G = F$

Folglich nicht einmahl eine Differentialgleichung des ersten Grades sondern eine algebraische.

6) In (5) ist $V.dx = n.dx.\int(F.dx+G.dy) + dy.\int(F.dx+G.dy)$

Da also giebt sich das Grösste oder Kleinste $\int V.dx$ durch eine algebraische Gleichung; Es kann auch $n=o$ seyn.

7) Man setze $\int(F.dx+G.dy)=W$ und $n=o$; also $\int V.dx = \int W.dy$ so ist klar daß $\int W.dy$ ein Grösstes oder Kleinstes ist, wenn $\int V.dx$ dergleichen ist, also die Coordinaten sich verwechseln lassen.

$M=o$

8) Man setze V enthalte nicht x selbst, nur y, und der beyden Coordinaten Differentiale. So ist $dV = N.dy+P.dp$.

9) Aus (2) ist auf beyden Seiten mit der Abscisse Differentiale multiplicirt $N.dy = p.dP$.

Folglich

$N.dy+P.dp = p.dP+P.dp$ also (8)

$dV = p.dP+P.dp$ und $V+Const = P.p$

10)

10) Diese Gleichung hat als veränderliche Grössen, linker Hand nur y und p; rechter Hand kann sie x; y; p, haben. Wenn man statt p seinen Werth setzt, und diese Differentialgleichung vom ersten Grade integrirt so kömmt die Gleichung zwischen den Coordinaten. Bey dieser Integration wird wiederum eine Const addirt.

$$N = o$$

11) Man setze V soll nur x und p enthalten, also $dV = M.dx + P.dp$ und $N = o$ So ist (2) $dP = o$ also P unveränderlich $= c$ So ist $P = C$ die gesuchte Gleichung welche erste Differentiale enthält, wenn p in P enthalten ist.

12) Man setze V enthalte keine der Coordinaten selbst, nur den Quotienten ihrer Differentiale, also M und N jedes $= o$ und $dV = P.dp$ So ist wie in (11) $P = C$ also $dV = C.dp$ und integrirt $V + D = C.p$

Soll aber P unveränderlich seyn, und doch p enthalten, so muß p selbst unveränderlich seyn. Folglich ist es auch V; und die Gleichung wird $(V + D).dx = C.dy$ für eine gerade Linie, durch zweene willkührliche Puncte, weil C; D, willkührlich sind.

$$M = N$$

13) Man soll eine krumme Linie suchen wo $f(Z.dx + Z^*.dy)$ ein Grösstes oder Kleinstes ist.

ist. Die beyden grossen Buchstaben sind jeder eine Function der Coordinaten, so daß
$dZ = F.dx + G.dy$
$dZ^* = F^*.dx + G^*.dy.$

14) Die vorgegebene Formel verwandelt sich in $\int(Z + Z^*.p).dx$. Das ist also $\int V.dx$ in (1). Folglich das dortige dV hie $= dZ + p.dZ^* + Z^*dp$

	M	N	P
also dorten	$F + p.F^*$	$G + p.G^*$	Z^*
hie			

15) Folglich (2)
$G + p.G^* = F^* + p.G^*$ (13)
oder $G = F^*$

16) Wenn $Z.dx + Z^*dy$ (13) aus Differentiation einer endlichen Grösse entstanden ist, so ist (An. Un. 486) $\left(\frac{dZ}{dy}\right) = \left(\frac{dZ^*}{dx}\right)$

Aber $\left(\frac{dZ}{dy}\right) = G$; $\left(\frac{dZ^*}{dx}\right) = F^*$ Findet also die Voraussetzung am Anfange dieses Absatzes statt, so ist allemahl (15) wahr.

17) Ist also $Z.dx + Z^*.dy$ aus Differentiation eines endlichen Ausdrucks den x und y enthielt entstanden; so wird die Frage (13) nur so beantwortet: jede Linie thut ihr genug. Eul. Cap. II. §. 32.

18)

18) Das gehört zu der Erinnerung bey: Erste Gattung II. Ex. 9.

Raum durch kürzeste krumme Linie einzuschliessen.

I. Aufgabe.

AP, 45 Fig. und das Perpendikel auf sie PM, sind gegebene gerade Linien, zwischen ihnen und einer krummen Linie AM ist ein Raum eingeschlossen.

Man sucht die krumme Linie welche unter allen die gleich grossen Raum einschliessen die kürzeste ist.

1. AP, PM, sind Coordinaten der gesuchten Linie. Mit jedem Paar andern Coordinaten, schliesst ein andrer Theil von ihr einen Raum von andrer Grösse ein, und allemahl, muß der Theil von ihr der den Raum von dieser Grösse einschliesst, kürzer seyn, als eine andre krumme Linie, die mit eben den Coordinaten gleichen Raum einschlösse.

2. Man nenne den Raum x; die Abscisse wie AP = t; die Ordinate wie PM = y. Also $dx = y.dt$; $dt = \frac{dx}{y}$; Das Differential der Länge der krummen Linie $= \sqrt{(dy^2 + dt^2)} = \sqrt{(dy^2 + \frac{dx^2}{y^2})} = \frac{\sqrt{(1 + y^2.p^2)}}{y} dx$ wenn $dy = p.dx$.

p. dx. Heißt also die Länge welche ein Kleinstes seyn soll $= \int V . dx$ so ist $V = \frac{\sqrt{(1 + y^2 . p^2)}}{y}$

3. Folglich $dV = -\frac{dy}{y^2 . \sqrt{(1 + y^2 . p^2)}} + \frac{y . p . dp}{\sqrt{(1 + y^2 . p^2)}}$ Daher $M = 0$; $N = -\frac{1}{y^2 . \sqrt{(1 + y^2 . p^2)}}$; $P = \frac{y . p}{\sqrt{(1 + y^2 . p^2)}}$

4. Folglich $V = Const + P . p$ das ist $\frac{\sqrt{(1 + y^2 . p^2)}}{y} = Const + \frac{y . p^2}{\sqrt{(1 + y^2 . p^2)}}$
Daraus $1 = Const . y . \sqrt{(1 + y^2 . p^2)}$.

5. In (2) hat dy eine Dimension als Differential der Ordinate, aber dx zwo, als Differential einer Fläche, die Dimension von p ist also -1; So erhellt daß jeder Theil der Grösse unter dem Wurzelzeichen die Dimension 0 hat.

6. Man seße also in (2) $b = y . \sqrt{(1 + y^2 . p^2)}$ So kömmt $b^2 = y^2 + \frac{y^4 . dy^2}{dx^2}$
Im zweyten Theile rechter Hand ist $= dx = y . dt$ (2) Also kömmt
$b^2 . dt^2 = y^2 . dt^2 + y^2 . dy^2$ oder
$\sqrt{(b^2 - y^2)} . dt = y . dy$; oder

$dt =$

$dt = \frac{y.dy}{\sqrt{(b^2 - y^2)}}$; Daraus, eine neue unveränderliche Grösse angenommen
$t = c - \sqrt{(b^2 - y^2)}$ oder $b^2 - y^2 = (c-t)^2$.

7. Man setze es sollen y und t zugleich $= o$ seyn, so ist $b = c$.

8. Es sey $AP = f$; $PM = g$; so ist (6) (7) $b^2 - g^2 = b^2 - 2.b.f + f^2$; daher
$\frac{g^2 + f^2}{f} = 2.b$

9. Ferner aus (6; 7) $- y^2 = - 2.b.t + t^2$ also (8) $y^2 = \frac{g^2 + f^2}{f} \cdot t - t^2$ Da verschwindet y einmahl für $t = o$ (7) das andre mahl für $t = \frac{g^2 + f^2}{f}$

10. Nun setze man $t = \frac{g^2 + f^2}{2.f} - u$ so kömmt $y^2 = \frac{1}{4}.\left(\frac{g^2 + f^2}{f}\right)^2 - u^2$

Also ist die krumme Linie ein Kreisbogen, dessen Mittelpunct in AP, um den Halbmesser $= \frac{1}{2}.\left(\frac{g^2 + f^2}{f}\right)$ von A abstehend.

11. Begreiflich liegt der Mittelpunct auf der verlängerten AP, wenn g gröſſer als f iſt, zwiſchen A und P, wenn g kleiner iſt. Nähmlich f vom Halbmeſſer abgezogen giebt $\frac{1}{2}\cdot\frac{g^2-f^2}{f}$

12. Der Winkel den gerade Linien von A und M am Mittelpuncte machen heiſſe $= x$; ſo iſt $\frac{2.g.f}{g^2+f^2} = \sin x$

13. Wenn der Halbmeſſer $= r$ alſo $g^2 + f^2 = 2.f.r$; $\sin x = \frac{g}{r}$; So iſt die Fläche APM $= \frac{1}{2}r^2.x - \frac{1}{2}r^2.\sin x.\cos x = \frac{1}{2}r^2.(x - \frac{1}{2}.\sin 2.x)$

14. Exempel. Es ſey $f = 3$; $g = 4$; alſo $f^2 + g^2 = 25$; $r = \frac{25}{6}$; $\sin x = \frac{4.6}{25} = 0{,}96$

$x = 73^\circ\ 44'\ 23''$

2. $x = 147^\circ\ 28'\ 46'' = 180^\circ - (32^\circ\ 31'\ 14'')$

$x = 1{,}2869960941$

$\frac{1}{2}\sin 2x = 0{,}2688010746$

$1{,}0181950195$

halb $= 0{,}5090975097$

$\log r = 0{,}6197888$

2. $\log r = 1{,}2395776$

$\log 0{,}5091 = 0{,}7068031 - 1$

$\log$ der Fläche $= 0{,}9463807$

Die Fläche $= 8{,}8385$

Iſt

Ist z. E. die Einheit der geraden Linien Fuß, so beträgt die Fläche, die gefundne Zahl von Quadratfussen.

Eine Fläche von dieser Grösse können ohne Zweifel mehr krumme Linien begränzen, die kürzeste ist der Kreisbogen.

15. Man kann also nicht etwa die Fläche nach Gefallen annehmen, sie ist durch f, g, und die daraus hergeleiteten r, $\varkappa$, bestimmt.

16. Setzte man sie $= a^2 = \frac{1}{2} r^2 . (\varkappa - \frac{1}{2} \sin 2 . \varkappa)$ so wäre dieses keine algebraische Gleichung, weil Winkel und Sinus ein transcendentisches Verhalten haben. Es hülfe also nichts daß man vermöge dieser Gleichung aus $\varkappa$ etwa r, und dann aus r eine der beyden Grössen f oder g bestimmen wollte.

17. Selbst lässt sich eine Fläche von gegebenen f, g, und einer dritten Linie begränzt annehmen, wo diese dritte wenn sie am kürzesten seyn soll, kein Kreisbogen ist. Die wäre $a^2 = \frac{1}{2} . f . g$, da ist ja die dritte Gränze, kürzer als irgend eine seyn kann, die gerade Linie von A bis M.

18. Man setze $g = o$; so ist $r = \frac{1}{2} f . \varkappa = 180^o = \pi$ und die Fläche $(13) = \frac{1}{8} f^2 . \pi$. Ein Halbkreis dessen Durchmesser $= f$, ist die kürzeste Linie welche mit diesem Durchmesser die genannte Fläche einschliesst.

19. Wiederum also, kann man nicht die Frage so abfassen: Ueber einer gegebenen geraden Linie

$= f$; soll eine Fläche von gegebener Grösse $= a^2$ eingeschlossen werden: Welches ist die kürzeste Linie die das leistet? Sondern so: $a^2 = \frac{1}{2} \cdot f^2 \cdot \pi$; ist also die Grösse der Fläche gegeben, so findet sich $f = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$, Durchmesser eines Halbkreises, welcher Halbkreis die gegebene Fläche hat, sein Umfang ist die kürzeste Linie welche mit einer geraden Linie die gegebene Fläche einschliesst.

20. Also die kürzeste Linie welche eine Fläche von gegebener Grösse $= 2 \cdot a^2$ einschliesst, ist der ganze Umfang eines Kreises welcher nur erwähnten Durchmesser hat.

21. Wenn von einer Fläche weiter nichts gegeben ist als ihre Grösse, so kann man diese Grösse allemahl durch ein Quadrat darstellen, oder durch das Doppelte eines Quadrats, die Hälfte durch das einfache wie (20).

22. Dieses Verfahren ist also nicht einerley mit dem des Herrn L'Huilier, Exposition elementaire des principes des calculs superieurs; §. 30; p. 64. Unter allen ebenen Flächen deren Grösse gegeben ist, sucht er die welche den kleinsten Umfang hat.

Soit sagt er conçuë une droite quelconque qui coupe cette surface en deux parties egales, j'affirme que les contours de ces deux parties seront egaux. En effet, si une de ces parties n'avoit

pas

pas le même contour de l'autre substituant à celle de ces parties dont le contour seroit le plus grand, l'autre partie, on obtiendroit une figure de la grandeur donnée aiant un contour plus petit que la première.

Hr. Lh. nimmt also an: Wenn eine ebene Figur, unter allen von gleicher Grösse den kleinsten Umfang hat, so lässt sie sich durch eine gerade Linie halbiren.

Diese Voraussetzung ist mir nicht offenbahr. Bey geradelinichten unordentlichen Figuren, möchte es manchmahl ziemlich viel Arbeit erfodern die gerade Linie zu finden die sie halbirt, und ich weiß nicht ob sich allemahl eine solche gerade-Linie finden liesse. Nun wird hie die Voraussetzung auf Figur von dem kleinsten Umfange eingeschränkt, ich sehe aber nicht wie diese Einschränkung die Möglichkeit deutlicher macht.

In der lateinischen Schrift Hr. l'H. Principiorum calc. diff. et int. expositio elementaris Tub. 1795; finde ich diese Voraussetzung nicht, wenigstens nicht wo man sie suchen könnte im XX. Cap. de problematibus quae vocantur isoperimetricis.

— —

II. Aufgabe.

1) AM 46 F. ist eine krumme Linie, durch eine Gleichung zwischen CM = y und dem Winkel ACM gegeben, oder, welches eben so viel

ſagt, wenn man mit dem Halbmeſſer CB = 1 den Kreisbogen BS = t, beſchreibt, durch eine Gleichung zwiſchen y und t.

Man verlangt die krumme Linie von der Beſchaffenheit, daß ihr Bogen AM der kürzeſte unter allen ſolchen Bogen iſt die gleichen Raum ACM einſchlieſſen.

2) Die Gröſſe des Raums ACM heiſſe = x; ſo iſt ihr Differential $dx = \frac{1}{2}. y^2. dt$ (An. Un. 505) alſo $dt = \frac{2. dx}{y^2}$

3) Des Bogen AM Differential = ds = $\sqrt{(dy^2 + y^2. dt^2)}$. Man ſetze $dy = p. dx$ ſo iſt aus (2) $ds = dx. \frac{\sqrt{(4 + p^2 y^2)}}{y}$

4) Das Integral hievon ſoll ein kleinſtes ſeyn, alſo iſt $V = \frac{\sqrt{(4 + p^2 y^2)}}{y}$

Daher $dV = \frac{p^2. dy}{\sqrt{(4 + p^2. y^2)}}$

$+ \frac{y. p. dp}{\sqrt{(4 + p^2. y^2)}} - \frac{\sqrt{(4 + p^2. y^2)}\, dy}{y^2}$

und $M = 0$; $N = \frac{-4}{y^2. \sqrt{(4 + p^2. y^2)}}$

$P = \frac{y. p}{\sqrt{(4 + p^2. y^2)}}$

5) Folg-

5) Folglich $V = P.\ p + Conſt$ oder

$$\frac{\sqrt{(4 + p^2.\ y^2)}}{y} = Conſt + \frac{y.\ p^2}{\sqrt{(4 + p^2.\ y^2)}}$$

Daraus $4 = Conſt.\ y.\ \sqrt{(4 + p^2.\ y^2)}$

6) Gleichheit der Abmeſſungen zu erhalten ſey $Conſt = 1 : 2.\ b$ alſo $2.\ b = y.\sqrt{(4 + p^2.\ y^2)}$

Daraus $\frac{2.\sqrt{(b^2 - y^2)}}{y^2} = p = \frac{dy}{dx}$ Und ferner

aus (2) $dt = \frac{dy}{\sqrt{(b^2 - y^2)}} = \frac{dy}{b.\sqrt{(1 - (y^2 : b^2))}}$

Alſo $t + Conſt = Bog\ ſin\ \frac{y}{b}$

7) Man ſetze y ſoll $= CA = c$ ſeyn, wo $t = o$; ſo iſt $Conſt = Bog\ ſin\ \frac{c}{b}$, und

$$t = Bog\ ſin\left(\frac{y.\sqrt{(b^2 - c^2)} - c.\sqrt{(b^2 - y^2)}}{b^2}\right)$$

8) Man fälle von M auf CA das Perpendikel $MP = w$; und nenne $CP = v$;

So iſt

$$\sqrt{(v^2 + w^2)} = y;\ ſin\ t = \frac{w}{y}\ cos\ t = \frac{v}{y}.$$

9) Ferner (7) $t + Bog\ ſin\ \frac{c}{b} = Bog\ ſin\ \frac{y}{b}$

Alſo $\frac{w}{y}.\ \frac{\sqrt{(b^2 - c^2)}}{b} + \frac{v}{y}.\ \frac{c}{b} = \frac{y}{b}$

Und $w.\sqrt{(b^2 - c^2)} + v.\ c = v^2 + w^2$.

10) $w = o$ giebt $v = o$ oder $= c$
$v = o$ giebt $w = o$ oder $= \sqrt{(b^2 - c^2)}$

Allgemein $w = \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 - c^2)} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2 - c^2}{4} + v.c - v^2\right)}$

11) In (9) ist $w^2 - \sqrt{(b^2 - c^2)}.w + v^2 - v.c = o$

Man setze
$w = \mathfrak{W} + \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 - c^2)}$
$v = \mathfrak{V} + \frac{1}{2}c$
so kömmt $\mathfrak{W}^2 + \mathfrak{V}^2 = \frac{1}{4}b^2$

Die krumme Linie ist also ein Kreis, dessen Durchmesser $= b$.

12) Man ziehe auf AC durch C ein Perpendikel von unbestimmter Länge, durchschneide solches aus A mit einer Länge $= b = AD$ so ist $CD = \sqrt{(b^2 - c^2)}$ also D in der krummen Linie (10) in welcher auch A und C sind.

13) So ist AD des Kreises Durchmesser (11) und K sein Mittelpunct, wenn $AK = KD = \frac{1}{2}b$.

14) $AKC = 2.ADC$ weil D im Umfange des Kreises ist; $\sin ADC = \frac{c}{b} = \sin \frac{1}{2} AKC = \cos ACK$.

15) Der Winkel ACM heißt t (1) Mit ihm steht auf einem Bogen aber am Mittelpuncte der Winkel $AKM = 2.t$.

16)

18) Der Raum zwischen dem Bogen AM und den geraden Linien CA, CM, ist = Raum zwischen dem Bogen AM und den geraden Linien MK, KC, CA = ΔMKC das ist = Ausschnitt AKM + ΔAKC − ΔMKC.

17) Der gegebene unveränderliche Winkel ADC (14) heisse x also AKC = 2. x
Ferner ist CKM (5) = 2. (x + t)
Also CM = 2. KM. sin ½. CKM
= b. sin (x + t) = y.

18) Des Dreyecks AKC Höhe ist = $\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}c^2)}$ also sein Innhalt = $\frac{c.\sqrt{(b^2 - c^2)}}{4}$ = ½ ΔADC (12) wie gehörig weil AK : AD = 1 : 2.

19) Des Dreyecks ACM Höhe ist = $\frac{\sqrt{(b^2 - y^2)}}{2} = \frac{b.\cos(x + t)}{2}$ (17) Also sein Innhalt = ½. b². sin (2. (x + t)).

20) Der Kreisbogen AM = b. t (15)
Also der Ausschnitt AKM = ½. b². t

21) Also was in (1) x heisst, der Raum ACM = $\frac{1}{4}.b^2.t + \frac{c.\sqrt{(b^2 - c^2)}}{4} - \frac{1}{8}.b^2.\sin 2.(x + t)$ Wenn man t nach Gefallen annimmt, giebt sich die Grösse eines gewissen Raums durch b, c, t, und die kürzeste Linie welche einen Raum von dieser Grösse einschliesst, ist der Kreisbogen (20).

22) Exempel: $t = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$; So ist $2.(x + t) = 2.x + 180^\circ$, der Sinus davon $= -\sin 2.x = -\frac{2.c.\sqrt{(b^2 - c^2)}}{b^2}$ also (21)

$x = \frac{1}{2}b^2.\pi + \frac{1}{2}.c.\sqrt{(b^2 - c^2)}$

Es sey $c = \frac{4}{5}b$; so ist die Fläche $= b^2.(\frac{1}{2}.\pi + 0{,}24) = b^2.0{,}6326990816\ldots$ Die kürzeste krumme Linie welche eine Fläche von dieser Grösse einschliesst hat zur Länge (20) $b.\frac{1}{2}.\pi = b.1{,}5707963\ldots$

23) Von einem Raume so groß als der ACM, ist also die krumme Gränze am kürzesten wenn AM der berechnete Kreisbogen ist.

Nun hat der Raum noch zwo gerade Gränzen. Es könnte also noch gefragt werden, ob die Summe der drey Gränzen CA + Bogen AM + MC kleiner ist, als überhaupt die Summe der Gränzen die einen gleichen Raum einschliessen. Diese Untersuchung allgemein anzustellen überlasse ich dem der sich dazu geschickt und geneigt findet.

24) Für den bestimmten Fall des Exempels (22) habe ich so gerechnet: Des Raumes zwischen AC, CD, und dem Halbkreise über AD drey Gränzen sind $\frac{4}{5}.b + \frac{3}{5}.b + b.\frac{1}{2}\pi = b.2{,}9707963$. Ein Quadrat so groß als der Raum hätte zu seiner Seite $b.\sqrt{0{,}632699}\ldots$

Nun

Nun ist $\frac{1}{2}$ log 0,5327 = 0,9005989 — 1
also ist die Seite b. 0,79542
des Vierecks Umfang = b. 3,8168
Viel grösser als der Figur erwähnten Exempels.

Die Brachystochrone.

1. A, B 47 F. sind zweene Puncte, nicht in einer lothrechten geraden Linie. In einer verticalen Ebene durch sie, befindet sich eine krumme Linie AMB, von der Beschaffenheit daß ein Körper der auf ihr von A, aus der Ruhe zu fallen anfängt, in kürzerer Zeit an B kömmt, als wenn er durch jeden andern Weg fiele. Der Fall geschieht den galiläischen Gesetzen gemäß. Ich führe die Rechnung nach den Formeln meiner höhern Mechanik I. Abschn. 35 u. f. §.

2. In der verticalen Ebene durch die beyden Puncte, sey durch A eine verticale gerade Linie gezogen, auf welche das Perpendikel BD = k falle und AD = h abschneide.

3. Durch AD fiele ein Körper in $\sqrt{\frac{h}{g}}$ Secunden (Höh. M. a. a. O. 37) In kürzerer Zeit fällt begreiflich kein Körper aus A. in die Horizontallinie DB.

4. Längst der geraden Linie AB fiele er in $\sqrt{\frac{h+k^2 h}{g}}$ Secunden Höh. Mech. II. Abschnitt 21; II.

5. Wenn

5. Wenn die krumme Linie AMB so beschaffen seyn soll, daß auf ihr der Körper aus A eher in die Horizontallinie DB fällt, als auf jeder andren, so muß er auch auf ihr eher in jede andre Horizontallinie PM kommen, als auf jeder andern.

Denn, es wird eine krumme Linie gesucht, die auser A durch einen gegebenen Punct, B, geht und dieser gegebene Punct könnte eben so gut M, seyn.

6. Man nenne also AP = x, PM = y suche das Verhalten zwischen den zusammengehörigen veränderlichen Coordinaten x; y; damit der Fall durch die krumme Linie AM welche diese veränderlichen Coordinaten hat, in kürzerer Zeit geschieht, als durch jede andere Linie welche durch A und M ginge, und für gleiche Abscissen andre Ordinaten hätte, die erste o; und die letzte PM ausgenommen.

7. Hat man ein solches Verhalten gefunden, so setze man h, k, statt x; y; und man hat alsdann die ganze krumme Linie AMB auf welche der Körper in der kürzesten Zeit von A bis B fällt.

8. Die Geschwindigkeit in M; gehört der Höhe AP = x (Höh. Mech. II. Absch. 19) Mit selbiger wird in der Zeit dt ein Weg = 2 $\sqrt{(g.x)}$. dt beschrieben. Dieser Weg ist das Differential der Länge der krummen Linie AM; heißt diese Länge = s so ist der Weg = ds = $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

$+ dy^2) = dx \sqrt{(1 + p^2)}$ wenn $p = \frac{dy}{dx}$;

Alſo 2. $\sqrt{g}. dt = \frac{\sqrt{(1 + p^2)}}{\sqrt{x}} \cdot dx$, wo 2. $\sqrt{g}$ für alle fallende Körper einerley iſt.

9. Alſo 2. $\sqrt{g}$ mit der Zeit durch AM multiplicirt iſt $= \int \frac{dx. \sqrt{(1 + p^2)}}{\sqrt{x}}$ Aber die Zeit durch AM; ſoll kleiner ſeyn, als die Zeit auf jeder andern Linie von A bis M (5) folglich muß das Integral rechter Hand ein kleinſtes ſeyn.

10. Man ſtelle ſich alſo vor, die krumme Linie von A bis M werde ſo variirt daß die variirte mit ihr einerley Abſciſſen habe, alſo nur die Ordinaten variiren. Auch ſetze man dx unveränderlich.

11. So iſt (in Variationsrechnung 38) V. $dx = \frac{\sqrt{(1 + p^2)}}{\sqrt{x}} \cdot dx$, alſo $V = \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{\sqrt{x}}$

Folglich $dV = -\frac{\sqrt{(1 + p^2)}. dx}{2. x. \sqrt{x}}$

$\frac{+ p. dp}{\sqrt{x}. \sqrt{(1 + p^2)}}$

12. Alſo, daſelbſt 29; I; $M = -\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{2. x. \sqrt{x}}$;

$N = 0$; $P = \frac{p}{\sqrt{x}. \sqrt{(1+p^2)}}$; $Q = 0 = R$.,

13. Folg-

13. Folglich, daſ. 39; VI.

$$\delta \int V.\, dx = \int \left(\delta y. - \frac{dP}{dx} \right) + P.\, \delta y$$

14. Das Integral (9) ſoll ein Gröſſtes ſeyn, folglich ſeine Variation (13) = o.

Dazu wird erfodert, daß was in dem ſummatoriſchen Theile rechter Hand in δy multiplicirt, = o ſey.

Alſo $\frac{dP}{dx} = o$; und weil dx unveränderlich iſt $dP = o$.

15. Folglich iſt P eine unveränderliche Gröſſe. Weil p keine Dimenſion hat, ſo iſt $-\frac{1}{2}$ die Dimenſion von P (12) Man ſetze alſo P oder

$$\frac{P}{\sqrt{x}.\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{1}{\sqrt{c}};$$

16. Daher $\frac{c.\, dy^2}{dx^2} = x + \frac{x.\, dy^2}{dx}$ Folglich $dy = dx. \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(c-x)}}$ Das iſt die Gleichung zwiſchen den Differentialen der Coordinaten der geſuchten krummen Linie.

17. In An. Un. 557. I iſt, in den dortigen Bezeichnungen, die Gleichung für die Cycloide

dy

$dy = \frac{\sqrt{(2.r-x)}}{\sqrt{x}} \cdot dx$. Man übersetze diesen Ausdruck in die Buchstaben der dortigen 7. Fig. so heißt er $dMP = \frac{\sqrt{EM}}{\sqrt{(2.r-EM)}} \cdot (-dEM)$

18. Man stelle sich in eben der 7 Fig. durch A eine Parallele mit EF vor. Durch die verlängerte MP, wird sie in einem Puncte geschnitten, der Q heissen mag, und AQ ist der EM parallel und gleich.

Ferner $QP = EA - MP$, wo $EA = r.\pi$ weil jeder Bogen FL jeder geraden Linie LP gleich ist. Also $dQP = -dMP$. Das giebt also aus (17) zwischen QP und EM die Differentialgleichung $dQP = \frac{\sqrt{EM}}{\sqrt{(2.r-EM)}} \cdot dEM$.

19. I. Diese Differentialgleichung mit der (16) verglichen giebt

in (16)	dQP	EM	2r
	dy	x	c

II. Der Bogen AM gegenwärtiger Figur ist also der Bogen AP der Cycloide in An. Un. §. 57.

III. Und das hiesige PM einerley mit dem was dorten QP hiesse und $= r.\pi$ weniger dem dortigen MP wäre.

IV. Aber das dortige MP ist so groß als das dortige ML + dem dortigen Bogen FL das ist,

ist, so groß als dortiges ML + r. π — dem dortigen Bogen EL.

Der Winkel den der dortige Bogen FL am Mittelpuncte seines Kreises misst heisse = ζ. Er hat für den Sinustotus = r zum Sinus $\frac{ML}{r}$ wo ML das Quadrat = FM. ME = 2. r. FM — FM^2 = 2. r. EM — EM^2

V. So ist das dortige MP = r. (sin ζ + ζ)

Eine Linie so groß als ML, kömmt im Halbkreise FLE zweymahl vor, beydemahl als r. sin ζ; Am nächsten bey F ist ζ kleiner als ein rechter Winkel. Am nächsten bey E um eben soviel grösser als es vorhin kleiner war.

VI. Was ich also in (18) QP genannt habe ist = r. (π — ζ — sin ζ)

VII. Und das ist der Werth des hiesigen PM oder y (IV). Nimmt man hie AP = x so ist sin $\zeta = \frac{\sqrt{(c.x - x^2)}}{\frac{1}{2}c}$, auch $\frac{1}{2}.c = r$

Es bedeutet aber (IV) ζ einen Winkel dessen einer Schenkel in der Figur bey An. Un. 557; von des dasigen Halbkreises Mittelpuncte nach F zu liegt. Dieser Winkel nimmt also ab, wenn das dortige EM, hiesiges x (I) zunimmt. Auch ist $\cos \zeta = -\frac{(\frac{1}{2}c - x)}{\frac{1}{2}c}$ Wenn man mit diesen

Bemer-

Bemerkungen die Gleichung $y = \frac{1}{2} c. (\pi - \zeta - \sin \zeta)$ differentiirt so bekömmt man die Differentialgleichung in (16).

20. Stellt man also a. a. O. der An. Un. die dasige Cycloide in eine Verticalfläche, so, daß ihr Punct A zu oberst ist, so fällt ein Körper auf ihr durch jeden Bogen AP in kürzerer Zeit, als er auf irgend einer andern Linie welche durch A und P gingge in eben der Zeit fiele.

21. Die senkrechte Höhe um welche der Körper niedriger gekommen wäre wäre in der dortigen Cycloide EM; in gegenwärtiger Figur ist sie AP.

22. Nimmt man also in der Figur für die Cycloide, von E an auf EF ein Stück $= h$; und zieht durch desselben Endpunct ein Perpendikel auf EF, so ist, was von diesem Perpendikel zwischen EF und der Cycloide liegt $= r. \pi - k$ (2).

23. I. Für die hie betrachtete Linie AM, ist aus (16) $ds = \frac{dx. \sqrt{c}}{\sqrt{(c-x)}}$ daher $s = 2. (c - \sqrt{(c^2 - cx)})$

II. In An. Un. §59; I ist der dortige Bogen $FP = 2. \sqrt{2. r. FM}$ also $FA = 4. r$ und $AP = 4r - 2. \sqrt{(2r. (2. r - EM))}$ welches nach (19) den hiesigen Ausdruck (I) giebt

24. I. Auch $2. \sqrt{g}. dt = \frac{ds}{\sqrt{x}}$

$= \frac{\sqrt{c}.\,dx}{\sqrt{(cx - x^2)}}$. Bedeutet hie ζ den Winkel (19; VII) ſo iſt $2.\sqrt{g}.\,dt = -\sqrt{c}.\,d\zeta$ alſo $2.\sqrt{g}.\,t = \text{Conſt} - \sqrt{c}.\,\zeta$. Der Winkel iſt $\frac{1}{2}\pi$ für $t = 0$; alſo die Zeit $t = \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{g}} \cdot (\pi - \zeta)$

II. Für $x = c$; wird $\zeta = 0$. Hat man alſo die krumme Linie ſo weit fortgeſetzt als der Körper auf ihr fallen kann, ſo kömmt er an ihre unterſte Stelle in der Zeit $\frac{1}{2}.\,\pi.\,\sqrt{\left(\frac{c}{g}\right)}$. In dieſer Zeit fällt er durch die Cycloide AF An. Un. 157 (Höh. Mech. II. Abſchn. 53; XV) ſo wohl als durch jeden ihrer Bogen PF, wenn man ihn von P an fallen läſſt.

III. Fällt der Körper von A ſo weit er fallen kann, ſo braucht er von M, bis an den unterſten Punct die Zeit $\frac{1}{2}.\,\sqrt{\frac{c}{g}}.\,\zeta$ (I; II)

IV. Soll B der Punct ſeyn, wo die Tangente der Cycloide horizontal iſt, ſo iſt DB oder $k = \frac{1}{2}\,h.\,\pi$ Da dann $h = c$ oder $= 2.\,r.$ Die Zeit des Falles durch die gerade Linie AB iſt dann aus (14) $= \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{(c + \frac{1}{4}.\,c.\,\pi^2)} = \frac{1}{2}.\,\pi.\,\sqrt{\frac{c}{g}} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)}$ länger als die Zeit des Falles durch die Cycloide von A bis B (H).

Die

Die Logarithmen geben $\frac{4}{\pi} = 0,40528$ und $\sqrt{1,40528} = 1,1854$.

25. Das bisherige lehrt soviel: Wenn in der verticalen Ebene ADB, ein Perpendikel auf A, nach der Seite nach welcher DB zu liegt gezogen ist, und ein Kreis, welcher sich an dieses Perpendikel Seite welche nach DB gekehrt ist wälzt, eine Cykloide beschreibt die durch B geht, so fällt ein Körper auf dieser Cykloide in kürzrer Zeit als auf jedem andern vorgezeichneten Wege.

26. Aber wie groß ist der Durchmesser $c = 2.r$ dieses Kreises, damit die Cykloide die er beschreibt durch B geht?

27. Da sind in (6) $x = h$; $y = k$. Der Winkel welcher in 19; VII; ζ heißt, hätte hier den Sinus $\frac{\sqrt{(2.r.h - h^2)}}{r}$, so ist aus (19; VI)

$$k = r.\left(\pi - \text{Bog sin}\frac{\sqrt{(2.r.h-h^2)}}{r} - \frac{\sqrt{(2.r.h-h^2)}}{r}\right)$$

Aus dieser Gleichung müsste r gefunden werden.

28. AMBF, sey die gesuchte Cykloide bis an ihren untersten Punct, also $AO = 2.r$; $OF = r.\pi$. $AP = x$; $PM = y$
$= r.(\pi - \zeta - \sin\zeta)$ (19; VII.)

29. Man stelle sich nun eben der Verticallinie eine andre Cycloide vor deren beschreibender Halbkreis n. r zum Halbmesser habe, n ist eine noch unbekannte Zahl. Eine Abscisse dieser Cycloide von A genommen sey = n. h So findet man die Ordinate zu dieser Abscisse, wenn man in (27) n. r; n. h statt r; h; setzt.

30. Aber $\frac{2.n.r.n.h - n^2.h^2}{n^2.r^2}$ ist

$= \frac{2.r.h - h^2}{n^2}$; also

Bog sin $\frac{\sqrt{(2.n.r.n.h - (n.h)^2)}}{h.r} =$

Bog sin $\frac{\sqrt{(r.h - h^2)}}{r}$. Folglich was hie von π abgezogen wird, einerley mit dem was in (27) von π abgezogen wird, folglich, die Ordinate welche dieser Abscisse zugehört = n. k

31. Mit einem Kreise dessen Halbmesser willkührlich ist, = r* heissen mag, beschreibe man eine Cycloide welche sich in A anfängt, und an der Verticale liegt wie die bisher betrachtete AMB.

Zu dieser Absicht stelle man sich in der Verticalfläche ADB eine Horizontallinie durch A vor, und lasse sich den Kreis dessen Halbmesser = r* an derselben auf der Seite die nach DB gewandt ist wälzen. So entsteht eine Cycloide wie ich (29) angegeben habe.

Sie

Sie wird, die der Lage und Länge nach gegebene AB, in irgend einem Puncte K schneiden, zwischen A und B, oder auf der verlängerten AB, welches auf die gegebene Grösse h, k, und die willkührlich angenommene r* ankömmt.

So hat man das Perpendikel auf die Verticallinie RS = k*; und, da R ein Punct in dieser Cycloide ist, die zugehörige Abscisse AS = h*

32. Nun ist h*: h = g*: g eine Verhältniß so groß als die andre. Man nehme h*: h = r*: r; so findet sich r, $= \frac{r^* . h}{h^*}$

33. Nähmlich $r^* = \frac{h^*}{h} . r = n . r$ wenn n ein Bruch $= \frac{h^*}{h}$ ist. Die Cycloide deren beschreibender Kreis n. r zum Halbmesser hat, hat für Abscisse = n. h; Ordinate = n. k Folglich die Cycloide deren beschreibender Kreis r zum Halbmesser hat, für Abscisse h; Ordinate k. (30)

34. Läßt man also den Kreis (31) sich wälzen, so giebt die Cycloide die er beschreibt allerdings den Punct R, und so das Uebrige.

35. Wollte man aber den Kreis nicht wälzen lassen, sondern berechnen, was dieses Wälzen gäbe, so sähe die Rechnung so aus:

29. Man stelle sich nun eben der Verticallinie eine andre Cycloide vor deren beschreibender Halbkreis n. r zum Halbmesser habe, n ist eine noch unbekannte Zahl. Eine Abscisse dieser Cycloide von A genommen sey = n. h. So findet man die Ordinate zu dieser Abscisse, wenn man in (27) n. r; n. h statt r; h; setzt.

30. Aber $\frac{2.n.r.n.h - n^2.h^2}{n^2.r^2}$ ist $= \frac{2.r.h - h^2}{n^2}$; also

Bog sin $\frac{\sqrt{(2.n.r.n.h - (n.h)^2)}}{h.r} =$

Bog sin $\frac{\sqrt{(r.h - h^2)}}{r}$. Folglich was hie von π abgezogen wird, einerley mit dem was in (27) von π abgezogen wird, folglich, die Ordinate welche dieser Abscisse zugehört = n. k

31. Mit einem Kreise dessen Halbmesser willkührlich ist, = r* heissen mag, beschreibe man eine Cycloide welche sich in A anfängt, und an der Verticale liegt wie die bisher betrachtete AMB.

Zu dieser Absicht stelle man sich in der Verticalfläche ADB eine Horizontallinie durch A vor, und lasse sich den Kreis dessen Halbmesser = r* an derselben auf der Seite die nach DB gewandt ist wälzen. So entsteht eine Cycloide wie ich (29) angegeben habe.

Sie

Sie wird, die der Lage und Länge nach gegebene AB, in irgend einem Puncte K schneiden, zwischen A und B, oder auf der verlängerten AB, welches auf die gegebene Grösse h, k, und die willkührlich angenommene r* ankömmt.

So hat man das Perpendikel auf die Verticallinie RS = k*; und, da R ein Punct in dieser Cycloide ist, die zugehörige Abscisse AS = h*

32. Nun ist h*: h = g*: g eine Verhältniß so groß als die andre. Man nehme h*: h = r*: r; so findet sich r, $= \frac{r^* . h}{h^*}$

33. Nähmlich $r^* = \frac{h^*}{h} . r = n . r$ wenn n ein Bruch $= \frac{h^*}{h}$ ist. Die Cycloide deren beschreibender Kreis n. r zum Halbmesser hat, hat für Abscisse = n. h; Ordinate = n. k Folglich die Cycloide deren beschreibender Kreis r zum Halbmesser hat, für Abscisse h; Ordinate k. (30)

34. Läßt man also den Kreis (31) sich wälzen, so giebt die Cycloide die er beschreibt allerdings den Punct R, und so das Uebrige.

35. Wollte man aber den Kreis nicht wälzen lassen, sondern berechnen, was dieses Wälzen gäbe, so sähe die Rechnung so aus:

Des Winkels D A B Tangente ist $= \frac{k}{h}$ also gegeben. Man nenne den Winkel $= \alpha$; so ist $k^* = h^*. \text{tang}\,\alpha$.

Ferner; für die Cycloide (31) die Gleichung zwischen Abscisse A S; und Ordinate S R nach der in (27)

$$k^* = r^* \left\{ \pi - \text{Bog sin} \frac{\sqrt{(2.r^*.h^* - (h^*)^2)}}{r^*} - \frac{\sqrt{(2.r^*.h^* - (h^*)^2)}}{r^*} \right\}$$

Setzt man linker Hand $h^*. \text{tang}\,\alpha$ so ist die einzige unbekannte Grösse in der Gleichung h^*; Aber durch sie sind rechter Hand ein Sinus, und desselben Bogen ausgedruckt.

Die Rechnung liesse sich so führen.

36. I. Für jede Cycloide auf bisherige Art an die Verticallinie durch A gelegt, wachsen Abscissen und Ordinaten zugleich, wie die Differentialgleichung (16) zeigt.

II. Man nenne der Cycloide (34) unbestimmte Coordinaten x^*; y^*; Man hat r^*; nehme ein x^* nach Gefallen, und berechne daraus y^* wie in (19) nur statt der vorigen Buchstaben hier die mit Sternen gesetzt.

III.

III. Die Cycloide liegt anfangs zwischen der Verticallinie, und der geraden AB, da ist $\frac{y^*}{x^*}$ kleiner als tang α.

IV. Nimmt man x^* gröſſer, so kömmt dieſer Quotient näher an tang α, und so iſt klar, daß man nur andre und andre Abſciſſen annehmen darf, dieſe Quotienten, etwas kleiner als tang α, und dann etwas gröſſer zu bekommen, da ſich dann ein x^* annehmen läſſt, das den Quotienten ſehr nah an tang α bringt.

V. Hat man die Rechnung weit genug getrieben, ſo iſt das x^* für welches der Quotient nah genug an tang α kömmt, was in der Figur AS heiſſt, in (32) h^*. Und ſo findet ſich nach (32) r.

37. Joh. Bern. Op. T. I. p. 192; ſagt: Quomodo a puncto dato tanquam vertice deſcribenda ſit brachyſtochrona ſeu cyclois, tranſitura per aliud punctum datum, ſic facillime expeditur. Beſiehlt alsdann die Cycloide (31) zu beſchreiben, und aus r^*; und dem Puncte R, den verlangten Halbmeſſer r zu finden (32) Nach ſeiner Vorſchrift ſoll man ſagen: AR: AB wie der angenommene Halbmeſſer zum Geſuchten. Er giebt die Regel ohne Erläuterung, Beweis, oder Analyſis, das habe ich aus der Gleichung (27) entwickelt, aber eine ſolche Gleichung giebt Bernoulli auch nicht.

38. Nähme man für die Geschwindigkeit fallender Körper ein andres Gesetz an als das galiläische, so käme eine andre Brachystochrone.

39. Man setze die Geschwindigkeiten verhalten sich wie die Höhen selbst. Der Fall durch GF gebe dem Körper die Geschwindigkeit c und der durch x die Geschwindigkeit u; wo c, u; Wege in einer Secunde bedeuten können. Es sey ferner $u = \frac{C.x}{G}$ so ist nun in (8) $ds = u.dt = \frac{C.x}{G}.dt$ daher $\frac{C}{G}dt = \frac{ds}{x} = \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{x}.dx$

Hie soll nun von dem was rechter Hand steht, das Integral ein Kleinstes seyn. Also nach dem Verfahren wie in (11) $V = \frac{\sqrt{(1+p^2)}}{x}$;

$$dV = -\frac{\sqrt{(1+p^2)}.dx}{x^2} + \frac{p.dp}{x.\sqrt{(1+p^2)}}$$

Folglich $M = -\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{x}$;

$N = 0$; $P = \frac{p}{x.\sqrt{(1+p^2)}}$;

$Q \ldots = 0$.

Wiederum, wie in (14) $\frac{p}{x.\sqrt{(1+p^2)}}$ unveränderlich $= \frac{1}{c}$

Also $= c^2.dy^2 = x^2.dx^2 + x^2.dy^2$

Daraus

Daraus $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)}}$

Also $y = c - \sqrt{(c^2 - x^2)}$ weil y und x zugleich verschwinden sollen.

Also M in einem Kreise dessen Halbmesser $= c$, auf die Verticallinie senkrecht in A steht, daß der Kreis sie berührt.

Den Halbmesser zu bestimmen ist $k = c - \sqrt{(c^2 - h^2)}$, daraus $2.c = k + \frac{h^2}{h}$.

Joh. Bern. am (37) angef. Orte erinnert für das hie angenommene Gesetz sey die Brachystochrone ein Kreis.

Geschichte der Bemühungen mit der Brachystochrone.

40. In den leipziger Actis Eruditorum 1696. Junius, legte Johann Bernoulli die Aufgabe den Geometern vor, im wesentlichen auf die Art wie ich sie in (1) ausgedruckt habe, erinnerte, es sey nicht etwa die gerade Linie AB, sondern eine krumme, den Geometern sehr bekannte. Er gab das laufende Jahr Zeit zu Beantwortung der Frage. Diese Zeit verstrich, und in einem Programm das er 1697 d. 1. Jan. zu Gröningen drucken ließ .. es findet sich Op. Io. Bern. T. I. n. XXXIII. ... meldete er, es sey keine Beantwortung erschienen, Leibnitz habe ihm geschrie-

ben: se iam feliciter dissoluisse nodum pulcherrimi huius et inauditi antea problematis, und gebeten, die Zeit bis auf nächste Ostern zu erstrecken, damit indessen auch Franzosen und Italiäner die Frage erführen, deßwegen wiederhohlt sie B. auf diesem Blatte und fügt noch eine, blos geometrische bey.

41. In Act. Erud. 1697. Mai. giebt Joh. B. die Gleichung, wie sie bey mir (15) steht, und leitet daraus her die gesuchte Linie sey die Cycloide. Erinnert auch diese Frage übersteige die Kräfte der mancherley Methoden von Gröſſten und Kleinſten, auf welche sich die damahligen Geometern soviel zu gute thaten; vermöge der carteſiſchen Geometrie fanden sie nähmlich nur gröſſte oder kleinſte Ordinate einer gegebenen Linie, nicht die Linie selbſt, die ein Gröſſtes oder Kleinſtes leiſten sollte.

Er bemerkt daß dieſe Brachyſtochrone auch Tautochrone iſt (Meiner Höh. Mech. II. Abſchn. 53.) aber daß beyde Linien nicht einerley seyn würden wenn andere Geſetze des Falles ſtatt fänden. In der Vorausſetzung (39) sey die Tautochrona, eine gerade Linie.

42. Auf Bernoullis Auffoderung erſchien zuerſt in Philoſophical Tranſact. n. 224, p. 384 eine Conſtruction der verlangten krummen Linie, aber ohne Analyſis und Beweis. Tſchirnhauſen Act Er. 1697; p. 222, ſtellte ſich irrig vor, mehr krumme Linien könnten eben das leiſten.

Der

Der Marquis de l'Hospital gab seine Auflösung in Act. Er. 1697. ohne Analysis, schrieb aber Bernoullin, er habe sich der Lehren bedient die B. ihm vordem zu allgemeiner Untersuchung der Kettenlinien mitgetheilt hatte.

43. Das Bisherige (41; 42;) aus Op. Io. B. T. II. n. 38. Daselbst wird auch erwähnt Jacob Bernoulli, habe ebenfalls eine Auflösung gegeben, sey der vierte zu den dreyen welche Deutschland, England, Frankreich, zu Beantwortung der Frage gegeben. Iac. Bernoullii Solutio problematum fraternorum erschien Act. Er. 1697; Op. Iac. Bernoull. T. II. n. 75. Newtons Construction (42) findet sich in: Newtoni Opuscula, collegit Ioh. Castillioneus (Lausc. et Gen. 1744; III. Quartbände) T. I. p. 289. Newton erinnert, daß man vermittelst einer willkührlichen Cycloide, die beschreibe welche durch den gegebenen Punct geht. (33)

44. In Act. Er. 1720; u. f. findet sich Nic. Bernoullii Ioh. filii exercitatio de trajectoriis orthogonalibus, daraus in Opera Io. B. T. II. n. 116. Nicolaus rückt manches ein das er von seinem Vater bekommen, es ist im Drucke unterschieden. Dahin gehöret auch §. LXVI, Op. p. 469. Brachystochronen zu finden, wenn die Richtungen der Kraft welche das Fallen verursacht, nach einem gegebenen Puncte zusammengehn.

45.

45. Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions sur le problème des isoperimetres par Mr. Jean Bernoulli, stehn in Mém de l'Ac. d Sc. 1718; lateinisch in Act. Er. 1718; aus den Mém. in Op. Io. B. T. II. n. 103. Da wird Probl. IV. p. 254 gewiesen: Unter allen krummen Linien von gleicher Länge, die durch zweene gegebene Puncte gehn, diejenige zu finden auf welcher ein Körper in der kürzesten Zeit von einem Puncte zum andern kömmt. Daß aller Länge gleich seyn soll, unterscheidet diese Frage von der welcher die Cycloide genug that. Hie findet auch eine algebraische statt. B. Methode läßt sich auch bey anderu Gesetzen des Falls anbringen.

In eben dem Aufsatze, p. 267. steht eine directe und ausserordentliche Auflösung der Aufgabe: de la plus vite descente. Joh. B. hatte sie 1697 Leibnizen mitgetheilt, dieser sie sehr gelobt, und gerathen sie damahls noch zurückzuhalten.

46. Sehr allgemeine Untersuchungen über die Brachystochronen finden sich in Euleri Mechanica T. II. (Petrop. 1736). §. 361 .... 407; für Kräfte nach unterschiednen Richtungen, in unterschiednen Ebnen, in wiederstehenden Mitteln, u.s.w.

47. Leibnitii et Io. Bern. Commercium epistolicum Lauf. et Gen. 1745; 2. B. enthält den Briefwechsel von 1694... 1716. Im 28. Br. Jun.

Jun. 1696. T. I. p. 175; schreibt L. Bernoullin seine Auflösung. L. meynt: man könne die Linie tachystoptotam nennen, welchen Nahmen sich B. im 29 B. 177 S. gefallen lässt, aber Leibnitzen, der nur die Differentialgleichung gefunden, und solche nicht umständlich untersucht hatte, erinnert daß es die Cycloide sey. Im 30 Br. bemerkt L. der Nahme Brachystochrona, könnte in allgemeinerer Bedeutung dienen, Tachystoptota liesse sich eigentlich vom Fallen brauchen.

Im 41. Br. Jan. 1697. sendet Bernoulli einen Aufsatz vom Sauveur, der eine seyn sollende, aber ganz verunglückte Auflösung enthält, wo wie L. in 42 Br. erinnert die wahre Infinitesimalmethode vernachlässiget ist. Der Fehler ungeachtet gesteht L. dem Sauveur nicht gemeinen Scharfsinn zu.

Ein holländischer Gelehrter Mackrelius, urtheilte bey Bekanntmachung der Aufgabe: So was sey für die Deutschen gut, die Holländer würden es nicht beantworten.

Runder Körper welcher nach der Richtung seiner Axe bewegt, den kleinsten Widerstand leidet.

1. Wenn v die Höhe heisst welche des Körpers Geschwindigkeit gehört, so setzt man den Widerstand den er leidet $= 4. \pi. v. \int \frac{y. dy^3}{ds^2}$

(Meine

(Meine Aufgt. d. Hydrodynamik, II. Ausg. 1797; 434; XI.) Es kömmt also darauf an die Umstände zu finden unter welchen das Integral ein Kleinstes wird.

2. Das Integral ist $\int \frac{y.p^3.dx}{1+p^2}$ also $V = \frac{y.p^3}{1+p^2}$; $dV = \frac{p^3.dy}{1+p^2} + \frac{p^2.y.(3+p^2).dp}{(1+p^2)^2}$

Also $M = 0$; $N = \frac{p^3}{1+p^2}$; $P = \frac{p^2.y.(3+p^2)}{(1+p^2)^2}$

3. $N = \frac{dP}{dx}$ giebt $\frac{dV}{dy} - \frac{P.dp}{dy} = \frac{dP}{dx}$ also $dV = P.dp + dP.p$. Folglich $V + Const = P.p$ oder

$$\frac{y.p^3}{1+p^2} + a = \frac{p^3.y.(3+p^2)}{(1+p^2)^2}$$

4. Daraus $a.(1+p^2)^2 = 2.p^3.y$

5. Hie läßt sich p nicht wegschaffen. Man drücke also die beyden Coordinaten durch p aus.

6. $y = \frac{a.(1+p^2)^2}{2.p^3}$; $x = \int \frac{dy}{p} = \frac{y}{p} + \int \frac{y.dp}{p^2}$. Wenn man statt y seinen Werth setzt, kömmt endlich $x = \frac{1}{2}a.\left(\frac{3}{p^4} + \frac{1}{p^2} + 1 + \log p\right)$

Für

Für ein angenommenes p findet man also x und y, wobey man auch den natürlichen Logarithmen von p braucht.

Geschichte der Untersuchungen über den runden Körper welcher den kleinsten Widerstand leidet (Solidum minimae resistentiae.)

7. Newton giebt eine Eigenschaft der krummen Linie an, aus deren Umdrehung um ihre Axe er entsteht. Princ. L. II. Pr. 35. Schol.

8. Als Joh. Bernoulli die Brachystochrone zu finden aufgegeben hatte, erschien Nicolai Fatii Duillerii R. S. S. Lineae breuissimi descensus investigatio geometrica duplex cui addita est investigatio geometrica solidi rotundi in quo minima fiat resistentia Lond. 4. Fatio sagte die Frage vom Körper welcher den geringsten Widerstand leistet, sey schwerer als die vom Falle in der kürzesten Zeit, Bernoulli versichert er habe sie im Bette liegend, ohne Papier und Feder aufgelöst, die Figur sich in Gedanken vorgestellt, diese Auflösung findet sich in Act. Erud. 1699; p. 511. Op. Io. B. T. I. n. 54. Sie giebt eine Gleichung zwischen ersten Differentialen, die aber selbst bis auf die vierte Potenz steigen. Newtons, ohne Beweis und Analysis gegebene Vorschrift, führe sagt B. auf eben die Gleichung.

9. L'Ho-

9. L'Hoſpital giebt eine Methode dieſen Körper zu finden Act. Er. 1699. Mém. de l'Ac. des Sc. 1699. Sie iſt in Io. B. Op. T. I. n. 55. eingerückt. Daſ. n. 56. zeigt Joh. B. wie man jede der beyden Coordinaten durch eine gemeinſchaftliche veränderliche Gröſſe beſtimmt.

10. Une baſe qui eſt expoſée au choc d'un Fluide etant donnée, trouver l'eſpece du Conoide dont il faut la couvrir pour que l'impulſion ſoit la moindre qu'il eſt poſſible; par M. Bouguer. Mém. de l'Ac. d. Sc. 1733; p. 118 des holl. Drucks. Eine andre Auflöſung, eben der Aufgabe giebt Bouguer Traité du Navire (Par. 1746) L. III. Section V. chap. III.

11. Euler Scientia nauali (Petrop. 1749; 2 Quartbände) P. I. c. VI. §. 690. ſucht die krumme Linie, deren Umdrehung einen Körper giebt welcher den geringſten Wiederſtand leidet, und zugleich den gröſſten Inhalt hat.

Eine zuſammenhängende krumme Linie, giebt mit einem Theile den kleinſten Wiederſtand mit dem andern den gröſſten daſ. §. 691.

Zuvor §. 531. hatte Euler eine krumme Linie geſucht, welche unter allen die mit ihr gleichen Raum einſchlieſſen, eine Ebene begränzt die nach der Richtung des Durchmeſſers fortgeführt, den gröſſten oder kleinſten Wiederſtand leidet. Er findet eine krumme Linie aus drey Theilen zuſammengeſetzt, welche die Seiten eines gleichſeitigen

Drey-

Dreyecks zu Sehnen haben, und an den Scheiteln seiner Winkel Spitzen machen.

Diese krumme Linie, um eine Axe gedreht welche senkrecht auf eine der Seiten des Dreyecks steht, begränzt den Körper welcher zugleich den grössten Raum einnimmt, und nach der Axe Richtung bewegt, den geringsten Wiederstand leidet.

Dreht man sie aber um eine Seite des Dreyecks, so giebt sie den Körper welcher den grössten Wiederstand leidet.

12. Im 698. §. erinnert Euler: Die vor ihm diesen Gegenstand untersucht haben, hätten dem Umstand beyseite gesetzt, daß der Körper den grössten Innhalt haben sollte, nur die krumme Linie, unser alles überhaupt gesucht.

So finde sich aber eine krumme Linie welche nur der Axe nicht zusammenstosse, und das sey gegen die Absicht der Untersuchung. Deßwegen, habe er diese Art die Sache zu betrachten ganz beyseite gesetzt. Die seinige scheine der Absicht noch gemässer weil man bey Schiffen nicht nur den geringsten Wiederstand sondern auch den grössten Innhalt wünsche.

Nun aber beschreibt die krumme Linie auf erwähnte Art gedreht einen Körper, dessen Flächen einwärts gebogen sind. Das weicht zu sehr von der gewöhnlichen Gestalt der Schiffe ab, und so hindert dieses nebst andern Ursachen, den Schiffen eine Gestalt zu geben welche der erwähn-

ten nahe käme. Daher betrachtet E. nach dem andre.

13. Alle diese Untersuchungen nehmen die Gesetze des Stoßes, oder des gleichgültigen Widerstandes auf runde Körper an, die in meiner Anfgr. d. Hydrodynamik, a. a. O. vorgetragen sind. Die bleiben nun nicht ungeändert, wenn sich der schiefe Stoß anders verhält als bey ihnen angenommen wird; Man s. erwähntes Buch 435; V.

Kürzeste Linie auf einer gegebenen krummen Fläche.

1. Die krumme Fläche ist auf die gewöhnliche Art, durch eine Gleichung zwischen x; y; z; gegeben.

2. Folglich ist z eine Function von x und y; so daß $dz = K.dx + L.dy$

3. Also ist $\left(\frac{dK}{dy}\right) = \left(\frac{dL}{dx}\right)$ (An. Un. 485)

Man setze $dK = E.dx + F.dy$ so ist $\left(\frac{dK}{dy}\right) = F$, folglich $dL = F.dx + G.dy$, damit $\left(\frac{dL}{dx}\right) = \left(\frac{dK}{dy}\right)$ wird.

4. Wie z überhaupt ein Loth von jedem Puncte der krummen Fläche auf die Grundfläche bedeutet, so behalte man aus diesen Bedeutungen nur

nur die: Eines Lothes von einer krummen Linie in der krummen Fläche. Dieser krummen Linie Projection auf der Grundfläche, ist dann eine krumme Linie welche x und y zu Coordinaten hat. Kennt man diese Projection, so giebt sich aus der Gleichung für die krumme Fläche, z das zu paar zusammengehörigen x und y gehört, also wie weit der Punct der krummen Linie in der krummen Fläche, von seiner Projection auf die Grundfläche absteht.

5. Das Element der krummen Linie auf der krummen Fläche, hat zum Quadrate

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + (K.dx + L.dy)^2$$

Setzt man $dy = p.dx$ so kömmt dieses Quadrat $= (1 + p^2 + K^2 + 2.K.L.p + L^2.p^2).dx^2$

6. Also soll

$$\int V(1 + p^2 + K^2 + 2.K.L.p + L^2.p^2).dx$$

ein Kleinstes seyn.

7. Die Wurzelgrösse ist, was in der Variationsrechnung V heißt. Also

$$V.dV = (K + L.p).dK + (K.p + p^2 L).dL + (K.L + L^2.p + p).dp$$

8. Wenn man die Differentiale von K und L aus (3) nimmt so kömmt

$$V.dV = \left.\begin{matrix} K.E \\ + L.E.p \\ + K.F.p \\ + L.F.p^2 \end{matrix}\right\}.dx + \left.\begin{matrix} K.F \\ + L.F.p \\ + K.G.p \\ + L.G.p^2 \end{matrix}\right\}.dy$$

$+ p) \cdot dp$
$+ K \cdot L)$
$+ L^2 \cdot p)$

9. Wenn nun jeden der Factoren bey dx; dy; dp; mit V^3 dividirt, so sind die Quotienten, der erste M, der zweyte N, der dritte P.

10. Nun soll für die kürzeste Linie auf der krummen Fläche $N \cdot dx = dP$ seyn.

$$\frac{K \cdot F + L \cdot F \cdot p + K \cdot G \cdot p + L \cdot G \cdot p^2}{V} \cdot dx = d\left(\frac{p + K \cdot L + L^2 \cdot p}{V}\right)$$

11. Der Dividend linker Hand ist $=$
$(K + L \cdot p) \cdot (F \cdot dx + G \cdot dy) =$
$(K + L \cdot p) \cdot dL$ also

$$\frac{(K + L \cdot p) \cdot dL}{V} = d\left(\frac{p + K \cdot L + L^2 \cdot p}{V}\right)$$

12. In (12) ist das Differential rechter Hand $=$

$$\frac{V \cdot d(p + K \cdot L + L^2 \cdot p) - (p + K \cdot L + L^2 \cdot p) \cdot dV}{V^2}$$

$=$

$$\frac{V^2 \cdot d(p + K \cdot L + L^2 \cdot p) - (p + K \cdot L + L^2 \cdot p) \cdot V \cdot dV}{V^3}$$

13. Man multiplicire also in (11) rechter und linker Hand mit V^3 so kömmt:

$(K + L \cdot p) \cdot V^2 \cdot dL = V^2 \cdot d(p + K \cdot L + L^2 \cdot p) - (p + K \cdot L + L^2 \cdot p) \cdot V \cdot dV$

Daraus

Daraus

14. $(p + K.L + L^2.p).\ V.\ dV$
$= V^2.\ \{d(p + K.L + L^2.p)$
$- (K + L.p).\ dL\}$

15. Was rechter Hand in V^2 multiplicirt wird ist $= (L^2 + 1).\ dp + L.\ dK + L.\ p.\ dL$. Ferner ist $V^2 = 1 + p^2 + K^2 + 2.K.L.\ p + L^2.p^2$

16. Also das Product rechter Hand in (14)

$$\left(\begin{matrix} 1 + L^2 + K^2.L^2 + 2\ K.L \\ + K^2 \qquad\qquad + 2.K^2 \end{matrix}\right\} p + \left\{\begin{matrix} 1 \\ + 2.L^2 \\ + L^4 \end{matrix}\right) p^2 \Big).\ dp$$

$+ (+K^2.L + L + 2.K.L^2.p + (L + L^3).p^2).\ dK$
$+ (+(L + K^2.L).p + 2.K.L^2.p^2 + (L + L^3).p^3).\ dL$

17. Ferner $V.\ dV = (K.L + L^2.p + p).\ dp$
$+ (K + L.p).\ dK$
$+ (K.p + L.p^2).\ dL$

Dieß wird multiplicirt mit $p + K.L + L^2.p$

18. Also das Product linker Hand in (14)
$(K^2.L^2 + 2.(K.L + K.L^3).p + (1 + 2.L^2 + L^4).p^2).\ dp$
$+ (K^2.L + (K + 2.K.L^2).p + (L + L^3).p^2).\ dK$
$+ ((K^2.L.p + (K + 2.K.L^2).p^2 + (L + L^3).p^3).\ dL$

19. Nun bringe man Alles auf die rechte Seite so kömmt
$0 = (1 + L^2 + K^2).\ dp + (L - K.p).\ dK$
$+ (L.p - K.p^2).\ dL$

20. Alſo ſtatt dp, und p ihre Werthe geſetzt

$$(1 + L^2 + K^2) \cdot \frac{ddy}{dx} = \frac{K.dy - L.dx}{dx} \cdot dK + \frac{(K.dy^2 - L.dy.dx)}{dx^2} \cdot dL$$

21. Daraus kömmt

$$dx.ddy = \frac{(K.dy - L.dx).(dK.dx + dL.dy)}{1 + K^2 + L^2}$$

Dieſe Differentialgleichung für die Projection (4) iſt vom zweyten Grade, bey ihrer Integration kommen alſo zwo Conſtanten. Man kann zweene Puncte willkührlich annehmen.

22. Aus (2) iſt

$ddz = dK.dx + dL.dy + L.ddy$ alſo der Dividend in (21) rechter Hand

$(K.dy - L.dx).ddz$
$- (K.dy - L.dx).L.ddy$

23. So kömmt in (21)

$$(1 + K^2 + L^2).dx + K.L.dy - L^2.dx \cdot ddy = (K.dy - L.dx).ddz$$

24. Alſo aus (2)

$$(dx + K.dz).ddy = (K.dy - L.dx).ddz$$

25. Man multiplicire auf jeder Seite mit dz und ſchreibe deſſelben Werth (2) in das Product mit $dx.ddy$, ſo kömmt

$(K.dx^2$

$(K.dx^2 + L.dy.dx + K.dz^2).ddy = (K.dy - L.dx).dz.ddz$

auf beyden Seiten addirt

$(K.dy^2 - L.dx.dy).ddy = (K.dy^2 - L.dx.dy).ddy$

So kömmt

$K.(dx^2 + dy^2 + dz^2).ddy = (K.dy - L.dx).(dz.ddz + dy.ddy)$

also

$$\frac{dy.ddy + dz.ddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{K.ddy}{K.dy - L.dx}$$

$$= \frac{K.ddz}{dx + K.dz} \quad (24)$$

26. In (24) multiplicire man auf beyden Seiten mit dx; und wo in den Producten $K.dx$ vorkömmt, schreibe man statt dessen $dz - L.dy$ (2) so kömmt

$(dx^2 + dz^2 - L.dy.dz).ddy = (dy.dz - L.dx - L.dy^2).ddz$

Man addire auf beyden Seiten

$dy^2.ddy - L.dz.ddz = dy^2.ddy - L.dz^2.ddz$

so kömmt

$$\frac{dy.ddy + dz\,ddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{ddy + L.ddz}{dy + L.dz}$$

27 Was in der letzten Gleichung (25) linker Hand steht ist einer Grösse gleich die sich auf drey Arten ausdrucken lässt, die beyden ersten

Ausdrückungen stehn in (25) die letzte in (26) rechter Hand.

28. Weil in diesen Ausdrückungen, der Grössen K, L, Differentiale nicht vorkommen, ist es gleich viel ob z sich in K und L, befinde, oder nicht. Für einen gegebenen Fall, nimmt man die Gleichung an, welche sich am leichtesten integriren lässt.

29. In (25 u. 26) steht linker Hand das Differential des Logarithmen der Quadratwurzel von $dx^2 + dy^2 + dz^2$

30. Man suche die kürzeste Linie auf der Fläche welche bey Umdrehung einer krummen Linie um ihre Axe beschrieben wird. Wenn der krummen Linie Abscisse $= x$, Ordinate $= X$, eine Function der Abscisse, so ist $y^2 + z^2 = X^2$ wie aus An. endl. Gr. (545) erhellt, in der dortigen 26 Fig. ist $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$; und $PM = X$ die Ordinate der krummen Linie welche sich um die Axe AB dreht.

31. Solchergestalt $z.dz = X.dX - y.dy$

also (2) $K = \frac{X.dX}{z.dx}$; $L = -\frac{y}{z}$

32. Man nehme aus den Gleichungen (27) die in welcher K nicht ist (26); Setzt man in sie statt L, seinen Werth (30) so kömmt: (29)

33.

33. $d\log\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)} = \frac{z.ddy-y.ddz}{z.dy-y.dz}$ Was rechter Hand steht, ist das Differential des Logarithmen von $z.dy-y.dz$

34. Also, auf beyden Seiten integrirt, und das Zeichen des Logarithmen weggelassen:

$\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)} = \frac{z.dy-y.dz}{b}$ wo b die Const bey dieser Integration ist

Also $z.dy-y.dz = b.\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$

35. Man setze $dX = v.dx$ so ist (30) $dz = \frac{X.v.dx-y.dy}{\sqrt{(X^2-y^2)}}$ und was in (34) zuletzt linker Hand steht ist $\frac{X^2.dy-X.y.v.dx}{\sqrt{(X^2-y^2)}}$

36. Was rechter Hand steht, ist ein Product aus b in die Quadratwurzel aus $\frac{(X^2.(1+v^2)-y^2).dx^2+X^2.dy^2-2.X.v.y.dx.dy}{X^2-y^2}$

37. Also sind die Quadrate gleich, von dem was linker Hand steht (35) und von dem was rechter Hand steht (36).

38. Man multiplicire auf beyden Seiten mit X^2-y^2 und ordne die Gleichung nach dy, so kömmt

$$X^2.(b^2-X^2).dy^2 = 2.(b^2-X^2).X.v.y.dx.dy + X^2.y^2.v^2 - b^2.(X^2.(1+v^2)-y^2)\Big\}.dx^2$$

39. Daraus

$$dy = \frac{y.v.dx}{X} \pm \frac{b.dx.\sqrt{((1+v^2).(y^2-X^2))}}{X.\sqrt{(b^2-X^2)}}$$

40. Man ſetze $y = X.t$ alſo $dy = X.dt + t.v.dx$; Dieſe Werthe in (39) geſetzt kömmt $\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)}} = \frac{b.\sqrt{(1+v^2)}.dx}{X.\sqrt{(b^2-X^2)}}$. Nun ſind X, v, Functionen von x; alſo ſind die veränderlichen Gröſſen t, x; von einander geſondert, und wenn man auf jeder Seite das Differential integrirt, das nur eine veränderliche Gröſſe enthält, ſo hat man eine Gleichung zwiſchen t und x.

41. Alles bisherige nach Euler Meth. inu. lin. curu. . . . c. IV. §. 11. p. 138. . . 141. Ich hoffe die Rechnung ſo dargeſtellt zu haben daß man ſie beſſer überſehen kann. Beym Euler iſt 139 S. wenigſtens ein Druckfehler, vielleicht noch einer, auch iſt mein Verfahren nach (14) anders als das ſeinige.

42. Geſchichte der Unterſuchungen über die kürzeſte Linie auf einer krummen Fläche, und Stellen wo Exempel gegeben ſind, erzähle ich in meiner weitern Ausführung der Geographie (Gött. 1795) III. Cap. II. Abſchn 87 u. f. §. 9: u. f. Seiten. Hie nenne ich nur Euler de linea breviſſima

visſima in ſuperficie quacunque duo quaelibet puncta iungente Comm. Ac. Petr. T. III. (1732) p. 110. Joh. Bernoulli hat Eulern die Frage vorgelegt. Io. Bern. In ſuperf. quac. curua ducere lineam inter duo puncta breuiſſimam Op. Io. Bern. T. IV. n. 166. Dieſer Band enthält Aufſätze die zuerſt 1742, gedruckt worden.

43. Hie dergleichen Exempel beyzubringen geſtattet der Raum nicht. Sie erfodern weitläuftige Rechnungen, ſelbſt was ſich aus der Elementargeometrie ſo leicht darthun läſſt, daß auf einer Kugelfläche der kürzeſte Weg von einem Puncte zum andern, Bogen eines gröſſten Kreiſes iſt (Ausführ. d. Geographie I. Cap. V. Lehnſ. 14. S.) Der Vorzug der analytiſchen Rechnung iſt: daß ſie die Frage allgemein beantwortet.

Gröſſtes Vieleck in eine gegebene Menge gegebener gerader Linien eingeſchloſſen.

Aufgabe.

1. Ein Vieleck hat folgende Gränzen: Eine gegebene gerade Linie als Grundlinie, durch ihre beyden Endpuncte gegebene Perpendikel; von dem obern Endpuncte des einen Perpendikels, bis zum obern Endpuncte des andern, eine Zuſammenfügung gerader Linien, deren Menge gegeben iſt. Die Gröſſe von jeder, auch die Ordnung in welcher ſie nach einander folgen. Man verlangt dieſe geraden Linien ſo zu legen, daß ſie

mit

mit den vorhin genannten dreyen, den gröſsten Raum einſchlieſſen. Was wird dazu erfodert?

Die Grundlinie liege auf AB. 48 Fig. ſey APn = c; das Perpendikel für den Anfang der Figur AL = b, das für das Ende PnLn = f. Die Zuſammenfügung der geraden Linien, ſoll ſich in L anfangen, in Ln endigen.

Die gerade Linie LLn = $\sqrt{(c^2 + (b - f^2))}$ ſchlieſſt mit den übrigen dreyen ein gegebenes Trapezium ein. Die Frage iſt alſo eigentlich: Die Zuſammenfügung der geraden Linien ſo zu bewerkſtelligen, daß ſie mit der geraden Linie L Ln den gröſsten Raum einſchlieſſen.

2. So ſeyen LL1; L1L2; die beyden erſten der gegebenen geraden Linien, von denen auf die Grundlinie, die Perpendikel LA; L1 P1; L2 P2; fallen.

3. In der Reihe der geraden Linien, gehe die mte; von Lm bis L (m + 1) die (m + 1) tr von L (m + 1) bis L (m + 2) Die Perpendikel von ihren Gränzen auf die Grundlinie, treffen ſolche in Pm, P (m + 1); P (m + 2).

4. Die beyden letzten Linien, haben zu ihren Gränzpuncten L (n — 2); L (n — 1); Ln; die Perpendikel treffen die Grundlinie in P (n — 2); P (n — 1); Pn.

5. Perpendikel vom Gränzpuncte einer Linie heiſst: Ordinate. Es ſchneidet auf der Grundlinie, von A an Abſciſſe ab.

6. Die

6. Die Menge der geraden Linien sey = n; die erste unter ihnen ist L L 1; die mte; L m L (m + 1) so ist m eine unbestimmte ganze Zahl, die von 0 bis an n — 1 wächst.

7. Es sey die erste gerade Linie L L 1 = a 0; die zweyte L 1 L 2 = a 1 so die mte, L m L (m + 1) = a m; die (m + 1)te L (m + 1) L (m + 2) = a (m + 1); die letzte L (n — 1) L n = a (n — 1)

8. So bekömmt jede Ordinate die Zahl die am Endpuncte der geraden Linie steht von welchem sie herabfälle; die Abscisse eben die Zahl.

Die erste Ordinate L A ist Ordinate 0; ihre Abscisse Abscisse 0 selbst = 0. Die zweyte Ordinate ist L 1 P 1; Ordinate 1; ihre Abscisse, AP 1 Abscisse 1.

Die Zahlen, welche ich den Ordinaten und Abscissen beyschreibe, geben an, die wievielte jede in ihre Reihe unter den folgenden ist.

9. So sind L m P m; L (m + 1) L (m + 2); Ordinate m; Ordinate (m + 1); ihren Unterschied L (m + 1) P (m + 1) — L m P m nenne ich Δ L m P m oder Δ Ordinate m;

A P m; A P (m + 1) sind Abscisse m, Abscisse (m + 1) ihren Unterschied P m P (m + 2) nenne ich Δ A P m oder Δ Abscisse.

Ich

Ich brauche den groſſen vierten Buchſtaben weil die Unterſchiede endliche Gröſſen ſind, nicht Differentiale.

10. Ich nenne AP $= xm$; Pm Lm $= ym$ Die Buchſtaben x; y; können jede Abſciſſe und Ordinate (8) bedeuten, $xo = o$; $yo = AL$.

11. So iſt $AP(m+1) = xm + \Delta xm$; $P(m+1) L(m+1) = ym + \Delta ym$, und das Trapezium Lm L (m + 1) P (m + 1) Pm $= (ym + \frac{1}{2} \Delta ym). \Delta xm$.

Seine oberſte Seite iſt gegeben alſo (7) $\Delta ym = \sqrt{((\Delta m)^2 - (\Delta xm)^2)}$

12. Die Figur (2; 3; 4;) beſteht aus m ſolchen Trapezien, jeder Werth von xm (6) giebt eins.

13. Bedeutet alſo S ihre Summe ſo kann man jedes Stück der Figur ſo ausdrucken $S((ym + \frac{1}{2} \Delta ym). \Delta xm)$; die ganze kömmt wenn $m = n$.

14. Läſſt man jede der Coordinaten und ihre Differenzen um etwas unendlich kleines variiren, ſo hat man die Variation deſſen was hinter S ſteht. Und die Summe der Variationen deſſen was hinter S ſteht, iſt die Variation der Summe deſſen was hinter S ſteht, oder: Variation der Figur.

15. Von $ym. \Delta xm + \frac{1}{2}. \Delta ym. \Delta xm$ iſt die Variation
$= (ym + \frac{1}{2} \Delta ym). \delta \Delta xm + \Delta xm. \delta ym + \frac{1}{2}. \Delta xm. \delta \Delta ym$.

16.

16. Das Trapezium obere Seite ist gegeben, variirt nicht; also verliert $(\Delta x\,m)^2 + (\Delta y\,m)^2$ nichts. Das giebt

$$\delta \Delta x\,m = -\frac{\Delta y\,m}{\Delta x\,m}\,\delta \Delta y\,m$$

(Eben wie es sich bey einer krummen Linie, mit Differentialen ihrer Abscisse und Ordinate verhält, wenn das Differential der Länge der krummen Linie unveränderlich ist.)

17. So kömmt die Variation (8)

$$\delta y\,m.\ \Delta x\,m + \left(\tfrac{1}{2}\,\Delta x\,m - \frac{y\,m.\ \Delta y\,m}{\Delta x\,m} - \frac{(\Delta y\,m)^2}{2.\,\Delta x\,m}\right).\ \delta \Delta y\,m$$

18. Nun ist $\Delta y\,m = y\,(m+1) - y\,m$ und die Variation des Unterschiedes, der Unterschied der Variationen.

19. Was (17) in die Variation des Unterschiedes der Ordinaten multiplicirt ist, nenne ich $F\,m$. Man begreift daß bey F allemahl die Zahl steht, die bey x und y steht.

20. So ist aus (17) die Variation $(\Delta x\,m - F\,m).\ \delta y\,m + F\,m.\ \delta y\,(m+1)$

Die Ordinaten deren Variationen hie vorkommen sind die beyden am Anfange und am Ende des Trapezium.

21.

21. $AL = b$ (11) gehöre als allererste Ordinate, zur allerersten Abscisse die $= o$ ist, also um die Differenz AP_1 wächst, wenn aus ihr die zweyte Abscisse, ... die erste der folgenden ... wird.

22. Aus 19, 17, also ist für das erste Trapezium $F_o = \frac{1}{2} AP_1 \cdot \frac{b \cdot \Delta b}{AP_1} - \frac{(\Delta b)^2}{2 \cdot AP_1}$ und nun aus (20) Variation des ersten Trapezium $(AP_1 - F_o)\, \delta b + F_o \cdot \delta P_1 L_1$.

23. Für das letzte Trapezium, nach (6)
$F(n-1) = \frac{1}{2} \Delta x\,(n-1) - \frac{y(n-1) \cdot \Delta y(n-1)}{\Delta x\,(n-1)}$
$- \frac{(\Delta y\,(n-1))^2}{2 \cdot \Delta x\,(n-1)}$ und die Variation $=$
$(\Delta x\,(n-1) - F(n-1)) \cdot \delta y\,(n-1) + F(n-1) \cdot \delta y\, n$

24. Das Trapezium dessen Variation in (2c) steht, kann jedes seyn, nach dem m bestimmt wird. Man berechne nach eben dem Gesetze, die Variation dessen das zunächst nach ihm folgt; imgleichen die Variation dessen, das zunächst nach dem nur erwähnten folgenden, folgt. Dieser drey Trapezien Variationen zusammen sind

$\Delta x\, m \cdot \delta y\, m + \Delta x\,(m+1) \cdot \delta y\,(m+1)$
$- F\, m \qquad - F\,(m+1)$
$+ F\, m$
$+ \Delta x$

$$+\Delta x\,(m+2)\Big\} \quad +F(m+2).\delta y\,(m+3)$$
$$-F(m+2)\Big\}.\delta y\,(m+2)$$
$$+F(m+1)\Big\}$$

25. Nach (20) besteht die Variation jedes Trapezium aus zwey Stücken, deren eines die Variation der Ordinate enthält an welcher das Trapezium anfängt, das andre, die Variation der Ordinate an welcher das Trapezium aufhört, oder das nächst folgende anfängt. Also geben zweyer nach einander folgenden Trapezien Variationen, zusammen vollständig den Coefficienten der Variation des Perpendikels an welchem das zweyte der genannten anfängt.

So sind bey den (24) befindlichen Variationen vier nach einander folgenden Ordinaten, die Coefficienten der Variationen der beyden mittlern vollständig, zu dem der Variation der ersten kömmt noch etwas aus der Variation des vorhergehenden Trapezium, und zu dem der Variation der letzten, noch was aus der Variation des folgenden Trapezium.

26. So machen der Trapezien Variationen zusammen eine Reihe aus, jedes Glied derselben ist ein Product aus einem Coefficienten in eine Variation einer Ordinate, die Ordinaten folgen nach der Ordnung, das erste und letzte Glied stehn (22; 23)

27. Diese Reihe Summe soll $=0$ seyn. Jeder Ordinate Variation, ist unabhängig von ei-

ner andern Ordinate Variation. Folglich muß der Coefficient bey jeder Ordinate Variation = o seyn.

28. Die Coefficienten bey den Variationen der ersten Ordinate b; und der letzten $yn = f$ stehn in (22; 23). Weil bey dem ersten kein Trapezium vorhergeht, beym letzten keines folgt, so entstehn sie nicht so wie jeder der übrigen (25). Aber diese anomalischen Coefficienten, sind gar nicht vorhanden, weil die erste und die letzte Ordinate nicht variiren (1). So giebt es nur Coefficienten für Variationen der Ordinaten von $y1$ bis mit $y(n-1)$.

29. Man setze also in (24) von den beyden Coefficienten die da vollständig vorhanden sind (25) den ersten = o.

Nun heißt $Fm + \Delta Fm = F(m+1)$; also ist $\Delta x(m+1) - \Delta Fm = o$, oder diese beyden Differenzen sind gleich.

30. Diese Gleichheit sagt soviel: Wenn sich eine Abscisse in ihre nächstfolgende ändert, so beträgt das soviel, als wenn sich das F das der Abscisse gehört die vor der sich ändernden vorhergeht, in sein nächstfolgendes ändert.

Also; die beyden Grössen $x(m+1)$; Fm; ändern sich allemahl eine soviel als die ander, was auch m ist. Folglich bleibt ihr Unterschied immer derselbe, oder es ist $x(m+1) - Fm = g$ ei-

ner

ner Grösse von der ich jetzo nur noch weiß daß sie unveränderlich ist, nicht wie groß sie selbst ist.

31. Weil $x(m+1) = xm + \Delta xm$; so ist (19), wenn man alles mit $2.\Delta xm$ multiplicirt:

$$2.xm.\Delta xm + (\Delta xm)^2 + 2.ym.\Delta ym + (\Delta ym)^2 = 2.g.\Delta xm.$$

32. I. Was linker Hand des Gleichheitszeichens steht, ist $\Delta((xm)^2 + (ym)^2)$ Also kömmt endlich die Gleichung zwischen Abscissen und Ordinaten selbst

$$(xm)^2 + (ym)^2 = 2.g.xm + b^2$$

II. Nähmlich die Gleichung gilt für jedes Paar zusammengehörige Coordinaten, die beyden ersten sind o und b (21).

III. Die beyden letzten sind c, f (1) also $c^2 + f^2 = 2.g.c + b^2$; folglich die beständige Grösse die man bisher noch nicht kannte (30)

$$g = \frac{c^2 + f^2 - b^2}{2.c}$$

33. Die bisher gebrauchten Coordinaten ändern sich um endliche Unterschiede. So ist die Gleichung zwischen ihnen nicht für eine krumme Linie, sondern für eine Reihe gerader. Sie muß in der $p^2 + q^2 = 2.g.p + b^2$ enthalten seyn, wenn man unter p und q. Grössen versteht, die sich durch Differentiale ändern. Ich suche also was für einer krummen Linie diese Gleichung gehört.

34. Die krumme Linie ist vom zweyten Grade, wird durch die Abscissenlinie in ähnliche Hälften getheilt, hat für $p = o$ zur bejahten Ordinate b.

35. I. Für $q = o$ ist $p = g \pm \sqrt{(g^2 + b^2)}$ Man nehme $AB = g + \sqrt{(g^2 + b^2)}$ $AC = \sqrt{(g^2 + b^2)} - g$; AC ist der verneinte Werth von p für $q = o$; wird deßwegen dem bejahten AB entgegengesetzt genommen.

So ist $CB = 2.\sqrt{(g^2 + b^2)}$ Man halbire CB in K, so ist $AK = g$.

II. Man rechne Abscissen $= u$ von K so daß $u = g - p$ oder $p = g - u$, so wird die Gleichung $u^2 + q^2 = g^2 + b^2$ gehört also einem Kreise dessen Mittelpunct K, Halbmesser $= \sqrt{(g^2 + b^2)}$ welcher aus (32) gegeben ist. Er heisse $= r$.

36. Ohne an Variationen zu denken könnte man sich folgende Aufgabe der Elementargeometrie vorlegen:

Es sind $APn = c$; $AL = b$; $PnLn = f$, gegeben; Man soll einen Kreis durch L und Ln ziehen, der seinen Mittelpunct in der geraden Linie hat, auf welcher c liegt.

Dieser noch unbekannte Mittelpunct sey K; der unbekannte Halbmesser $= r$; So ist $\sqrt{(r^2 - b^2)} + \sqrt{(r^2 - f^2)} = c$.

Ich

Ich ſetze $\sqrt{(r^2 - b^2)} - \sqrt{(r^2 - f^2)} = w$
alſo $c^2 + 2.c.w + w^2 = 4.r^2 - 4b^2$
$c^2 - 2.c.w + w^2 = 4r^2 - 4.f^2$
$c^2 + w^2 = 4.r^2 - 2.(b^2 + f^2)$
$c.w = 2.(f^2 - b^2)$ alſo

$$4.r^2 = c^2 + 2.(f^2 + b^2) + \frac{4.(f^2 - b^2)^2}{c^2}$$

37. Mit des Halbmeſſers Länge durchſchneide man aus L die Abſciſſenlinie, ſo hat man den Mittelpunct K.

Man könnte den Durchſchnitt nehmen der linker Hand von A fällt. Da käme nur AB mit der Figur darüber, linker Hand, AC rechter Hand.

38. Aus der geraden Linie L Ln (1) als Sehne, und dem Halbmeſſer, giebt ſich der Winkel L K Ln.

39. Für $f = b$ kömmt $g = \frac{1}{2}c$. Der Halbmeſſer $= \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4}c^2)}$ und die Sehne (38) $= c$.

Setzt man $f = b = o$, ſo iſt der Halbmeſſer $= \frac{1}{2}c$ die Sehne ſein Doppeltes; C fällt auf A und B auf Pn.

40. Die geraden Linien (1) müſſen alſo Sehnen des Kreisbogens L Ln ſeyn. Die Abſciſſen und Ordinaten (9; 10;) finden ſich unter den p und q (33)

41. Halbmeſſer, Mittelpunct, Kreisbogen der den Winkel am Mittelpuncte miſſt, werden allein aus c, b, f (1)-beſtimmt, die geraden Linien von deren Zuſammenfügung (1) redet, haben in dieſe Beſtimmung gar keinen Einfluß.

42. Die Unterſuchung lehrt alſo ſoviel: Man habe in den Bogen LLn; n gerade Linien als Sehnen getragen, ſo ſchlieſſen ſie mit der geraden Linie LLn, einen gröſſern Raum ein, als wenn man eben die geraden Linien, in eben der Ordnung, über eben der LLn, ſo zuſammenfügt, daß ſie nicht Sehnen des beſtimmten Bogens ſind.

43. Dieſe Seiten des gröſſten Vielecks, werden alſo aus dem Kreisbogen beſtimmt von dem ſie Sehnen ſind.

Gegebene Seiten, werden nicht allemahl Sehnen eines Kreisbogens ſeyn, der ganz ohne ihre Betrachtung beſtimmt wird.

Die Unterſuchung lehrt alſo nicht: Aus gegebenen Seiten das gröſſte Vieleck zu machen.

44. Selbſt, wo ſich über der gegebenen Linie, aus gegebenen Seiten, ein gröſſtes Vieleck machen läſſt, möchte ſie nicht allemahl zur bequemſten Bewerkſtelligung führen.

45. Geſetzt über der geraden Linie LLn ſollten drey gegebene gerade Linien ſtehn (1) die erſte.

(7)

(7) = a der dritten gleich, die zweyte a 1 der LLn gleich. Diese drey geraden Linien, können nicht anders zusammengefügt werden, als in drey Seiten eines Parallelogramm, davon LLn die vierte ist. Sie schliessen mit dieser vierten einen grösten Raum ein, wenn das Parallelogramm ein Rechteck wird. Alsdann aber, liegt der Mittelpunct des Kreises, von dem sowohl LLn als die drey übrigen geraden Linien Sehnen sind, im Durchschnitte von des Rechtecks Diagonalen.

46 Es sey der Halbmesser (35) = r; die gerade Linie LLn = h (1), der Winkel LKLn = k also $\sin \frac{1}{2} k = \frac{h}{2.r}$

Der Bogen r. k ist also durch r und h gegeben. Theilt man ihn in n Theile, gleiche oder ungleiche, und zieht jedes Sehne, so machen diese Sehnen über h ein Vieleck, grösser als ihre Längen machen wenn sie über eben der h so zusammengefügt werden, daß sie nicht Sehnen der Theile des Bogens wären. Die Summe dieser Längen beträgt mehr als h, weniger als r. k.

Aber nicht aus jeder geraden Linie deren Länge zwischen die nur genannten Gränzen fällt, lassen sich n Theile machen, deren jeder Sehne eines von n Bogen wäre die zusammen r. k betragen.

47. In Cousin Leçons de calcul differentiel et de calcul integral Par. 1777; redet des I. Th.

6. Cap. de la methode des Variations. Unter den Exempeln durch welche er den Gebrauch dieſer Methode erläutert, iſt das erſte 326 S. Entre tous les polygones que l'on peut former, avec un même nombre de cotés donnés, on demande celui qui a la plus grande ſurface. Er fällt von den Endpuncten jeder Seite des Polygons das er ſucht Perpendikel auf eine Abſciſſenlinie, zwiſchen ihnen, dem Stücke der Abſciſſenlinie das zwiſchen ſie fällt, und der Seite, iſt ein Trapezium enthalten deſſen Variation er ſucht aus der Bedingung daß die Seite nicht variirt. Er findet auch, das gröſſte Polygon ſey, deſſen Seiten ſich in einen Kreis beſchreiben laſſen.

Er betrachtet ein Trapezium in der Figur, ohne derſelben Anfang und Ende darzuſtellen, nennt die Coordinaten die des Trapezium Anfange gehören x, y, bezeichnet z. E. folgende Abſciſſe mit x^1 vorhergehende mit ^1x und da ſich ſo nicht angeben läſſt wie weit man vorwärts oder rückwärts geht, ſo bekenne ich daß mir ſein Verfahren dunkel vorkömmt.

48. Ich habe geſucht meinen Vortrag ſo einzurichten, daß man ſieht wo man anfängt, und aufhört, wie Halbmeſſer und Mittelpunct des Kreiſes beſtimmt werden, und was man eigentlich mit der ganzen Unterſuchung leiſtet, welches meiner Einſicht nach nicht ganz iſt was man nach Couſins Ausdrucke der Aufgabe erwarten könnte.

49.

49. Meine Absicht bey dieser Untersuchung war: zu zeigen wie Variationen und Anwendungen derselben angebracht werden, wo Grössen sich durch endliche Unterschiede ändern.

50. Nur die gewöhnliche Rechnung für Grösste und Kleinste braucht L'Huilier, Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris §. 186; p. 279 für folgende Aufgabe: Von einer geradelinichten Figur sind alle Seiten bis auf eine der Grösse nach gegeben: Man sucht die Figur deren Innhalt am grösten ist.

Zur Geschichte der Variationsrechnung.

1. Hugenius (Traité de la lumière, ... par C. H. D. Z. (Chrétien Huygens de Zuylichem) Leid. 1690; 4.) stellt sich vor Licht werde durch Elasticität der Aethertheilchen fortgepflanzt die den leuchtenden Punct umgeben. In ihnen entstehn Wellen, und wenn eine solche Welle das Auge rührt, erscheint der Punct in einer geraden Linie welche auf sie senkrecht ist. Hugen stellt dieses in einer Figur 44 S. vor, und zeigt daraus warum in Materie deren Dichte veränderlich ist, ein Punct durch Refraction höher erscheint als er ohne sie erscheinen würde. Alle Wellen werden durch eine krumme Linie aus dem leuchtenden Puncte senkrecht geschnitten. Der Punct erscheint dem Auge in dieser Linie Tangente.

2. Man stelle An. Un. 1. T. 7. F. die Cycloide so daß ihr Punct A den oberste ist, und

ein Körper auf ihr nach APF fiele. Zu dem Falle durch AP braucht er eine gewisse Zeit; Man kann eine Verticallinie angeben, durch welche er in eben der Zeit fiele; Sie mag = k heissen.

Nun stelle man eben so eine andre Cycloide, von einem andern Kreise beschrieben, die sich auch in A anfängt. Durch einen Bogen von ihr der AP2 heissen mag, falle ein Körper in eben der Zeit, in welcher er durch k fällt.

Und so durch einer dritten Cycloide Bogen AP3; und einer vierten AP4 u. s. w.

Alle diese Puncte P, P2, P3 ... liegen in einer krummen Linie die beym Joh. Bernoulli Synchrona heisst. Act. Er. 1697. Mai. Op. T. I. n. 37, p. 193, sie schneidet die Cycloiden alle senkrecht, wie sagt B. Hugens krumme Linie, desselben Wellen.

Blos geometrisch gefragt: Eine krumme Linie zu finden, welche alle Cycloiden die gemeinschaftlichen Anfang haben senkrecht schneidet? wäre sagt B etwas sehr schweres, aber aus Betrachtung des Falles auf der Cycloide, lässt es sich sehr leicht herleiten.

Wer nun seine Methode versuchen will endigt B. der suche eine Linie, welche der Lage nach ordentlich gegebene krumme Linien, nicht alge-

braische,

braische, das wäre nicht gar zu schwer, sondern transcendentische z. E. logarithmische, die über einer Axe, durch einen Punct gezogen sind, alle senkrecht schneidet.

3. Hie hat man also variirende krumme Linien, nur ist ihre Beschaffenheit gegeben, daß es z. E. logarithmische seyn sollen, in der Variationsrechnung war nichts von der Beschaffenheit der variirenden krummen Linien gegeben. Ich glaube daher man mache mit Rechte davon den Anfang dieser Geschichte. Zugleich zeigt sich, was Hugens Lichtwellen für Theil daran haben.

Wenn man mit Bernoullin annimmt, der Sinus der Refraction, verhält sich an jeder Stelle wie die Rarität des Mittels oder wie die Geschwindigkeit des Lichtkügelchens, so ist die Eigenschaft der krummen Linie welche der Gang des Lichtes macht, daß sich überall der Sinus ihrer Neigung gegen die Verticallinie, wie die Geschwindigkeit verhält. Verhalten sich die Raritäten wie die Geschwindigkeiten eines fallenden Körpers, so ist die Krümmung des Ganges des Lichts die Brachystochrone.

Hätte Bernoulli nicht über Hugens physische Theorie vom Lichte speculirt, die man jetzo eben nicht als erwiesen annimmt, so wäre er vielleicht nicht auf solche geometrische Untersuchungen gekommen.

4. Die

4. Die krumme Linie zu finden welche unzählige logarithmische senkrecht schneidet, lehrte Jacob Bernoulli Act. Erud. Lipſ. 1698; Mai. Op. Jac. B. T. II. n. 81. und fügte Fragen von andern krummen Linien bey.

Joh. Bernoulli nennte ſolche Linien traiectorias, quae alias ordinatim datas normaliter, vel in angulo quouis dato, ſeu etiam data lege variante traiiciunt, wenn der Winkel ein rechter iſt; orthogonales. Act. Er. 1698. Oct. Op. Io. B. T. I. n. 52. p. 266.

Dieſe Linien haben eine Menge Unterſuchungen veranlaſſt, deren Erzählung ich hie nicht unternehme, weil ich die gegebenen Linien nur als das älteſte Beyſpiel von variirten erwähne.

5. Begreiflich kann man Linien von übrigens gegebenen Eigenſchaften in mehr Abſichten als variirt betrachten. Man ſtelle ſich logarithmiſche Linien über einer Aſymptote vor, die alle für die Abſciſſe $=0$, einerley Ordinate haben, alſo durch einen Punct durchgehn; Sie unterſcheiden ſich bekanntermaſſen durch ihre Subtangente.

Von dem gemeinſchaftlichen Puncte, ſind auf allen dieſen logarithmiſchen Linien gleich lange Bogen genommen, durch derſelben Endpuncte geht eine krumme Linie.

Man verlangt die Tangente dieſer krummen Linie, an einem Puncte den ſie mit einer der logarithmiſchen Linien gemein hat.

6. Man

6. Man ziehe durch den Anfang der Abscissen ein Perpendikel auf die Asymptote, und fälle auf dieses Perpendikel wiederum eins, von einem Puncte der logarithmischen Linie die a zur Subtangente hat. Es ist so groß als die Abscisse der logarithmischen Linie auf der Asymptote, und schneidet auf dem erst gezogenen Perpendikel ein Stück ab, das der gewöhnlichen Ordinate der logarithmischen Linie gleich ist; Nennt man also Ordinate und Abscisse wie bey der logarithmischen Linie gewöhnlich ist, so ist das abgeschnittne Perpendikel = y und das abschneidende, ... Abstand des Puncts der logarithmischen Linie von dem Perpendikel auf die Asymptote = x = a. $\int \frac{dy}{y}$. Dieser Abstand ist auf einer geraden Linie die der Asymptote parallel ist.

7. Heißt einer zweyten logarithmischen Linie Subtangente (a) so hat der Punct von ihr welcher sich in nur erwähnter Parallele befindet, von dem Perpendikel auf die Asymptote den Abstand (a). $\int \frac{dy}{y}$ Für beyde logarithmische Linien ist y einerley.

8. Sind also beyder logarithmischen Linien Subtangenten unendlich wenig unterschieden, so ist der Parallele mit der Asymptote Stück zwischen

schen ihnen $= da. \int \frac{dy}{y}$. Da differentiirt man die Subtangente bey ungeänderter Abscisse.

9. Zwischen dem Puncte wo die zweyte logarithmische Linie von der Parallele geschnitten wird, und dem Endpuncte des Bogens von ihr der mit dem Bogen der ersten gleiche Länge hat, befindet sich ein unendlich kleiner Bogen, dieser Bogen, nur genannter Abstand (8) und die unendlich kleine Linie durch der gleich langen Bogen Endpuncte geben ein unendlich kleines Dreyeck, desselben zuletzt genannte Seite, ist das Element der in (5) gesuchten Tangente.

10. Dieses Dreyeck betrachte ich nicht weiter, ich erwähne es nur wegen des Zusammenhangs mit der Tangente. Eigentlich wollte ich nur zeigen daß man bey ein Paar einander unendlich nahen krummen Linien, eine Grösse die in jeder für sich veränderlich ist, ungeändert lassen kann, und eine differentiiren, die in jeder krummen Linie für sich unveränderlich ist.

11. In Leibnitii et Io. Bernoullii Commercium Philosophicum et Mathematicum, ist der 59 Br. von Leibnizen 1697 im August geschrieben. Bernoulli hatte eine allgemeine Methode gewünscht, Tangenten an eine krumme Linie zu ziehn, deren Puncte durch Quadraturen nach einer gewissen Ordnung gegebener krummen Linien bestimmt

bestimmt werden. L. hat, seiner Gewohnheit gemäß auf einer Reise darüber nachgedacht, und eröffnet seine Erfindung. Das Exempel von logarithmischen Linien das ich beygebracht habe, giebt er zur Erläuterung der allgemeinen Methode ob es gleich für sich noch eingeschränkter könnte behandelt werden. Er nennt x was ich wie gewöhnlich y neune, und a Parameter. Das Verfahren selbst giebt er als eine neue Anwendung der Methoden an, die Bernoulli mit ihm gemeinschaftlich hatte, und empfiehlt ihm im 60. Briefe sie geheim zu halten, bis sie beyde solche selbst genugsam gebraucht hätten, es liege darinnen viel mehr als man beym ersten Anblicke muthmassen möchte, man solle also Andern nichts davon sagen bis man es selbst nach Würden gebraucht habe. Es werden auch aus dieser neuen Methode zu differentiiren neue zu summiren entstehn zu denen man sonst nicht gelangte.

Der 61. Brief ist Bernoullis Antwort wo er unter andern auch diese neue Methode rühmt.

In den Ueberschriften der Briefe heisst sie: methodus differentiandi de curua in curuam. Auch im 63. Briefe, der von Bernoullin ist, findet sich etwas davon.

12. Die Geschichte der ersten analytischen Behandlung isoperimetrischer Aufgaben, erhält zugleich das Andenken eines Zwistes zwischen den

bey-

beyden Brüdern die von Leibnizens Rechnung des Unendlichen zuerſt den Werth erkannten, ſie ausbreiteten und erweiterten. Der ältere von ihnen Jacob Bernoulli, Prof. zu Baſel, gab in Act. Erud. 1697. Mai. Auflöſung der Aufgabe ſeines Bruders Johanns, damahls Profeſſors zu Gröningen, von der curua oligochrona. (Man ſ. hie, die Brachyſtochrone 43). Erinnerte zugleich, dieſe Speculationen bahnten den Weg zu ſchwerern Aufgaben, z. E. den iſoperimetriſchen. Daß der Kreis die krumme Linie ſey welche den gröſſten Raum einſchlieſſt, glaube man insgemein, und das mit Recht, aber ohne Beweis. Dieſe Frage, und verwandte, legt Jacob, ſeinem Bruder vor, durch die Methode der Gröſſten und Kleinſten zu beantworten.

In Act. Er. May 1698; löſt er auch einige Fragen auf die Johann im Journ. des Sav. Aug. 1697. aufgegeben hatte: Auf einem runden Körper die kürzeſte Linie zu ziehn. Wenn ähnliche krumme Linien, um einen Punct ähnlich liegen, durch welchen eine gerade Linie geht, deren Lage gegeben iſt, ſo wie noch einer andern geraden Linie ihre, den gröſſten oder kleinſten Bogen zu finden welcher zwiſchen dieſen geraden Linien enthalten iſt.

13. Im Journal des Sav. Dec. 1697. erſchien ein Brief Johanns an Varignon ſur le problème des iſoperimètres (Op. Io. B. T. I. p. 40)

40) der ſich auch lateiniſch in Act. Er. Jan. 1698. findet. Joh. erinnert, daß der Kreis den gröſſten Raum einſchlieſſe, habe Pappus erwieſen L. V. Pr. 10. und löſet dann ſeines Bruders Aufgaben auf.

Ins Journ. d. Sav. 1698; 17 Fevr. ward eingerückt: Hr. B. Profeſſor zu Baſel behaupte, die vornehmſte ſeiner Aufgaben welche die iſoperimetriſchen Figuren betrifft, ſey nicht vollkommen richtig aufgelöſt. Bernoulli zu Gröningen antwortete darauf in J. d. S. 1698; 21 Apr. und ſo wechſelten beyde in dieſem Journale noch einige Schriften, nicht ganz freundſchaftlich. Op. Iac. Bern. T. I. n. 83... 89.

14. In Act. Erud. 1700. Iun. erſchien Iacobi Bernoullii ſolutio propria problematis iſoperimetrici. Nur Differentialgleichungen in einer Tafel dargeſtellt, ohne den Weg wie ſie gefunden werden. Cramer zeigt dieſen, in ſeinen Anmerkungen über dieſen Aufſatz Op. Iac. n. 93.

15. Analyſis magni problematis iſoperimetrici eine Diſputation die unter Jac. Bern. Joh. Jac. Epiſcopius 1. März 1701. vertheidigt, trägt die Auflöſung vor; findet ſich in Act Erud. Mai. 1701; Op. Iac. B. n. 96. B. erklärt ſich, er nenne die Aufgabe groß, nicht ſo wohl wegen ihrer Schwürigkeit, ob ſie gleich auch unter die ſchwerſten gehöre, ſondern weil ſie diene die Grän-

zen der Wissenschaft ungemein zu erweitern. Sein erster Lehrsatz giebt in Differentialen, höherer und höherer Ordnungen, Unterschiede zunächst nach einander folgenden Ordinaten und Abscissen. Der zweyte, betrachtet in einer krummen Linie vier einander unendlich nahe Puncte, B, F, G, C, von deren jedem ein Perpendikel auf die Abscissenlinie gelassen ist. Die beyden äussersten B, C, bleiben unbeweglich, die mittlern F, G, verrücken sich, jeder in seinem Perpendikel, doch so daß die Summe der drey geraden Linien BF + FG + GC ungeändert bleibt, da wird dann das Verhalten der Aenderungen ihrer Entfernungen von der Abscissenlinie untersucht.

Dieß nur als eine Probe von Jacobs Verfahren, wo sich also auch Variation zeigt.

16. Johann theilte seine Auflösung der isoperimetrischen Aufgabe im Junius 1698. Leibnitzen mit, und da Jacob das (14) erwähnte bekannt gemacht hatte, schickte er solche im Jänner 1701 an die pariser Akad. d. W. versiegelt, nicht eher zu eröffnen, bis sein Bruder seine Analysis herausgegeben hätte. Diese erschien (15) Es gab Schwierigkeiten bey der Akademie wegen der Bekanntmachung; Jacob starb 16. Aug. 1705, und die Akademie eröffnete das Versiegelte 17. Apr. 1706. Johanns Aufsatz erschien in den Mém. de l'Acad. 1706. (Op. Io. Bern. n. 75.)

In

In der Anmerkung dabey, steht, was ich zunächst erzählt habe.

17. Johanns erste Aufgabe ist diese: Eine gegebene gerade Linie wird von einer krummen in zween gegebenen Puncten geschnitten: Unter allen krummen Linien von gleicher Länge, welche das leisten, soll man diejenige finden, bey welcher, Functionen ihrer Ordinaten, selbst als Ordinaten eben der Abscissen betrachtet, eine krumme Linie geben, deren Fläche die grösste unter allen Flächen krummer Linien ist, welche sich auf eben die Art bestimmen lassen.

Er erinnert: Dieser Umstand des Grössten, welcher für die ganze krumme Linie verlangt wird, die von dem einen gegebenen Puncte der Abscissenlinie bis zum andern geht, finde auch bey jedem Theile statt, der sich vom ersten der gegebenen Puncte bis an eine unbestimmte Stelle erstreckte. Nun stellt er sich zwey an einander liegende Elemente der gesuchten krummen Linie vor, FO, Oφ, zu ihnen gehören zwey Elemente der krummen Linie deren Ordinaten Functionen der gesuchten sind. Aus F, φ, als Brennpuncten, mit einer Axe $=$ FO $+$ Oφ, beschreibt er eine Ellipse, deren beyde Elemente Fω, $\omega\varphi$ sind, ... das heisst also: er lässt der gesuchten krummen Linie Bogen FOφ, variiren, ... nun sucht er was dieses in der krummen Linie ändert, deren Ordinaten Functionen der gesuchten sind.

Die zweyte Aufgabe zeigt wie man aus der krummen Linie deren Ordinaten Functionen waren, umgekehrt die zuerst gesuchte krumme Linie findet, also directe und indirecte Methode einander bestätigen. Der ganze Aufsatz nimmt in den Werken etwas über vier Quartblätter ein.

18. In dieser Sammlung zweytem Bande, n. 103. finden sich: Bemerkungen über das was bisher zur Auflösung isoperimetrischer Aufgaben gethan ist, nebst einer neuen kurzen und leichten Methode sie ohne Rechnung aufzulösen, welche sich auch auf verwandte Aufgaben erstreckt; französisch aus den Mém. de l'Ac. 1718; steht auch lateinisch in Act. Er. 1718. Ian. Er verbessert einen Fehler der sich aus Unachtsamkeit in vorige Auflösung eingeschlichen hatte, und giebt eine neue Art, nicht nur seines Bruders Aufgaben, sondern auch verwandte aufzulösen. Er betrachtet wie sein Bruder, einen unendlich kleinen Bogen der gesuchten krummen Linie, als aus drey geraden Elementen zusammengesetzt, wendet einen Grundsatz an der aus dem Gesetze der Einförmigkeit hergenommen ist, und findet die gesuchten Gleichungen, aus Betrachtung der Figur fast ohne einige Rechnungen, braucht also die mühsame Analysis seines Bruders nicht, die Taylor abkürzen und erläutern wollte, aber noch viel dunkler gemacht hat. Sein Verfahren lässt sich hie, kurz und ohne mehr Figuren nicht beybringen.

gen. Es betrachtet auch Variation des unendlich kleinen Bogens der gesuchten krummen Linie.

Taylor hatte wegen des Versehens Bernoullin Vorwürfe gemacht, Nicolaus Bernoulli vertheidigt seinen Vater. Op. Io. B. T. II. n. 118; und 120.

19. In Mém. de l'Ac. d. Sc. 1734; 510 S. des holl. Drucks, findet sich: Sur les courbes tautochrones par M. Fontaine. Tautochrone heisst eine krumme Linie, auf der alle Bogen bis an den niedrigsten Punct im Niedersteigen, oder von ihm, im Aufsteigen, beschrieben werden. (Meine höhere Mechanik; II. Abschn. 53. §.) Damahls hatte man noch keine Methode, dergleichen für jede Voraussetzung der Schwere und des Wiederstandes zu finden. In dieser Absicht betrachtet Fontaine zweyerley Aenderungen der Coordinaten, in einer und derselben krummen Linie, und aus einer krummen Linie in die andre, er bezeichnet jene wie gewöhnlich als Differentiale, diese, wie die Engländer Fluxionen bezeichnen. Die letzte Bezeichnung deutet also bey ihm Variationen an. So kann man von ihm sagen er habe zuerst etwas von Variationsrechnung gebraucht.

20. Hr. Friedr. Wilh. Aug. Murhard aus Cassel, gab bey Erlangung der höchsten akademischen Würde in der Philosophie: Specimen

hiſtoriae atque principiorum calculi quem vocant variationum. Gott. 1796. Nebſt einigem von dem was ich beygebracht habe, nennt er als den erſten Erfinder der Variationsrechnung und deſſelben Anwendung auf iſoperimetriſche Fragen, de la Grange; Miſcellanea Taurinenſia T. II. für 1760; 61; p. 173; (Turin 1762) Eſſay d'une nouvelle methode pour determiner les maxima et les minima des formules integrales. Auch 196. S. Application de la methode précedente à la ſolution de differens problémes de Dynamique.

In der Pariſer Akademie fand d. l. Gr. Widerſpruch, Mém. de l'ac. 1767; 551 S. der Pariſer Ausgabe: Eclairciſſement ſur les methodes de trouver les courbes qui jouiſſent de quelque proprieté du maximum ou du minimum par M. le chevalier de Borda, und 588 S. Addition à la methode pour la ſolution des problémes de maximis et minimis par M. Fontaine.

F. ſagt l. Gr. habe ſich in ſeinem neuen Wege verirrt weil er die wahre Theorie nicht gekannt, und ſchlägt zwo andre Methoden vor.

Nach Hrn. Murhards Urtheile, iſt die erſte einerley mit Eulers ſeiner in dem Buche methodus inueniendi curuas... die andre mit de la Grange ſeiner.

Auch

Auch Borda, äuſerte, er habe Gleichungen gefunden, die von l. Grange ſeinen unterſchieden wären.

La Grange vertheidigte ſich dagegen, Miſcell. Taurin. T. III. für 1766 . . 69; p. 163. Sur la methode des variations, wo er ſich auch über einige andre Geometer beklagt, welche ihn wegen dieſer Methode beneideten.

l. Gr. hatte ſeine Methode ſchon 1755 Eulern mitgetheilt und dieſer ſolche gebilligt und für vollkommen zulänglich erklärt.

Das bisherige führe ich aus Hrn. Murhard Nachrichten an.

21. Soviel erhellt wohl daraus daß l. Gr. ſeine Methode nicht deutlich und überzeugend genug vorgetragen hat. Eulers Vortrag den ich gebraucht habe läſſt wohl keinen Einwendungen Platz. Die bernoulliſche Methode, Elemente der krummen Linie zu betrachten welche zwiſchen ein Paar gegebenen Puncten ihre Lage ändern, (15; 17;) hat er erſtlich in Aufſätzen für die kaiſ. petersb. Ak. d. W. erweitert, dann auch, mehr mit analytiſcher Rechnung behandelt.

Eloge de Monſieur Leonard Euler. . . par Nicolas Fuſs. . St. Petersbourg 1783. Es iſt ein

vollständiges Verzeichniß von Eulers Werken beygefügt. Ich bringe daraus von 78 u. f. S. bey, was hieher gehört, und erspare mir so die Mühe, die Aufsätze in der Sammlung der Akademie die ich freylich selbst besitze nachzusuchen.

Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis; Comm. Ac. Sc. Petr. T. VI. 1739.

De linea celerrimi descensus in medio quocunque resistente T. VII. 1740.

Curuarum maximi minimique proprietate gaudentium inuentio noua et facilis T. VIII. 1741.

Methodus inueniendi infinitas curuas isoperimetricas communi proprietate praeditas. Noui Commentarii T. VI. 1761.

Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum. N. C. T. X. 1766.

Methodus noua et facilis calculum variationum tractandi C. N. T. XVI. 1772.

In N. C. T. X. stehn vor der Analytica explicatio . . Elementa calculi variationum, sie sind in dem Verzeichnisse selbst vergessen, aber am Ende als eine Omission angezeigt. Euler erinnert im Anfange dieses Aufsatzes, die Untersuchungen der synchronarum und traiectoriarum, veranlassten, bey einer Reihe krummen Linien, einen

einen veränderlichen Parameter anzunehmen, und so zum Ex. von $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ die Aenderung zu suchen, indem sich Parameter a um da ändert. So was könne man calculum variationum nennen, und nicht nur so bey einer Reihe bestimmter krummen Linien anwenden, sondern auf alle krumme Linien ohne Einschränkung erstrecken; wie, wenn man unter allen krummen Linien diejenige suchte, die eine gewisse Eigenschaft des Grössten oder Kleinsten hat.

22. Paul Frisius, giebt einen Vortrag der Variationsrechnung an, nach dem er unterschiedenes das zu ihrer Geschichte gehört erzählt hat. Op. T. I. der Algebram und Geometriam analyticam enthält, Mediol. 1782; 4; p. 414. Ich schreibe seine Worte her:

His autem omnibus consideratis, iam aliquot abhinc annis, in diss. ad Senensem Ac. data, animaduerti, non geminata characteristica, altera quae variationes quantitatis alicuius exprimit, generales illas probl. isoperimetricor. formulas, ex notis aliis differentialis calculi principiis colligi. Si scilicet, scribendo $dy + \varphi$ loco dy, et $ddy + d\varphi$ loco ddy, proposita maximi aut minimi proprietas transferatur in proximum figurae locum, ac differentiis summisque de more acceptis, termini omnes, qui quantitatem φ inuoluunt, simul nihilo exaequentur. Non quod variationis calculus vlla ratione

cum

cum calculo differentiali confundi poſſit, vt perperam nonnulli intelligunt, ſed, quod citra illud D. Fontaine theorema, et ſolis calculi differentialis ſubſidiis, eaedem illae generales formulae iſoperimetricorum problematum reſoluendorum facile colligantur, quae huc vſque ex aliis calculi variationum formulis ſunt erutae.

23. In: Memorie della Società Italiana, T. V. Verona 1790; p. 130; findet ſich: Prodromo d'oſſervazioni, ſopra il Trattato di calcolo integrale pubblicato in Parigi del Sign. Marcheſe de Condorçet, l'anno 1765; di Pietro Ferroni.

Ferronius erinnert; der Keim der Variationsrechnung, liege in Leibnizens differentiatione de curua in curuam (hie; 11.) Auch was Condorçet équations de condition nennt, und ohne Beweis giebt, laſſe ſich leicht aus Leibnizens Lehren herleiten.

24. Mich deucht die Bemerkung des Ferronius, beantwortet auch ſogleich die Frage welche von vielen Rechnern als ſehr ſchwer iſt angeſehen worden: Ob Differentialrechnung und Variationsrechnung, einerley ſind oder wie ſich Euler calc. Variat. §. 3. ausdruckt: Variationen von Differentialen himmelweit unterſchieden ſind. Leibniz hatte ja ſchon geſagt, daß aus einer krummen Linie in die andre differentiirt wird.

25.

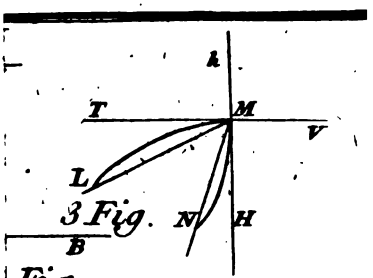
25. Noch eine Betrachtung über den Gang den diese Untersuchungen genommen haben.

Die ersten isoperimetrischen Fragen, über geradelinichte Figuren die bey gleichem Umfange gröſsten Innhalt haben, beantwortet Pappus V. B. ganz geometrisch. Auch der Bernoullie erste allgemeinere Aufgaben, stellen krumme Linien dar, in denen sich ein Theil des Umfangs änderte und zeigen was daraus folgt. Ebenfalls Euler Methodus inueniendi lineas curuas .... betrachtet die Folgen in einer krummen Linie, aus Aenderung einer Stelle in ihr, und findet selbst Calc. Var. §. 18. geometrische Darstellung sehr dienlich diese Speculationen zu erläutern, die in ihrer Allgemeinheit zu abstract und vage scheinen.

Ich darf wohl dieser Autorität gemäß von einem Vortrage denken, der nur Rechnungsformeln ohne Erläuterung durch Figuren giebt. Vielleicht mit deßwegen, ist la Granges Verfahren mißverstanden, und gemißbilliget worden.

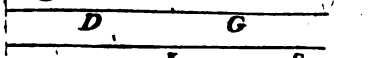
Es klingt sonderbar, krumme Linien die gewisse Bedingungen erfüllen, also geometrische Gegenstände, durch Methoden finden die keine geometrischen Betrachtungen erfodern. Die Formeln werden doch immer anfangs aus geometrischer Betrachtung hergeleitet seyn, so gut als Formeln der analytischen Trigonometrie, bey deren manchen, z. B. der vielfachen Winkel, man die

die Figur nicht allemahl zeichnet. Wird aber bey Fortsetzung und Verwickelung solcher Formeln geometrische Darstellung ganz vernachlässigt, so kann Undeutlichkeit, wohl Zweifel und Streit veranlassen. Immer wäre daher rathsam, der griechischen Geometer deutliches und sicheres Verfahren Betrachtung der Figur, nicht ganz bey Seite zu setzen.



3 Fig.

Fig.



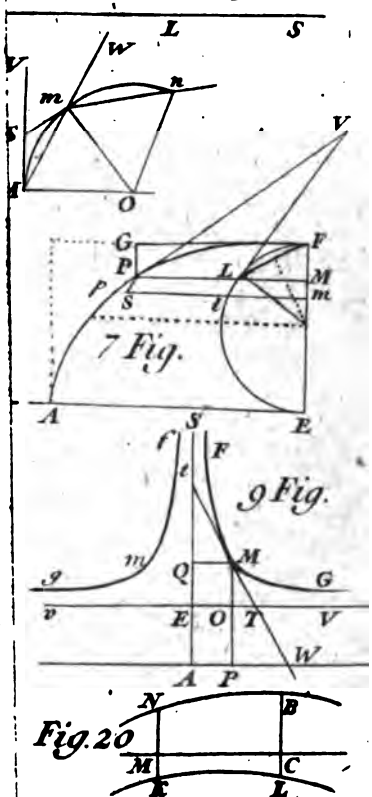
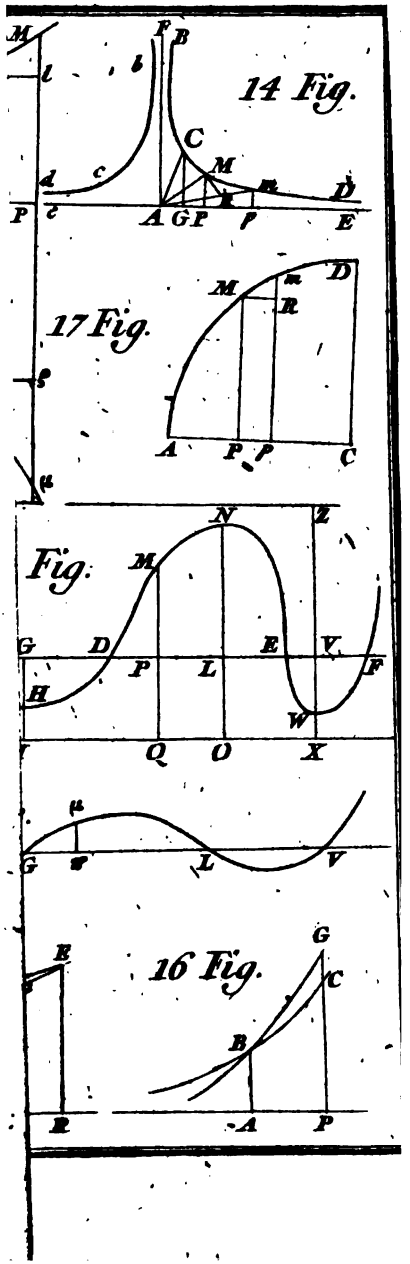
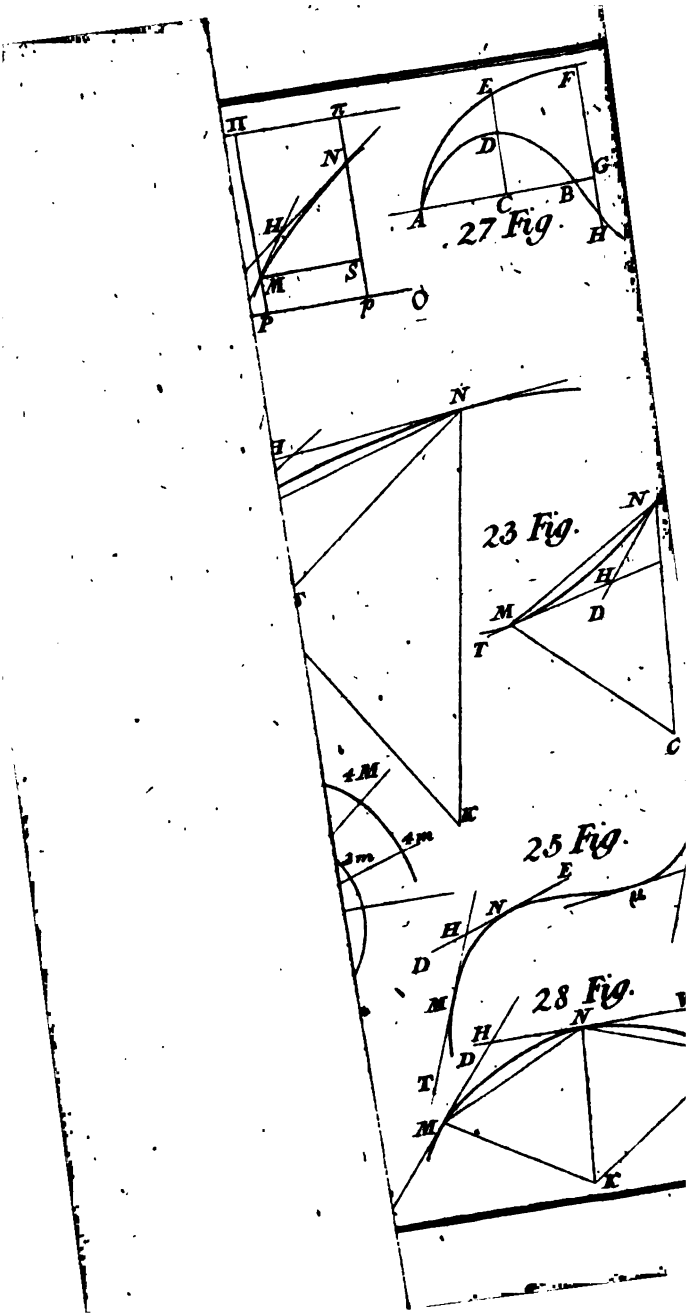
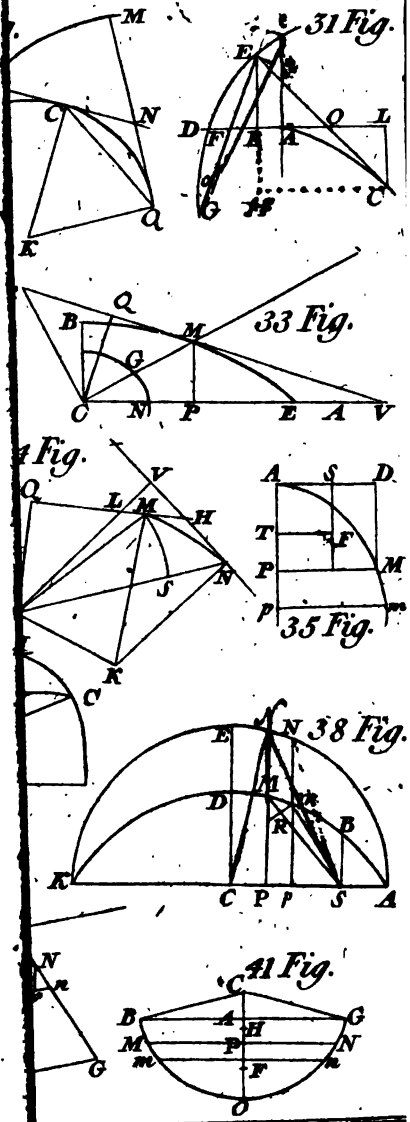


Fig. 20


14 Fig.
17 Fig.
Fig.
16 Fig.


Π
π
N
H
M
S
P
p
O
E
F
D
G
A
C
B
H
27 Fig.
N
H
23 Fig.
N
H
M
D
T
C
4M
3m
4m
K
25 Fig.
E
N
μ
H
D
M
28 Fig.
N
H
D
T
M
K


31 Fig.
33 Fig.
35 Fig.
38 Fig.
41 Fig.